

EFFETS DE SATURATION SUR L'ALGORITHME LMS EN ANNULATION D'ECHO AVEC DONNEES BINAIRES

N.J. BERSHAD^{1,2} M. BONNET^{1,3}

¹LSS, CNRS-ESE, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

²Dept. of Electrical Engineering, Univ. of California, Irvine, CA 92717, U.S.A.

³Université Paris VI, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ

La plupart des études sur l'adaptation LMS en annulation d'écho considèrent des données gaussiennes et/ou un algorithme opérant en mode linéaire. La réalité est quelque peu différente: - l'implantation numérique des algorithmes introduit des non linéarités, - les données sont souvent binaires. Dans cet article, un paramètre de saturation contrôle une non linéarité agissant sur l'erreur qui intervient dans l'algorithme LMS. Cette non linéarité peut ainsi varier de façon continue de la fonction signe (quantificateur à 1 bit) à la fonction linéaire (absence de quantification). Les résultats mesurés par l'écho résiduel montrent que, comparées à des données gaussiennes, des données binaires dégradent d'autant plus les performances que la saturation est élevée (proche de la fonction signe). La différence entre les nombres de bits de l'erreur nécessaires pour des données gaussiennes et binaires est évaluée pour un même écho résiduel en fonction de la puissance des données lointaines et du paramètre de saturation.

SUMMARY

The effect of a saturation type error non-linearity in the weight update equation in LMS adaptive echo-cancellation is investigated for an independent binary data model. A nonlinear difference equation is derived for the mean norm of the difference between the estimate and the unknown filter to be estimated by the algorithm. The difference equation is evaluated numerically. It is shown that far-end binary data interference is much more deleterious to algorithm transient behavior than far-end gaussian data interference. The bit differential, for the same performance in a digital implementation of the algorithm, is studied for binary vs gaussian data as a function of the binary data power and the saturation parameter of the non-linearity.

I INTRODUCTION

Quelques articles récents [1-5] ont étudié l'algorithme LMS modifié par la présence de non linéarités dans l'incrément. Dans [2,3] des non linéarités de type saturation sont utilisées pour modéliser les effets dus à la précision finie dans des implémentations numériques de l'algorithme LMS. L'hypothèse de données gaussiennes faite lors de ces études n'est plus très réaliste dans le cas d'annulation d'écho de données.

Le cas de données binaires en annulation d'écho a été étudié dans [4,5] lorsque la fonction signe apparaît dans l'algorithme LMS. Il est montré que par rapport à des données gaussiennes, des données binaires de même puissance dégradent les performances de l'annulation d'écho (pour un même pas d'adaptation). Tel n'est pas le cas pour l'algorithme LMS classique où la densité de probabilité des données n'intervient pas.

Cet article étend les résultats de [2,4]. Il analyse les effets des données binaires, sur la vitesse de convergence de l'algorithme, lorsque le nombre de bits utilisés pour représenter l'erreur qui apparaît dans l'incrément de l'algorithme varie de 1 (fonction signe) à l'infini (cas linéaire). Les résultats permettent notamment d'évaluer le nombre de bits supplémentaires nécessaires lorsqu'on passe du cas gaussien au cas binaire pour une même performance d'annulation d'écho.

II ANALYSE

1. Algorithme LMS modifié

Le problème de l'annulation d'écho, illustré par la figure 1, représente un système de transmission bilatérale de données [4].

Le récepteur doit reconstituer les données lointaines $d_0(n)$ à partir d'une observation $d(n)$ qui est la somme de $d_0(n)$, d'un bruit additif $n_g(n)$ et d'un signal d'écho des données proches $x(n)$. Cet écho s'écrit $W_0^T X(n)$ où W_0 est un filtre inconnu de longueur N et $X(n)$ le vecteur des données proches

$$X^T(n) = (x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N+1)).$$

Pour supprimer l'écho on utilise un filtre adaptatif $W(n)$. Le signal d'erreur à l'entrée du récepteur peut s'écrire

$$e(n) = d_0(n) + n_g(n) - V^T(n) X(n) \quad (1)$$

où

$$V(n) = W(n) - W_0. \quad (2)$$

On suppose que les termes de l'équation (1) sont indépendants deux à deux. Les données proches $x(n)$ sont indépendantes, binaires, de puissance A et la longueur N du filtre adaptatif est suffisamment grande pour que la sortie $V^T(n) X(n)$ du filtre différence $V(n)$ soit considérée comme gaussienne [4].

Le signal d'erreur qui sert à piloter les coefficients de l'anneur est aussi le seul signal dont dispose le récepteur. Une restitution correcte de ne pourra donc être obtenue qu'après une bonne réduction de l'écho résiduel $V^T(n) X(n)$. Ceci peut être obtenu par l'algorithme LMS de pas d'adaptation μ :

$$W(n+1) = W(n) + \mu e(n) X(n). \quad (3)$$



Le comportement transitoire de l'erreur quadratique moyenne est présenté dans [6] lorsque $X(n)$ et l'observation $d(n)$ sont des variables centrées, conjointement gaussiennes.

Considérons l'algorithme LMS modifié par l'introduction d'une non linéarité sur l'erreur ε pilotant l'algorithme (3) selon

$$W(n+1) = W(n) + \mu g[\varepsilon(n)] X(n). \quad (4)$$

La fonction

$$g(y) = \int_0^y e^{-u^2/2\sigma^2} du \quad (5)$$

possède les propriétés suivantes [2]:

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} g(y) = y, \quad (6)$$

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} g(y) = \sqrt{\pi/2} \sigma \operatorname{sgn}[y]. \quad (7)$$

Grâce au paramètre σ^2 , la fonction g varie de façon continue de la fonction signe à une fonction linéaire, elle peut être utilisée comme mesure du degré de saturation. La saturation dépend du rapport $E[\varepsilon^2(n)]/\sigma^2$. Si ce rapport est grand, g est proche du signe; s'il est faible, g se comporte comme un opérateur linéaire.

2. Régime transitoire avec des données binaires

A l'aide de (2), l'équation (4) peut s'écrire

$$V(n+1) = V(n) + \mu g[\varepsilon(n)] X(n). \quad (8)$$

En posant $\gamma(n) = E[V^T(n)V(n)]$, l'équation (8) donne

$$\begin{aligned} \gamma(n+1) &= \gamma(n) + 2\mu E[V^T(n)X(n)g[\varepsilon(n)]] \\ &\quad + \mu^2 E[X^T(n)X(n)g^2[\varepsilon(n)]]. \end{aligned} \quad (9)$$

Grâce au théorème 1 démontré dans l'Annexe 1 de [7], la première espérance de l'équation (9) est évaluée par:

$$E[V^T(n)X(n)g[\varepsilon(n)]] = \frac{-\sigma A\gamma(n)}{\sqrt{\sigma^2+B+A\gamma(n)}} \exp \left\{ -\frac{S}{2(\sigma^2+B+A\gamma(n))} \right\} \quad (10)$$

alors que pour des données gaussiennes l'on obtient [2-éq.(18)]

$$E[V^T(n)X(n)g[\varepsilon(n)]] = \frac{-\sigma A\gamma(n)}{\sqrt{\sigma^2+B+S+A\gamma(n)}} \quad (11)$$

où $S = E[d_0^2(n)]$ et $B = E[n^2(n)]$.

L'équation (10) est une généralisation de [4, éq.(32)]; on peut ainsi vérifier que les résultats

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} E[V^T(n)X(n)g[\varepsilon(n)]] = -A\gamma(n) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \sqrt{2/\pi} E[V^T(n)X(n)g[\varepsilon(n)]]/\sigma = \\ -\sqrt{2/\pi} \frac{A\gamma(n)}{\sqrt{A\gamma(n)+B}} \exp \left\{ -\frac{S}{2(A\gamma(n)+B)} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

sont respectivement en accord avec celui du cas linéaire (absence de saturation) donné par [4, éq.(22)] et celui obtenu pour la fonction signe [4, éq.(32)].

La comparaison de (10) et (11) montre que la réponse transitoire de l'éq. (9) subit une réduction lorsque la puissance S des données lointaines croît; cette réduction est exponentielle pour des données binaires, elle n'est qu'inversement proportionnelle à la racine carrée de S pour des données binaires. Notons aussi que l'effet des données lointaines, binaires ou gaussiennes, sur la vitesse de convergence diminue à mesure que le paramètre σ^2 augmente (càd que l'équation devient linéaire)(voir éq.12).

Il reste à évaluer l'espérance du troisième terme de l'équation (9). L'hypothèse d'indépendance donne

$$E[X^T(n)X(n)g^2(\varepsilon(n))] = NA E[g^2(\varepsilon(n))]. \quad (14)$$

En utilisant l'équation (5) et en négligeant l'indice n on obtient avec des données binaires:

$$E[g^2(\varepsilon)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{u+\sqrt{S}} e^{-r^2/2\sigma^2} dr \right]^2 + \left[\int_0^{u-\sqrt{S}} e^{-r^2/2\sigma^2} dr \right]^2 \right\} * (e^{-u^2/2\beta^2}) (\beta\sqrt{2\pi})^{-1} \quad (15)$$

où $\beta^2(n) = A\gamma(n) + B$. Une solution de (15) étant difficile à obtenir, une évaluation numérique en est donnée par les figures 2 et 3 ($\sigma^2=1$). Cependant, une solution exacte de (15) peut être obtenue dans les cas particuliers suivants:

$$\lim_{S \rightarrow 0} E[g^2(\varepsilon)] = \sigma^2 \operatorname{Sin}^{-1} \left[\frac{\beta^2}{\beta^2 + \sigma^2} \right] \quad (16a)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} E[g^2(\varepsilon)] = \frac{\pi}{2} \sigma^2 \quad (16b)$$

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} E[g^2(\varepsilon)] = \beta^2 + S \quad (16c)$$

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} E[g^2(\varepsilon)] = \frac{\pi}{2} \sigma^2. \quad (16d)$$

Pour des données gaussiennes, l'équation (16a) s'applique et

$$E[g^2(\varepsilon)] = \sigma^2 \operatorname{Sin}^{-1} \left[\frac{\beta^2+S}{\beta^2+S+\sigma^2} \right]. \quad (17)$$

Cette équation est aussi représentée sur les figures 2 et 3 où $E[g^2(\varepsilon)]$ (en dB) est fonction de S (en dB). Quand S/β^2 est faible (fig. 2), ce qui correspond au début de convergence, la différence entre les éqs. (15) et (17) est négligeable quelque soit S . Cette différence augmente avec S/β^2 pour de grandes valeurs de S seulement. Toutefois, on remarque sur la figure 3 que la différence reste faible (moins de 2 dB en fin de convergence: $S/\beta^2 = 20$ dB) même pour une forte valeur de S (10 dB). D'autres arguments, développés dans [7], justifiant que l'équation (17) est une très bonne approximation de (15) nous allons l'utiliser avec (10) pour exprimer (9) sous la forme

$$\begin{aligned} \gamma(n+1) &= \left[1 - \frac{2\mu A\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \beta^2(n)}} \exp \left\{ \frac{-S}{2(\sigma^2 + \beta^2(n))} \right\} \right] \gamma(n) \\ &\quad + \mu^2 NA \sigma^2 \operatorname{Sin}^{-1} \left[\frac{S + \beta^2(n)}{\sigma^2 + S + \beta^2(n)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

En régime stationnaire $\gamma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n)$ satisfait l'équation

$$\gamma_{\infty} \approx \frac{\mu N \sigma}{2} \sqrt{\sigma^2 + B} \sin^{-1} \left[\frac{S+B}{\sigma^2 + S+B} \right] \exp \left\{ \frac{S}{2(\sigma^2 + B)} \right\} \quad (19)$$

obtenue en supposant que $(A\gamma_{\infty}/S) \ll 1$ ce qui est généralement obtenu par un bon choix de μ .

L'équation (18) a été évaluée numériquement en fonction de n pour des valeurs de S/σ^2 et $A\gamma_{\infty}/S$ en fixant S/B et $A\gamma(0)$ à 20 dB. Le paramètre μ a été obtenu par l'équation (19).

Pour l'équation (18) la figure 4 montre que la vitesse de convergence croît avec le paramètre de saturation. Le même type de courbes est présenté sur la figure 5 pour des données gaussiennes (où l'équation (11) a été utilisée à la place de (10) pour évaluer (9)). En l'absence de saturation (pour $\sigma^2=10$ ou 1) la vitesse de convergence est la même. Au fur à mesure que la saturation augmente (σ^2 décroît), la convergence est plus lente pour des données binaires. Ainsi pour $\sigma^2=.025$, la valeur choisie γ_{∞} est atteinte en 1000 itérations pour des données gaussiennes et en 1500 pour des données binaires.

Le cas d'une bonne annulation d'écho $A\gamma_{\infty}/S = -17$ dB [4] est présenté figure 6; le temps de convergence est évidemment plus long que pour la figure 4 où $A\gamma_{\infty}/S = -10$ dB.

3. Effet des données binaires sur le nombre de bits de l'erreur

Pour évaluer le handicap de données binaires par rapport à des données gaussiennes, il suffit de comparer les équations (10) et (11) (puisque le résultat gaussien (17) a déjà été utilisé pour obtenir une approximation du 3^e terme de (9)).

Au début de l'adaptation, lorsque $A\gamma(n)$ est grand devant la puissance des données S , les figures 4 et 5 montrent que le régime transitoire est identique. Nous nous intéressons donc à la comparaison de la convergence lorsque $\gamma(n)$ tend vers 0.

Soient σ_1^2 (resp. σ_2^2) le paramètre de saturation choisi pour des données gaussiennes (resp. binaires). En identifiant (10) et (11) lorsque $\gamma(n) \rightarrow 0$ et avec les hypothèses $B < S$ et $B < \sigma_2^2$, on obtient

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + S}} \approx \exp \left\{ -\frac{S}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad (20)$$

qui donne après résolution

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{S/\sigma_1^2}{\text{Log}_e \left(1 + S/\sigma_1^2 \right)} \quad (21)$$

On vérifie que lorsque $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ (cas linéaire) les temps de convergence sont les mêmes pour les 2 modèles. La différence augmente à mesure que $\sigma_1^2 \rightarrow 0$ (fonction signe).

Le tableau I compare les vitesses des convergence des modèles binaire et gaussien. Le paramètre σ_2^2 a été calculé d'après (21) en fonction de S/σ_1^2 . Le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un niveau donné γ_{∞} est n_1 pour le cas gaussien, n_2 pour le cas binaire. Ce tableau montre que l'équation (21) est valide.

Dans une réalisation numérique de l'algorithme LMS, pour une même performance d'annulation d'écho, l'augmentation du nombre de bits ΔN_b du cas gaussien au cas binaire est donnée par [2 éq.(54)]

$$\Delta N_b = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) \quad (22)$$

ou encore, en utilisant (21)

$$\Delta N_b \approx \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{S/\sigma_1^2}{\text{Log}_e \left(1 + S/\sigma_1^2 \right)} \right] \quad (23)$$

Les valeurs de ΔN_b données dans le tableau II restent très faibles tant que S/σ_1^2 n'est pas trop grand (< 100). Ceci s'explique par le fait que les valeurs de σ_1^2 données dans le tableau I correspondent à un niveau de saturation très éloigné de la fonction signe. En effet, pour de faibles valeurs de σ_1^2 , la convergence nécessite un très grand nombre d'itérations. Par exemple, on voit dans [2 fig. 2] qu'une annulation de 60 dB avec $\sigma_1^2 = 10^{-4}$ nécessite environ 2 000 itérations. Un calcul simple montre que pour la fonction signe, plus de 500 000 itérations seraient nécessaires.

IV CONCLUSION

Quelques résultats concernant les effets de saturation de l'algorithme LMS ont été présentés pour l'annulation d'écho en présence de données binaires. Ces résultats sont obtenus pour une non linéarité de type erf. Dans une implantation numérique, l'annulation adaptative d'écho par l'algorithme LMS est très sensible à la densité de probabilité des données, contrairement au cas analogique où les performances d'annulation d'écho ne dépendent que de la puissance des données. Une formule simple est obtenue comparant, pour une même performance d'annulation d'écho, les nombres de bits nécessaires à l'erreur dans les cas gaussien et binaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. L. DUTTWEILER, "Adaptive filter performance with non-linearities in the correlation multiplier," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, no. 4, pp.578-586, Aug. 1982.
- [2] N. J. BERSHAD, "On error-saturation non-linearities in LMS adaptation," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, no. 4, pp.440-452, Apr. 1988.
- [3] N. J. BERSHAD, "Dynamic range and finite word effects in digital implementation of the LMS algorithm," Proc. of IEEE Symp. on Circuits & Systems, June 1988, n° S130.6
- [4] M. BONNET, O. MACCHI, "Choix d'un algorithme en précision finie" Annales des Télécommunications, Vol. 38, no. 7-8, pp.305-329, Juil.-Août, 1983.
- [5] T. A. C. M. CLAASEN, W. F. G. MECKLENBRAUKER "Comparison of the Convergence of Two Algorithms for Adaptive FIR Digital Filters," IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-29, pp. 670-678, June 1981.
- [6] B. FISHER, N.J. BERSHAD, "The complex LMS adaptive algorithm - Transient weight mean and covariance with applications to the ALE," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp.34-44, Feb. 1983.
- [7] N. J. BERSHAD, M. BONNET, "Saturation effects in LMS adaptive echo-cancellation for binary data", submitted to IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Sept. 1988.



| $A\gamma_\infty/S$ en dB | S | cas gaussien | | | cas binaire | |
|-----------------------------|-----|----------------|--------------|-------|--------------------------|-------|
| | | S/σ_1^2 | σ_1^2 | n_1 | σ_2^2 eq. (21) | n_2 |
| -9 | .01 | .1 | .1 | 508 | .105 | 508 |
| -9 | .05 | .1 | .5 | 508 | .5246 | 505 |
| -9 | .01 | .4 | .025 | 662 | .0297 | 657 |
| -9 | .05 | .5 | .1 | 695 | .1233 | 691 |
| -17 | .05 | .5 | .1 | 6818 | .1233 | 6790 |
| -9 | .05 | 1 | .05 | 806 | .072 | 817 |
| -17 | .05 | 1 | .05 | 7939 | .072 | 8131 |
| -9 | .1 | 1 | .1 | 806 | .1443 | 817 |
| -9 | .1 | 2 | .05 | 925 | .091 | 988 |
| -9 | .05 | 2 | .025 | 925 | .0455 | 988 |
| -17 | .05 | 2 | .025 | 9142 | .0455 | 10022 |
| -9 | .1 | 4 | .025 | 1041 | .062 | 1225 |
| -9 | .5 | 5 | .1 | 1077 | .28 | 1314 |
| -9 | .5 | 10 | .05 | 1177 | .21 | 1665 |
| -9 | .5 | 20 | .025 | 1260 | .17 | 2079 |

Tableau 1: Temps de convergence pour des données binaires et gaussiennes

| S/σ_1^2 | .1 | .4 | .5 | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 20 | 100 | 500 |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| ΔN_b | .03 | .12 | .15 | .26 | .43 | .65 | .74 | 1.03 | 1.35 | 2.21 | 3.16 |

Tableau 2: Augmentation du nombre de bits pour le cas binaire par rapport au cas gaussien

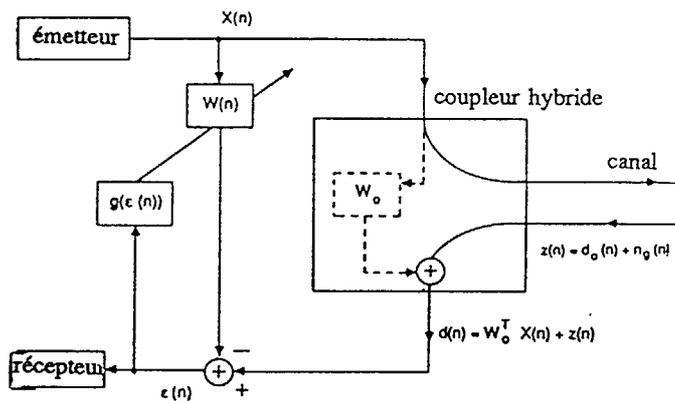


Figure 1: Annulation d'écho à une extrémité d'un système de transmission bi-directionnelle simultanée.

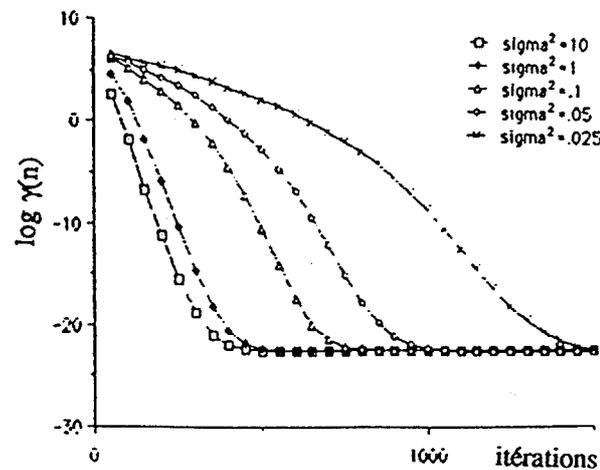


Figure 4: Vitesse de convergence; données binaires. $S = 0.05$, $A\gamma_\infty/S = -10$ dB, $A\gamma(0)/S = 20$ dB.

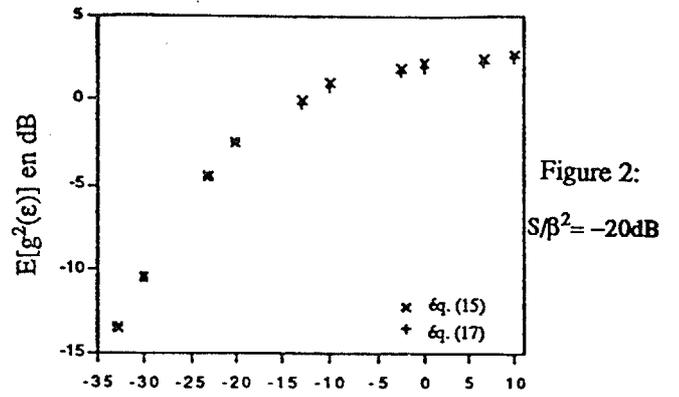


Figure 2: $S/\beta^2 = -20$ dB

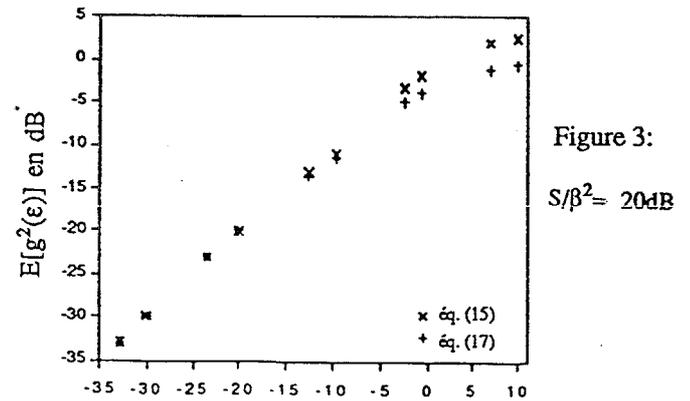


Figure 3: $S/\beta^2 = 20$ dB

Figs 2, 3 : Eqs. (15) et (17) pour différentes valeurs de S/β^2

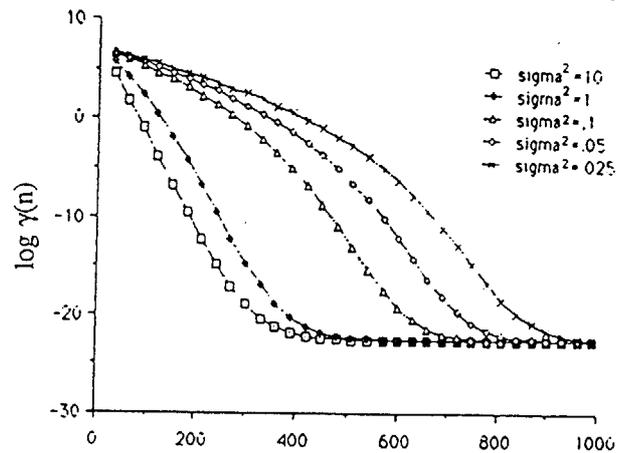


Figure 5: Vitesse de convergence; données gaussiennes $S = 0.05$, $A\gamma_\infty/S = -10$ dB, $A\gamma(0)/S = 20$ dB.

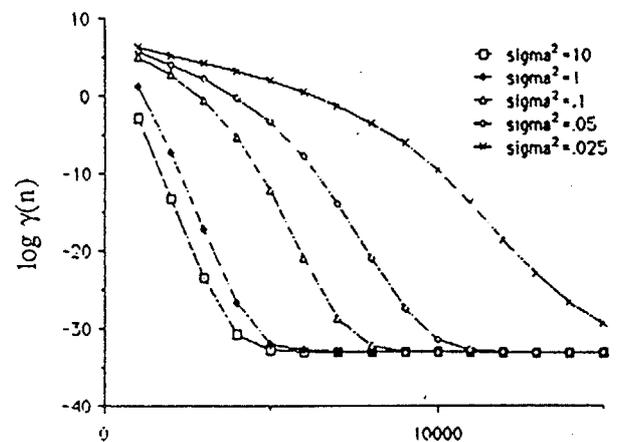


Figure 6: Vitesse de convergence; données binaires. $S = 0.05$, $A\gamma_\infty/S = -17$ dB, $A\gamma(0)/S = 20$ dB.