

LIMITATIONS DES PERFORMANCES D'UN SOUSTRACTEUR DE BRUIT DANS LE CAS DE REFERENCES POLLUEES PAR LE SIGNAL OU UN BRUIT ADDITIF INDEPENDANT

Ch. Servièrre, D. Baudois,
J.F. Guerre-Chaley, A. Silvent (*)

CEPHAG, UA346 CNRS, ENSIEG, BP46, F-38402 St Martin d'Hères Cedex
(*) Attaché aux services techniques des Armées

RÉSUMÉ

L'efficacité de toutes les méthodes de soustraction de bruit [Moindres-Carrés récursifs, Treillis, L.M.S., algorithmes fréquentiels ...] est liée à la qualité de la référence bruit-seul utilisée. Notre but est de chiffrer la dégradation de leurs performances dans le cas où la référence n'est pas parfaite. Pour cela, nous considérons deux cas, fréquents dans le traitement de signaux réels, où la référence contient, soit un bruit indépendant, soit une part de signal utile. Pour chacun d'eux, nous calculons la puissance d'erreur résiduelle en fonction du rapport signal à bruit de la référence.

SUMMARY

The noise cancelling methods [Lattice, Fast-Kalman, L.M.S. or frequency algorithms] are efficient when both observation and noise reference inputs are well correlated. This statistical property is generally not verified when processing experimental signals : the reference sensor may receive a part of the signal, or an independent noise. This paper presents a study of these both cases : we calculate the residual quadratic error which depends on the Signal to Noise ratio in the reference.

I - INTRODUCTION

La réduction de bruit en présence de référence-bruit peut être vue [I,II,III] comme un problème d'identification de filtre. Il s'agit en effet d'identifier le filtre \mathcal{F} qui engendre le bruit perturbant le signal utile à partir de la référence bruit-seul $b(k)$. Cette identification peut être réalisée simplement lorsque \mathcal{F} est supposé linéaire et homogène [fig. 1] [I].

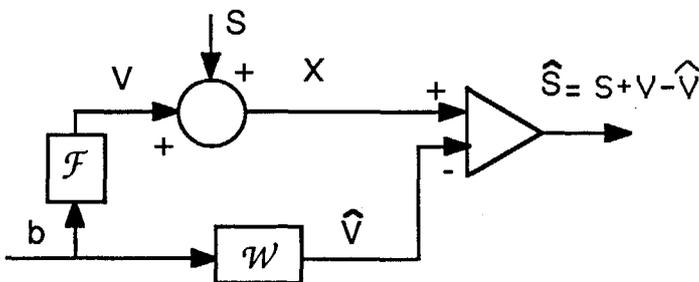


Fig. 1 : Schéma classique d'une réduction de bruit en présence d'une voie de référence.

On suppose que le signal utile $S(k)$ et le bruit $V(k)$ sont des signaux aléatoires stationnaires au second ordre, centrés et indépendants. A la suite de la phase d'identification, \mathcal{F} est reconstruit (w) à l'aide d'un filtre programmable à mémoire

finie ; la sortie de w excitée par la référence $b(k)$ est une estimation de $V(k)$, qui retranchée à l'observation $X(k)$ fournit une estimation du signal $S(k)$.

Des travaux antérieurs [III] ont permis de dégager 4 classes d'algorithmes permettant de résoudre ce problème [algorithmes temporels ou fréquentiels, bouclés ou non bouclés]. Ces différentes approches basées sur la minimisation d'un risque quadratique ont permis de définir différentes structures équivalentes [III, IV, V, VI, VII]. Nous avons choisi de travailler sur l'une d'entre elles (le Spectrofiltre) car elle permet une étude analytique assez complète par canal de fréquence, et a l'avantage de ne pas nécessiter l'hypothèse de blancheur de la référence bruit, exigée dans l'approche temporelle (Corrélofiltre).

II - RAPPELS CONCERNANT L'ALGORITHME FREQUENTIEL NON BOUCLE [SPECTROFILTRE]

Le gain complexe $F(v)$ du filtre \mathcal{F} est tel que :

$$(1) \quad F(v) = \frac{\gamma_{Xb}(v)}{\gamma_{bb}(v)}$$

expression dans laquelle $\gamma_{Xb}(v)$ [Resp. $\gamma_{bb}(v)$] est la densité spectrale de puissance d'interaction entre X et b [Resp. la densité spectrale de puissance moyenne de b]. Ces deux quantités sont calculées à l'aide d'un analyseur de spectre. Le filtre w a pour gain complexe :



$$\hat{F}(v) = \frac{\hat{\gamma}_{Xb}(v)}{\hat{\gamma}_{bb}(v)}, \hat{\gamma}_{Xb}(v) \text{ et } \hat{\gamma}_{bb}(v) \text{ étant les estimées de } \gamma_{Xb}(v) \text{ et } \gamma_{bb}(v)$$

et $\gamma_{bb}(v)$.

Le filtre, excité par $b(k)$ fournit une estimation du bruit $V(k)$ qui retranchée à l'observation bruitée fournit une estimation du signal utile $S(k)$, telle que $S(k) = \hat{S}(k) - V_1(k)$ [VIII].

III - CAS D'UNE REFERENCE POLLUEE

Les systèmes optimaux classiques de soustraction de bruit sont élaborés sous réserve que deux hypothèses statistiques soient vérifiées :

- indépendance (ou du moins décorrélacion) entre $b(k)$ et $S(k)$
- corrélacion totale entre $b(k)$ et $V(k)$ (cohérence égale à 1).

Lors de traitements de signaux réels, ces hypothèses sont rarement vérifiées : il est possible que le capteur enregistrant le signal de référence reçoive également une partie liée au signal ou un bruit indépendant (qui serait en fait non transmis par le milieu). Il nous a donc semblé intéressant d'étudier et de chiffrer l'efficacité de la réduction de bruit dans ces situations.

III-1 Cas de la référence polluée par un bruit indépendant

III-1-1 Etude du système soustracteur

On suppose que la référence accessible à l'opérateur $R(k)$ est telle que $R(k) = b(k) + B(k)$ [fig. 2], $B(k)$ étant un bruit stationnaire au second ordre, centré, et indépendant de $b(k)$, $V(k)$ et $S(k)$, de densité spectrale de puissance $\gamma_{BB}(v)$.

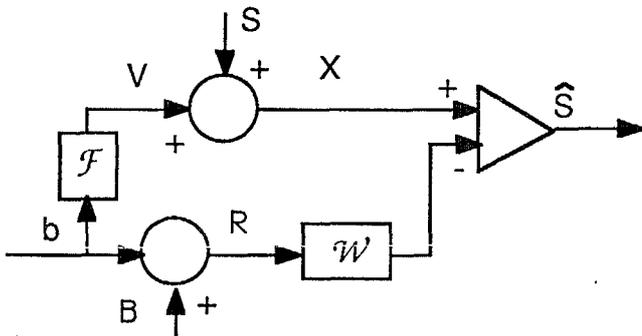


Fig. 2 : Soustraction de bruit dans le cas d'une référence polluée par un bruit indépendant

La mise en oeuvre d'une méthode de réduction de type Spectrofiltre conduit à engendrer un filtre w dont le gain complexe $W(v)$ est :

$$W(v) = \frac{\gamma_{XR}(v)}{\gamma_{RR}(v)} = \frac{\gamma_{Vb}(v)}{\gamma_{bb}(v) + \gamma_{BB}(v)} \text{ (en tenant compte des propriétés de décorrélacion)}$$

On remarque que $W(v)$ peut s'écrire

$$W(v) = \frac{\gamma_{Vb}(v)}{\gamma_{bb}(v)} - \frac{\gamma_{Vb}(v)}{\gamma_{bb}(v)} \cdot \frac{\gamma_{BB}(v)}{\gamma_{bb}(v) + \gamma_{BB}(v)} = F(v) + F_1(v)$$

Tout se passe comme si $W(v)$ était constitué de deux filtres en parallèle : le filtre $F(v)$ et un filtre dont le gain complexe est fonction de la densité spectrale du bruit $B(k)$.

Le schéma de la réduction est alors décrit par la figure 3.

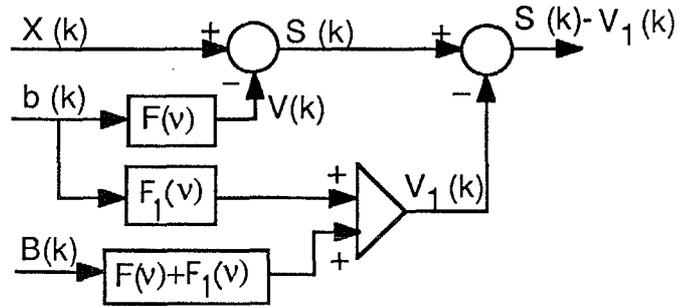


Fig. 3 Schéma du soustracteur

Le bruit $V(k)$ est reconstitué correctement, mais la procédure crée un bruit $V_1(k)$. $b(k)$ et $B(k)$ étant indépendants et centrés, la densité spectrale de $V_1(k)$ est donc :

$$\begin{aligned} (4) \quad \gamma_{V_1V_1}(v) &= |F_1(v)|^2 \gamma_{bb}(v) + |F(v) + F_1(v)|^2 \gamma_{BB}(v) \\ &= \frac{|\gamma_{Vb}(v)|^2}{(\gamma_{bb}(v))^2} \cdot \frac{\gamma_{bb}(v) \gamma_{BB}(v)}{\gamma_{bb}(v) + \gamma_{BB}(v)} = |F(v)|^2 \cdot \frac{\gamma_{bb}(v) \gamma_{BB}(v)}{\gamma_{bb}(v) + \gamma_{BB}(v)} \end{aligned}$$

On remarque que $\gamma_{V_1V_1}(v) = 0$ (donc que $V_1(k) = 0$ si b et B ont des supports fréquentiels disjoints).

On peut exprimer $\gamma_{V_1V_1}(v)$ en fonction du rapport signal à bruit fréquentiel dans la voie d'observation :

$$(5) \quad \beta(v) = \frac{\gamma_{SS}(v)}{\gamma_{VV}(v)}$$

et du rapport signal à bruit dans la voie référence

$$(6) \quad \alpha(v) = \frac{\gamma_{bb}(v)}{\gamma_{BB}(v)}$$

$$(7) \quad \gamma_{V_1V_1} = \frac{\gamma_{VV}(v)}{1 + \alpha(v)} = \frac{\gamma_{SS}(v)}{\beta(v) [1 + \alpha(v)]}$$

En supposant que $b(k)$ et $B(k)$ sont des bruits blancs de densité spectrale respective N_b et N_B , $\alpha(v)$ est constant ($\alpha = N_b/N_B$) et la puissance de V_1 est telle que

$$(8) \quad P_{V_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{V_1V_1}(v) dv = \frac{1}{1 + \alpha} P_V$$

II-1-2 Etude théorique des limites du système soustracteur

Il est clair que la soustraction de bruit est efficace lorsque la puissance du bruit en sortie du traitement est inférieure à la puissance du bruit avant traitement, ie :

$$(9) \quad P_v \geq P_{V_1}$$

Dans le cas d'un traitement fréquentiel pour lequel on peut contrôler l'efficacité de la réduction par canal de fréquence (et non pas seulement globalement comme c'est le cas lors d'une réduction utilisant une méthode temporelle), on dira que la procédure est efficace pour le traitement relatif au canal de fréquence v_i si

(10) $\gamma_{VV}(v_i) \geq \gamma_{V_1V_1}(v_i)$

$\alpha(v_i)$ étant toujours positif, l'expression (7) montre que (10) est toujours réalisé : le traitement est donc toujours efficace. L'efficacité du traitement est évaluée par le rapport

(11) $\frac{\gamma_{VV}(v)}{\gamma_{V_1V_1}(v)}$ qui donne par canal de fréquence le pouvoir de réduction. D'après (7)

(12) $\frac{\gamma_{VV}(v)}{\gamma_{V_1V_1}(v)} = 1 + \alpha(v)$

La courbe de la figure 4 représente en db l'efficacité du traitement.

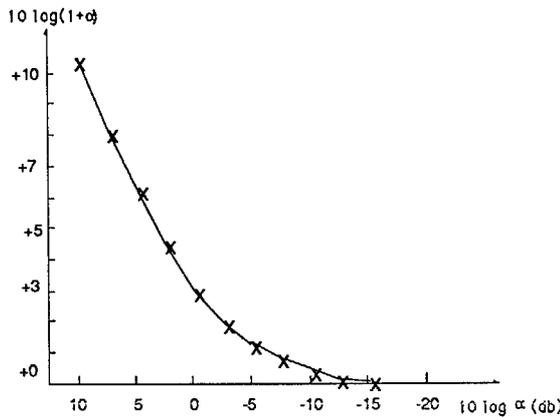


Fig. 4 Efficacité du traitement

On remarque que le gain du traitement n'est déjà plus que de 0,4 db pour un taux de bruit de -10 db, de 0,13 db pour -15 db et de 0,14 db pour -20 db.

Il semble donc inutile d'effectuer un traitement de réduction de bruit en dessous de -10 db. D'autre part, si le capteur de référence reçoit un taux de bruit aussi important, il est préférable de choisir une autre référence : les erreurs d'estimation risquent en effet d'être importantes. L'étude précédente suppose un temps d'intégration suffisamment long pour que le gain $F(v)$ soit correctement estimé. En pratique un terme tenant compte de l'erreur d'estimation de $F(v)$ modifie la valeur de $\gamma_{V_1V_1}(v)$ (4). Cette nouvelle valeur de $\gamma_{V_1V_1}(v)$ peut ainsi atteindre plus rapidement $\gamma_{VV}(v)$, voire la dépasser, ce qui rend alors le traitement inefficace. Cependant, des simulations effectuées sur des bruits large bande (le filtre à estimer étant du premier ordre), nous ont montré que les résultats théoriques précédents sont vérifiés jusqu'à un rapport Signal à Bruit de -10db pour le temps d'intégration choisi, ceci pour les algorithmes Moindres-Carrés-rapide, Treillis, Spectrofiltre et L.M.S..

III-2 Cas d'une référence polluée par le signal
III-2-1 Etude du système soustracteur

Supposons que le capteur de référence reçoive une faible partie du signal utile [fig. 5]. La référence accessible s'écrit alors

(13) $R(k) = b(k) + a S(k)$.

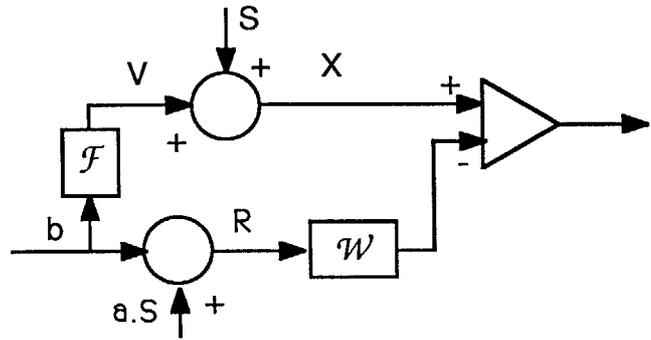


Fig. 5 : Soustraction de bruit dans le cas d'une pollution de la référence par le signal.

La mise en oeuvre d'une méthode de réduction de type Spectrofiltre conduit à engendrer un filtre w de gain complexe

$W(v) = \frac{\gamma_{XR}(v)}{\gamma_{RR}(v)}$ qui peut être écrit de deux manières différentes
(14)

$W(v) = F(v) + H_1(v)$ où $H_1(v) = a \frac{\gamma_{bb}(v) - a \gamma_{Vb}(v)}{\gamma_{bb}(v) [\gamma_{bb}(v) + a^2 \gamma_{SS}(v)]} \gamma_{SS}(v)$

(15) $W(v) = \frac{1}{a} + H_2(v)$ où $H_2(v) = \frac{a \gamma_{Vb}(v) - \gamma_{bb}(v)}{a(\gamma_{bb}(v) + a^2 \gamma_{SS}(v))}$

La soustraction de bruit peut alors être représentée par le schéma suivant (fig. 6)

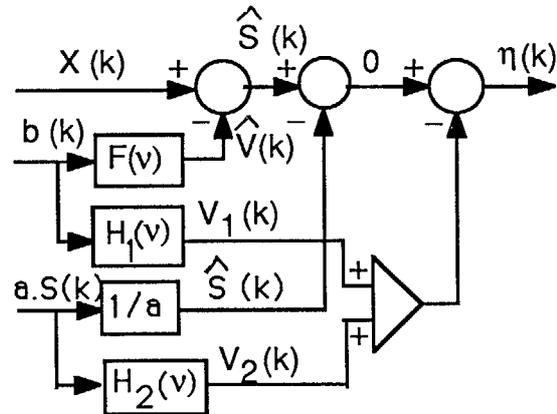


Fig. 6 Schéma du soustracteur de bruit

La sortie $\eta(k)$ du soustracteur ne peut plus être considérée comme une estimation du signal.

En effet, la soustraction de bruit qui a pour objectif d'éliminer de la voie signal toute partie de la référence bruit corrélée à la voie signal, a pour effet de soustraire non seulement $\hat{V}(k) = V(k)$ mais $\hat{S}(k) = S(k)$. La sortie du soustracteur est alors une somme de deux termes $V_1(k)$ et $V_2(k)$ indépendants:
 $\eta(k) = -V_1(k) - V_2(k)$

d'où $\eta(v) = -H_1(v) \cdot b(v) - a H_2(v) \cdot S(v)$

$= -a H_2(v) [S(v) + \frac{H_1(v)}{a H_2(v)} b(v)]$

Compte tenu de (14) et (15) :

(16) $\eta(v) = -a H_2(v) [S(v) - a \frac{\gamma_{SS}(v)}{\gamma_{bb}(v)}]$; $b(v) = \frac{V(v)}{F(v)}$

Cette dernière expression montre à l'évidence qu'en sortie du système, nous obtenons par canal de fréquence une



"composante signal" résultant d'un filtrage par le filtre de gain $H_2(v)$ et une "composante bruit" [fig. 7]. $H_2(v)$ dépendant de $\gamma_{SS}(v)$ ne peut être calculé isolément, ce qui rend l'estimation de $S(k)$ impossible en pratique.

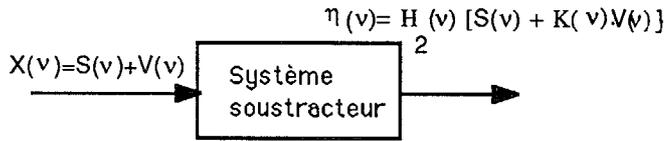


Fig. 7 Synthèse de la soustraction de bruit

III-1-2 Etude des limites du système soustracteur

L'efficacité du traitement peut alors être caractérisée par la valeur de $K(v)$:

$$(17) \quad |K(v)|^2 = a^2 \frac{\gamma_{SS}(v)}{\gamma_{bb}(v)} \frac{1}{|F(v)|^2} = \frac{a^2 \gamma_{SS}(v)}{|\gamma_{Vb}(v)|^2}$$

La densité spectrale de puissance de $\eta(k)$ peut alors être calculée:

$$(18) \quad \gamma_{\eta\eta}(v) = a^2 |H_2(v)|^2 \left[\gamma_{SS}(v) + a^2 \frac{\gamma_{SS}(v)}{\gamma_{bb}(v)} \gamma_{bb}(v) \right]$$

en utilisant l'expression (15) et en posant $\delta(v) = \frac{\gamma_{SS}(v)}{\gamma_{bb}(v)}$

$$\text{il vient } \gamma_{\eta\eta}(v) = \frac{|1 - aF(v)|^2}{1 + a \cdot \delta(v)} \gamma_{SS}(v)$$

On constate que la densité spectrale de la sortie du soustracteur est proportionnelle à la densité spectrale $\gamma_{SS}(v)$ du signal $S(k)$. Il convient cependant de souligner que ce coefficient de proportionnalité dépend également de $\gamma_{SS}(v)$. On constate que ce terme multiplicatif est égal à 1 lorsque $a = 0$ (il y a alors réduction totale du bruit) ; la sortie du système est le signal $S(k)$. Lorsque a reste faible (cas où la puissance du signal enregistré sur le capteur de référence reste faible), les termes ($a^2 \delta(v)$) et ($a F(v)$) seront proches de zéro : le coefficient multiplicatif reste voisin de 1. La puissance de sortie sera alors légèrement inférieure à la puissance du signal, en ne modifiant pas trop sa forme. Néanmoins, il est difficile de chiffrer l'intervalle sur a , pour lequel la soustraction de bruit est encore valable. La valeur maximale permise dépend à la fois du rapport des densités spectrales du signal et de la référence vraie $\delta(v)$, et de la valeur des coefficients du filtre $F(v)$.

Lorsque a augmente, le terme multiplicatif devient inférieur à 1. Les conséquences sont doubles : $\gamma_{\eta\eta}(v)$ est inférieur à la puissance du signal et, de plus, le rapport Signal à Bruit fréquentiel $\delta(v)$ intervient de plus en plus en introduisant le bruit de la référence $\gamma_{bb}(v)$.

Si la valeur de a augmente encore, le terme $|1 - a F(v)|^2$ va s'annuler pour une fréquence v donnée. La puissance de sortie, pour chaque canal de fréquence, passe ainsi par zéro dès que le coefficient a devient égal à $\frac{1}{F(v)}$. Ensuite, cette puissance

augmente, sa valeur limite (à infini) étant la densité spectrale du bruit perturbateur $\gamma_{VV}(v)$ [Fig. 8].

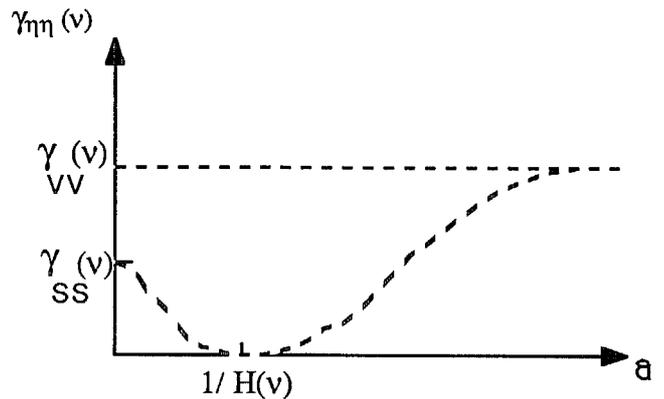


Fig. 8 Evolution de la puissance de sortie du soustracteur

IV CONCLUSIONS

L'efficacité des méthodes de soustraction de bruit est liée aux hypothèses de corrélation entre la référence-bruit et le bruit perturbateur et d'indépendance entre la référence et le signal. Dans le cas de traitements sur signaux réels, il est possible que le capteur de référence enregistre une partie du signal utile ou un bruit indépendant non transmis par le canal (bruits propres du capteurs). Ces phénomènes introduisent des termes dans la puissance d'erreur résiduelle, qui dégradent les performances du soustracteur de bruit. Nous montrons, dans le cas d'un bruit indépendant additif, que la réduction de bruit est encore efficace jusqu'à un taux de perturbation dans la référence de -10db. Lorsque le capteur de référence reçoit une partie du signal, la limite du taux de perturbation en dessous duquel la réduction de bruit est encore significative dépend à la fois des densités spectrales du signal et de la référence-bruit-seul vraie et de la valeur exacte des coefficients du filtre F .

BIBLIOGRAPHIE :

- [I] WIDROW, GLOVER, Mc COOL, KAUNITZ, WILLIAMS, HEARN, ZEIDLER, DONG, GOODLIN "Adaptive noise cancelling : principes and applications", Proc.IEEE, Décembre 1975, vol 63, p 1692
- [II] BAUDOIS, SILVENT "Application du corrélofiltre à l'élimination des raies en présence de bruit stationnaire", 7ème colloque GRETSI 1979
- [III] SERVIERE, BAUDOIS, SILVENT, LORENZINO "Eléments de comparaison entre différentes méthodes de soustraction de bruit", 11ème colloque GRETSI 1987, p 113
- [IV] BAUDOIS, KOFMAN, SILVENT "Etude théorique et expérimentale du Corrélofiltre", 8ème colloque GRETSI 1981
- [V] COMON "Traitements de signaux magnétiques multivariables", Thèse D.I. I.N.P.Grenoble 1985
- [VI] FRIEDLANDER "Lattice filters for adaptive processing", Proc.IEEE, vol 70, p 829, Août 1982
- [VII] CARAYANNIS, MANOLAKIS, KALOUPSIDIS "A fast sequential algorithm for LS filtering and prediction", IEEE Trans.ASSP, vol 31, p 1394, Décembre 1983
- [VIII] SERVIERE, BAUDOIS, SILVENT "Caractérisation théorique et expérimentale d'un filtre dans le domaine fréquentiel", soumis à Traitement du Signal en Octobre 1988