

## COMPARAISON DES PERFORMANCES D'ALGORITHMES ADAPTATIFS POUR LA REJECTION DE SINUSOIDES

Catherine LAMBERT-NEBOUT Francis CASTANIE

GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France

### RÉSUMÉ

Dans le but de rejeter le signal ILS (sinusoïdal) du signal ILS brouillé, nous comparons les performances d'algorithmes adaptatifs implantés dans une structure de Filtre Réjecteur Adaptatif. Nous nous intéressons à la conséquence du choix d'un algorithme du Gradient ou des Moindres Carrés sur la variance des coefficients du filtre adaptatif : le Gradient permet d'obtenir (ce qui peut sembler étonnant) une variance plus faible que les Moindres Carrés. Un taux de réjection est défini pour juger de la qualité de la structure adaptative. La nature du signal ILS nous contraint à utiliser un algorithme des Moindres Carrés rapides avec un facteur d'oubli. Les problèmes de stabilité numérique de ces algorithmes nous ont amenés à tester différentes méthodes de stabilisation : l'une d'entre elles seulement s'est révélée efficace pour notre application.

### SUMMARY

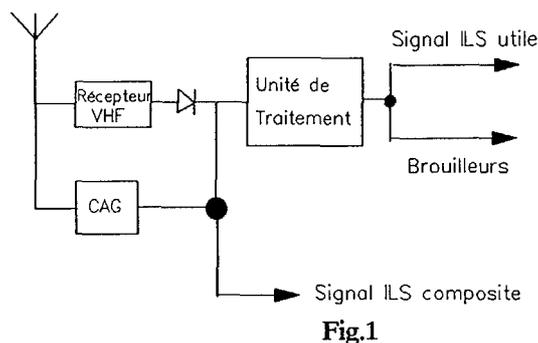
In order to reject the ILS signal (composed of sinusoids) from an ILS signal with interferences, we compare the performances of adaptive algorithms used in an Adaptive Line Enhancer (ALE). We show that the variance of the ALE weights depends on the chosen algorithm : LMS or RLS algorithm, surprisingly the LMS behaves much better than the RLS. A formula for the Rejection Ratio is then given. The nature of the ILS signal imposes to use a fast RLS algorithm with a forgetting factor. We encountered the problems of such algorithms : unstable behaviours and sudden numerical divergences. A few methods to stabilize them have been tested : only one among these methods seems to be effective for our purpose.

### 1-INTRODUCTION

#### 1. Le signal ILS

Le système d'atterrissage aux instruments (ILS : Instrument Landing System) adopté par l'aviation civile est utilisé de façon internationale mais des défauts de fonctionnement ont été constatés mettant en cause les informations données par le récepteur de bord ILS. Ces perturbations semblent être dues à un brouillage provenant de rayonnements parasites d'installations industrielles ou d'émissions FM.

Le signal ILS, mis en cause, est observé au niveau du récepteur de bord, après l'étage d'entrée (signal ILS composite).



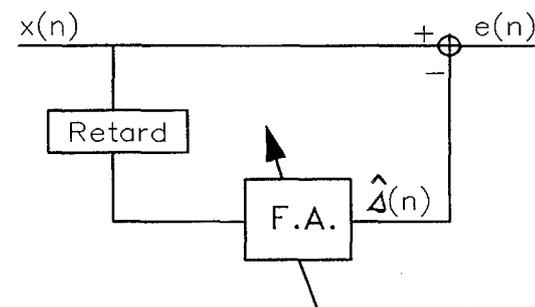
Le signal ILS utile est composé de 2 sinusoïdes de fréquences respectives 90 Hz et 150 Hz, auxquelles se rajoute de façon intermittente (si l'indicatif de l'aéroport en code morse est émis) une 3ème sinusoïde à la fréquence de 1020 Hz.

L'objectif visé est de modéliser et de classer les brouilleurs éventuels, il s'agit donc d'éliminer ces 2 (ou 3) sinusoïdes le plus parfaitement possible (la fréquence d'échantillonnage est fixée à 2.5 kHz).

Des méthodes "bloc" telles que Prony-Corrélation-Signal [1], Prony-SVD [2] donnent des résultats très satisfaisants mais il a paru intéressant de mettre en place un traitement adaptatif.

#### 2. Structure de Filtre Réjecteur Adaptatif (ALE)

Vu le contexte, la structure avec filtre adapté la plus appropriée est l'ALE (Adaptive Line Enhancer).





La structure ALE classique a été introduite par Widrow et al. [3] avec l'algorithme adaptatif du gradient stochastique (ou LMS : Least Mean Squares). L'entrée de référence est le signal  $x(n) = s(n) + b(n)$ , l'entrée primaire est une version retardée  $x(n - \Delta)$  de l'entrée de référence.

Les coefficients du filtre adaptatif (F.A.)  $h(k)$  sont utilisés de manière à minimiser la puissance de l'erreur  $E(e(k)^2)$ . Le retard  $\Delta$  assure l'indépendance entre le bruit de l'entrée primaire  $b(k - \Delta)$  et le bruit de l'entrée de référence  $b(k)$  d'où son nom de paramètre de décorrélation mais il peut jouer aussi un rôle d'ajustement de phase dans la mesure où pour détruire en sortie toute composante sinusoïdale, il est nécessaire que les composantes à la sortie du filtre adapté  $\hat{s}(n)$  aient la même amplitude et surtout la même phase que celles des composantes correspondantes  $s(n)$  dans  $x(n)$  [4].

Les coefficients du filtre tendent à transformer le filtre en un filtre de type passe bande dont la fonction de transfert est relativement pointue autour des fréquences centrales du processus  $x(n)$  et laisse passer très peu de puissance aux autres fréquences.

Une estimation des brouilleurs éventuels est donc directement disponible en sortie  $e(n) = \hat{b}(n)$ .

Pour s'affranchir des inconvénients bien connus de l'algorithme du gradient (lenteur de convergence et sous-optimalité) nous avons implanté, dans la structure ALE, 3 algorithmes des moindres carrés transversaux rapides :

- algorithme a priori ou Kalman Rapide [5],
- 2 algorithmes a posteriori :
  - FAEST [6]
  - FTF [7]

**II-COMPORTEMENT DIFFERENT DU GRADIENT ET DES MOINDRES CARRÉS**

L'utilisation dans une structure ALE d'un algorithme du gradient ou d'un algorithme des Moindres Carrés engendre des résultats différents sur la variance des coefficients du F.A., lorsque la convergence est atteinte.

Prenons le cas d'une sinusoïde  $s(n)$  noyée dans un bruit gaussien  $b(n)$  de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$

$$s(n) = \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 n + \theta) \tag{II-1}$$

$$x(n) = s(n) + b(n) \tag{II-2}$$

Le rapport Signal sur Bruit (S/B) noté  $\gamma$  est alors égal à :

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^2} \tag{II-3}$$

Soit  $L$  l'ordre du filtre transversal RIF :

$$e(n) = x(n) - \underline{H}^T(n) \underline{X}(n) \tag{II-4}$$

$$\underline{H}(n) = [h_0(n) \dots h_{L-1}(n)]^T$$

$$\underline{X}(n) = [x(n - \Delta) \dots x(n - \Delta - L + 1)]^T$$

soit  $\underline{H}_{opt}$  le filtre de Wiener [3] solution de

$$\underline{H}_{opt} = R^{-1} \underline{P} \tag{II-5}$$

avec  $R$  matrice d'autocorrélation  $L \times L$  de  $x(n)$

$$R = (R_{ij}) = (r_x(i - j)) \quad i, j = 0, \dots, L - 1$$

et  $\underline{P}$  vecteur  $L \times 1$  d'intercorrélacion de  $x(k)$  et  $x(k + \Delta)$ .

$$\underline{P} = (P_i) = (r_x(i + \Delta))$$

Soit  $\underline{\tilde{H}}(n)$  le vecteur erreur :

$$\underline{\tilde{H}}(n) = \underline{H}(n) - \underline{H}_{opt} \tag{II-6}$$

Il est possible d'exprimer dans le cas de l'algorithme du Gradient et dans celui de l'algorithme des Moindres Carrés Récursifs (MCR) la matrice de covariance de  $\underline{\tilde{H}}$  ainsi que celle de  $e(n)$ .

$$E_{min} = E[e_{H(n-1)}^2 / H(n-1) = \underline{H}_{opt}]$$

$$E_{min} = E[x^2(n)] - \underline{H}_{opt}^T \underline{P} \tag{II-7}$$

$$tr(R) = trace(R) = L \times r(0)$$

$\mu$  étant le pas d'adaptation du gradient :

	Gradient	MCR
$E[\underline{\tilde{H}}(n) \underline{\tilde{H}}^T(n)]$	$\mu E_{min} I$ (note 1)	$\frac{E_{min}}{n} R^{-1}$ (note 2)
$E[e_{H(n-1)}^2]$	$E_{min} (1 + \mu tr(R))$	$E_{min} \left(1 + \frac{L}{n}\right)$

Ce tableau qui reprend des valeurs données dans la littérature mérite quelques commentaires :

**Note 1 :** La valeur de la matrice de covariance des erreurs sur les coefficients du filtre est une approximation vérifiée dans le cas du gradient seulement pour de très faibles rapports S/B (échantillons d'entrée non corrélés).

**Note 2 :** Si un facteur d'oubli  $\lambda$  est introduit dans l'algorithme MCR (et si  $\lambda$  est différent de 1), il faut remplacer  $n$  par  $\frac{1}{1 - \lambda}$  (mémoire de l'algorithme).

on montre en posant  $w_0 = 2\pi f_0$  que [8] :

$$H_{opt}(i) = \frac{1}{\beta} [\Phi \exp[jw_0 i] + \Phi^* \exp[-jw_0 i]] \tag{II-8}$$

$$\Phi = B \exp[jw_0 \Delta] - \exp[-jw_0(\Delta + L - 1)] \frac{\sin(Lw_0)}{\sin w_0}$$

$$\beta = B^2 - \frac{\sin^2(Lw_0)}{\sin^2 w_0}$$

$$\text{avec } B = L + \frac{2}{\gamma}$$

et si de plus  $Lw_0 = k\pi$  soit :

$$L = \frac{k}{2f_0} \quad \text{avec } k \text{ entier} \tag{II-9}$$

on obtient :

$$H_{opt}(i) = \frac{\gamma}{1 + \frac{L}{2}\gamma} \cos(w_0(i + \Delta)) \tag{II-10}$$

Sachant que  $R$  s'écrit sous la forme :

$$R = \frac{1}{\gamma} \left( I + \frac{\gamma}{2} V^* V^T + \frac{\gamma}{2} V V^* \right)$$

avec  $V = (1, \exp[jw_0], \dots, \exp[jw_0(L - 1)])$

En utilisant deux fois le lemme d'inversion de matrice et sachant que  $\cos(2w_0 L) = 1$  nous obtenons une expression simple pour la matrice inverse de  $R$  :

$$R^{-1} = \gamma \left[ I - \frac{\frac{\gamma}{2} [V V^* + V^* V^T]}{1 + \frac{\gamma}{2} L} \right] \tag{II-11}$$

Soit  $(R^{-1})_{ii}$  ième élément de la diagonale de  $R^{-1}$

$$(R^{-1})_{ii} = \gamma \left( 1 - \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma}{2} L} \right) \tag{II-12}$$

pour tout  $i = 1, \dots, L - 1$

de plus  $trace(R) = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \times L$

Plaçons nous dans le cas où la puissance de  $e(n)$  est la même pour les deux algorithmes et pour des S/B faibles, i.e.

$\mu = \frac{\gamma}{N(1 + \gamma)}$ . Pour comparer la variance engendrée par cette erreur sur les coefficients, il suffit de comparer (pour des rapports S/B faibles)  $\mu$  avec  $\frac{R^{-1}}{n}$ , soit encore :

$$\frac{1}{1 + \gamma} \quad \text{avec} \quad \frac{1 + \gamma \left(\frac{L}{2} - 1\right)}{1 + \frac{\gamma}{2} L}$$

Il apparaît donc que la variance des coefficients calculés par le MCR est toujours supérieure à celle calculée par le gradient dès que  $L > 2$  d'autant plus que pour de forts rapports S/B nous avons vérifié par simulation que la valeur  $\mu E_{\min} I$  est plus grande de 1 à 2 ordres de grandeur que la variance réelle des coefficients.

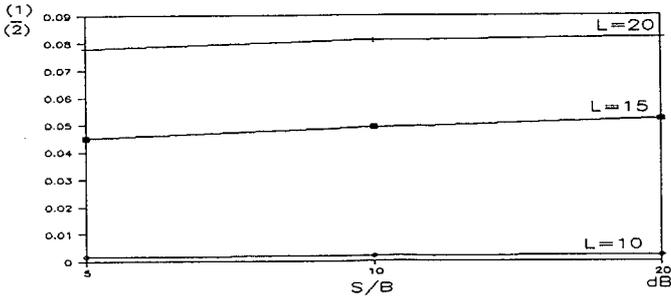


Fig.3

Calcul du rapport de la variance des coefficients calculée par le gradient(1) sur celle calculée par les MCR(2) par simulation sur 200 réalisations de bruit  $f_0 = 0.1 \quad \Delta = 3$

La variance des coefficients obtenue avec l'algorithme des moindres carrés est constante pour une longueur de filtre L fixée et pour S/B variant de 5 à 20dB (ceci se vérifie en théorie à l'aide des équations (II-12) et (III-6)).

Ces résultats obtenus dans un cas simplifié (1 sinusoïde dont la fréquence est un multiple entier de la longueur du filtre) ont été vérifiés par simulation pour une fréquence quelconque et dans le cas d'un signal constitué de plusieurs sinusoïdes. Ceci démontre une meilleure performance de l'algorithme du gradient quand on s'intéresse aux coefficients du filtre adaptatif.

### III-COMPARAISON DU TAUX DE REJECTION

Le but de notre application étant de rejeter un signal (constitué de 2 ou 3 sinusoïdes) nous nous intéressons à un taux de rejection défini par :

$$RR = \frac{E[s^2(n)]}{E[(s(n) - \hat{s}(n))^2]} \quad (III-1)$$

$\hat{s}(n)$  étant obtenu en sortie du filtre adaptatif :

$$s(n) - \hat{s}(n) = e(n) - b(n)$$

$E[(s(n) - \hat{s}(n))^2] = E[e^2(n)] - 2E[e(n)b(n)] + E[b^2(n)]$   
 Dans la mesure où  $s(n)$  et  $b(n)$  sont indépendants et que  $E[b(n)b(n+m)] = \frac{1}{\nu} \delta(m)$  on obtient :

$$E[e(n)b(n)] = E[b^2(n)]$$

Soit  $E[(s(n) - \hat{s}(n))^2] = E[e^2(n)] - E[b^2(n)]$  et

$$RR = \frac{E[s^2(n)]}{E[e^2(n)] - E[b^2(n)]} \quad (III-3)$$

Sachant que  $E[e^2(n)] = E_{\min} \left(1 + \frac{L}{n}\right)$  (toutes les versions d'algorithmes MCR sont équivalentes du point de vue de la puissance d'erreur en sortie, de plus  $\mu$  sera choisi pour l'algorithme du gradient de façon à avoir, pour n fixé, une puissance d'erreur de sortie équivalente à celle d'un algorithme MCR) :

$$RR = \frac{\gamma}{\gamma E_{\min} \left(1 + \frac{L}{n}\right) - 1} \quad (III-3)$$

donc en dB :

$$RR_{dB} = (S/B)_{dB} + SBA \quad (III-4)$$

$$SBA = -10 \log \left( \gamma E_{\min} \left(1 + \frac{L}{n}\right) - 1 \right) \quad (III-5)$$

et hors régime transitoire (n grand) :

$$SBA \approx -10 \log(\gamma E_{\min}) \quad (III-6)$$

SBA représente l'amélioration du rapport S/B obtenue avec une structure ALE.

Dans le cas d'une seule sinusoïde (cf.(II-1)) avec la condition (II-9),  $E_{\min}$  s'écrit sous la forme :

$$E_{\min} = \gamma^{-1} + 1 - \frac{\frac{L}{2}\gamma}{1 + \frac{L}{2}\gamma} \quad (III-6)$$

soit pour le taux de réjection :

$$SBA \approx -10 \log \left( \frac{\gamma}{1 + \frac{L}{2}\gamma} \right) \quad (III-7)$$

$$RR \approx 10 \log \left( 1 + \frac{L}{2}\gamma \right) \quad (III-8)$$

Nous avons vérifié ce résultat en simulant 200 réalisations de bruit et en calculant Eq(III-2) avec  $f_0 = 0.1$ ,  $L = 10$  et  $n = 1000$ .

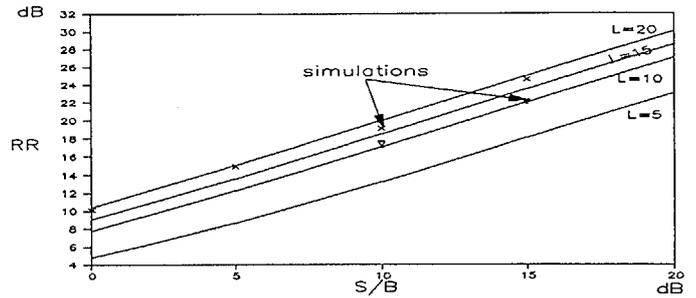


Fig.4

Taux de réjection fonction du rapport S/B Ordre du filtre L=10 Retard quelconque

D'autres simulations ont été effectuées avec un ordre L ne vérifiant pas Eq(II-9). Dans ce cas, la valeur du retard joue un rôle pour obtenir un taux RR optimal : la minimisation de la puissance de  $e(n)$  est équivalente [4] à la minimisation du critère  $J(\Delta)$  :

$$J(\Delta) = C - D \frac{\sin(Lw_0)}{\sin(w_0)} \cos(w_0(2\Delta + L - 1)) \quad (III-9)$$

C et D étant indépendants de  $\Delta$

Supposons  $L=13$  alors  $\Delta_{opt}$  est obtenu par la relation :

$$w_0(2\Delta_{opt} + L - 1) = n\pi \quad (III-10)$$

avec n pair puisque  $\frac{\sin(Lw_0)}{\sin(w_0)} > 0$

$\Delta_{opt} = 4 \quad (n = 4)$  minimise le critère.

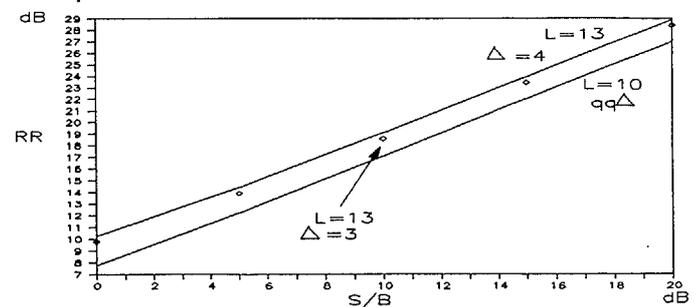


Fig.5

Taux de réjection fonction de S/B L=13  $f_0 = 0.1$  (200 réalisations de bruit)

Bien que le but de cet article ne soit pas de comparer des méthodes adaptatives avec des méthodes bloc, il est important de souligner que les méthodes adaptatives n'atteignent pas la performance de la méthode bloc de type Prony-Corrélation-Signal [1]. La différence est d'au moins 10dB en faveur de cette dernière.

## IV-APPLICATION A P'ILS

Pour notre application l'utilisation de l'algorithme du Gradient paraît impossible à cause de l'apparition intermittente d'une 3ème sinusoïde : le "1020" est le signal d'identification émis par le radiophare d'alignement de piste en code morse international composé de 2 ou 3 lettres. La durée d'un point est comprise entre 0.1s et 0.16s, ce qui correspond (pour une fréquence d'échantillonnage 2.5kHz) à une présence de la 3ème sinusoïde sur (au minimum) 250 à 400 échantillons. Ce nombre faible d'échantillons ne permet pas la convergence de l'algorithme du gradient et entraîne une perte (qui pourrait se révéler importante) d'information sur les brouilleurs.

Nous avons donc opté pour un algorithme des moindres carrés. Le signal ILS n'est pas stationnaire (même sans présence de "1020") lors de la phase d'atterrissage : c'est justement la différence d'amplitude entre les deux sinusoïdes qui permet à l'avion de se rapprocher de l'axe de la piste. Sachant que l'avion a alors une vitesse de 300 km/h, un facteur d'oubli de 0.998 semble nécessaire puisque la mémoire de l'algorithme est alors de 500 points, soit 0.2s ou encore 17m parcourus par l'avion. La présence de ce facteur d'oubli nous a confronté au problème de divergence numérique des algorithmes MCR rapides (qui est l'un des problèmes actuels lors de l'utilisation de tels algorithmes). Plusieurs méthodes ont été testées pour combattre cette instabilité numérique [9],[10],[11]. La méthode se distinguant par une stabilisation constante sur un grand nombre d'échantillons (et sans dégrader le taux de réjection) est celle proposée en [11]. Elle permet de stabiliser l'algorithme de Kalman rapide [o(10L) op./récursion] et l'algorithme FTF [o(7L) op./récursion] (et par conséquent l'algorithme FAEST de même complexité de calcul et ne différant que par le calcul de la variable de vraisemblance). La stabilisation est effectuée par l'introduction à l'initialisation de 3 variables (définies dans [11]) égales à 1 si l'on choisit un ordre de filtre égal à 70 (Fig.6,7,8).

## V-CONCLUSION

L'implantation d'une structure adaptative ALE pour la réjection du signal ILS constitué de 2 ou 3 sinusoïdes bruitées par des parasites industriels nous a permis de montrer que l'algorithme du gradient permettait d'obtenir une variance sur les coefficients du filtre adaptatif bien inférieure à celle introduite par l'algorithme des moindres carrés. Le taux de réjection optimum des méthodes adaptatives se révèle bien inférieur à celui obtenu avec la méthode bloc de Prony Corrélation Signal (taux de réjection de 20.7dB avec l'ALE contre 30.3dB avec une méthode "bloc" type Prony Corrélation Signal [1] pour un signal ILS avec S/B=10dB). Le problème de la divergence des algorithmes des moindres carrés a été abordé et résolu par l'application d'une méthode de stabilisation [11] de faible complexité.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.LAMBERT-NEBOUT, F. CASTANIE "High performance periodic signal rejection using improved Prony modeling" Proc. of EUSIPCO 88, Grenoble (France), Sept.1988
- [2] C.LAMBERT-NEBOUT Thèse à soutenir en Juin 1989
- [3] WIDROW B. et al. "Adaptive noise cancelling : Principles and applications", Proc. IEEE, vol.63, Dec. 1975, pp.1692-1716.
- [4] Y.YOGANANDAM, V.REDDY, T.KAILATH "Performance analysis of the adaptive line enhancer for sinusoidal signals in broad-band noise" IEEE Trans. ASSP, vol.36, Nov. 1988, pp.1749-1757
- [5] L.LJUNG, M.MORF, D.FALCONER "Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes" Int. J. Control., vol.27, January 1978, pp.1-19
- [6] G.CARAYANNIS, D.MANOLAKIS, N.KALOUPSIDIS "A fast sequential algorithm for Least-Squares filtering and prediction" IEEE Trans. ASSP, vol.31, Dec. 1983, pp.1394-1402.
- [7] J.CIOFFI, T.KAILATH "Fast RLS transversal filters for

- adaptive filtering" IEEE Trans. ASSP, vol.32, April 1984
- [8] J.ZEIDLER et al. "Adaptive enhancement of multiple sinusoids in uncorrelated noise" IEEE Trans. ASSP, vol. 26, June 1978, pp.240-254
  - [9] O.MACCHI, M.BELLANGER "Le point sur le filtrage adaptatif transverse" Onzième colloque GRETSI, Nice, Juin 1987, pp.1G-14G.
  - [10] P.FABRE, C.GUEGUEN "Fast recursive least squares algorithms : preventing divergence" Proc. ICASSP, 1985, pp.1149-1152.
  - [11] A.BENALLAL, A.GILLOIRE "A new method to stabilize fast RLS algorithms based on first-order model of the propagation of numerical errors" Proc. ICASSP, 1988, pp.1373-1376.
  - [12] C.LAMBERT-NEBOUT "Rapports de contrat STNA" Mai 1987, Novembre 1987, Mars 1988, Mars 1989.

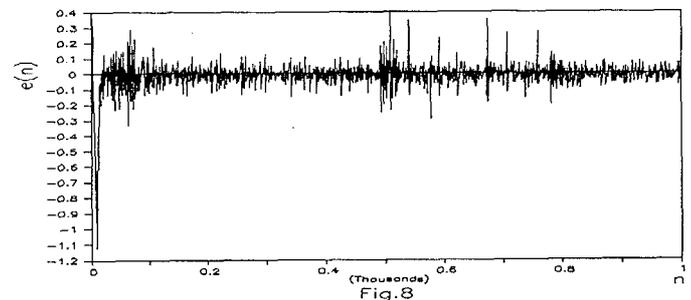
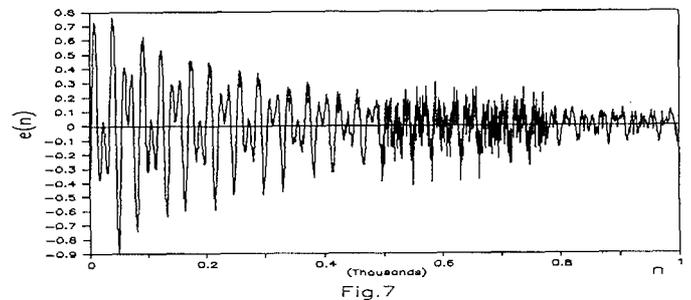
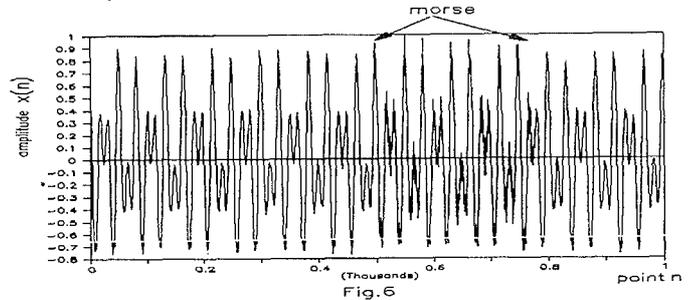


Fig.6 : signal ILS brouillé  
Erreur en sortie de l'ALE ( $e(n)$ ) :

Fig.7 : avec le gradient  $\mu = 0.001$   $L = 70$

Fig.8 : avec FTF stabilisé  $\lambda = 0.998$   $L = 70$

Nous remarquons (Fig.7 et 8) que le MCR permet une convergence suffisamment rapide en présence du caractère morse à "1020Hz" et donc en assure une bonne élimination, tandis que le Gradient n'a pas le temps de converger.

(\*) Les auteurs participent au GRECO TSI.  
Ces travaux font partie de la thèse de Catherine Lambert-Nebout