

## Modulations MAQ2<sup>N</sup> de rendement (N-1)/N

D. Duponteil, L. Ledter

CNET/PAB/ETR 38,40 Rue du Général Leclerc 92131 Issy les Moulineaux

### RESUME

L'emploi d'un code correcteur augmente l'efficacité spectrale des modulations à grand nombre d'états en augmentant leur immunité vis à vis du bruit. L'utilisation du codage convolutif permet la définition de la famille des modulations à codage en treillis. On rappelle les résultats de l'approche définie par Ungerboeck, qui permet une définition optimale du codage grâce à la prise en compte de la modulation utilisée. La méthode dite d'expansion, employée notamment par Calderbank, permet une approche globale des familles définies à partir du même code convolutif.

Dans le cadre des modulations MAQ2<sup>N</sup> de rendement (N-1)/N, on montre que le gain optimal est principalement donné par la complexité du treillis, en terme de nombre de noeuds du décodeur de Viterbi, indépendamment du nombre d'états 2<sup>N</sup> de la modulation. C'est ainsi que la modulation MAQ8 de rendement 2/3 permet de calculer les performances et de définir le récepteur optimal pour toute la famille. Ce résultat permet de définir, pour le circuit de décodage, une structure comprenant un préprocesseur et un décodeur de Viterbi proprement dit adapté à la réception de toutes les modulations de la famille

### SUMMARY

The use of error-correcting codes gives M-ary modulations more efficiency by increasing their noise immunity. Trellis coded modulation (TCM) family uses convolutional codes. The results of Ungerboeck approach are summarized. They concern the optimal design of coding by taking account of the modulation. The method used by Calderbank allows the global definition of families of coded modulations using the same convolutional code.

For the MAQ2<sup>N</sup> modulations with rate (N-1)/N, the maximum attainable coding gain is related to the trellis complexity, exactly to the number of states in the Viterbi decoder, and is nearly independent of the number of states of the modulation. 8QAM with 2/3 rate gives the performances and the optimal receiver structure for all the modulations of the family. This result shows the receiver can be implemented in two circuits, a pre-processor and a Viterbi decoder, this structure being suited to the reception of all the modulations with different rate and using the same convolutional code.

#### Introduction

L'utilisation des modulations à grand nombre d'états présente un intérêt essentiellement lié à un gain d'occupation spectrale, fonction croissante du nombre d'états utilisés.

Malgré l'introduction nécessaire de redondance, l'emploi d'un code correcteur d'erreur peut s'envisager dans le but d'accroître la protection contre le bruit.

Toutefois, la recherche de code convolutif performant doit impérativement tenir compte de la modulation utilisée pour la transmission du message codé. Ungerboeck, /1/, a été le premier à proposer une méthodologie de conception.

De nombreux travaux se sont inspirés de cette approche dans le domaine des modulations à grand nombre d'états, /2/, /3/, /4/, ainsi que dans celui des modulations à plusieurs dimensions, où un symbole est transmis au moyen d'un uplet de symboles d'une constellation donnée, /5/, /6/, /7/.

Calderbank, /8/, propose une méthodologie différente, basée sur un formalisme rigoureux, permettant une approche globale des familles des modulations à codage convolutif.

Le premier paragraphe permet de préciser les définitions et la méthode utilisée dans les paragraphes suivants.

Le second utilise les concepts qui viennent d'être définis, dans le cadre de la famille particulière que constituent les modulations MAQ2<sup>N</sup> de rendement (N-1)/N.

Le dernier paragraphe définit quelle doit être la structure d'un récepteur optimal, comprenant un préprocesseur et un circuit utilisant l'algorithme de Viterbi, capable d'être utilisé pour toutes les modulations d'une famille.

#### I Codage en treillis pour modulation à grand nombre d'états

##### I 1 Définitions

Pour un canal à bruit additif gaussien, la probabilité d'erreur est fonction de la distance euclidienne entre les signaux tels qu'ils sont définis à l'endroit où s'ajoute le bruit gaussien. Ainsi le codeur et le modulateur au sens strict doivent être optimisés conjointement. Cette définition d'optimalité de codes convolutifs, explicitée par Ungerboeck,

permet alors la construction de modulations codées plus performantes que des modulations classiques associées à des codes binaires.

Les modulations à codage convolutif regroupent un codage convolutif et une affectation appropriée des bits codés aux points de la constellation représentative de la modulation utilisée.

La structure d'une modulation de rendement  $R = p+n/q+n$  peut être schématisée par la figure 1.

Pendant un intervalle de temps donné, le modulateur délivre q+n bits codés fonction des p+n bits d'entrée et du passé des p bits d'information mémorisés dans le codeur. Le nombre total de bits mémorisés  $\nu$  détermine la complexité du treillis associé dont le nombre de noeuds est 2 <sup>$\nu$</sup> .

De chaque état du treillis sont issues 2<sup>p</sup> branches multiples, d'ordre de multiplicité 2<sup>n</sup>, correspondant aux n bits "non codés". Au mot i de q bits issu du codeur convolutif, on peut associer 2<sup>n</sup> signaux qui forment le sous-ensemble S<sub>i</sub>. On a ainsi une partition de l'ensemble S qui possède 2<sup>n+q</sup> éléments.

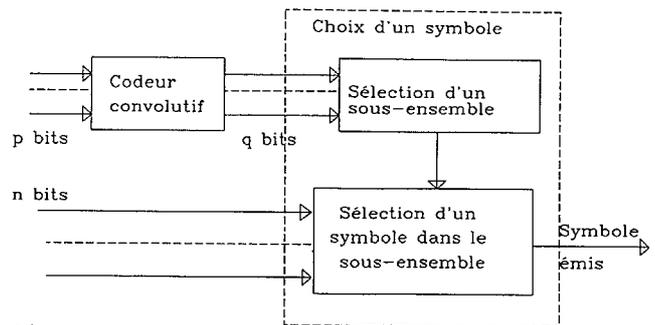


Figure 1-  
Modulateur MAQ2 de rendement (p+n)/(q+n)



La figure 2 donne le treillis associé à la modulation MAQ32 de rendement  $(1+3/2+3)$  représentée par la figure 3.

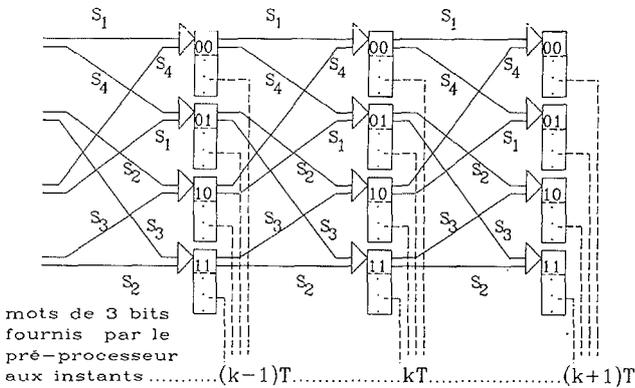
Dans cet article nous nous intéressons aux modulations telles que le treillis associé au codage convolutif est caractérisé par une structure à branches multiples.

Sous l'hypothèse d'un canal gaussien, la probabilité d'erreur asymptotique est donnée par:  $P(E) = N(d_1) Q(d_1/2\sigma)$ , où  $d_1$  désigne la distance libre de la modulation codée, c'est à dire la plus petite distance entre deux chemins quelconque du treillis au sens de la distance euclidienne.

La recherche de la distance libre s'avère alors complexe pour un nombre de noeuds relativement important, le choix d'un seul chemin de référence (algorithme de Bahl, /9/) étant délicat pour une partition quelconque de S.

Toutefois, on peut classer les chemins erronés en deux catégories, ceux qui ne comportent qu'une branche erronée et les autres. Dans la première se rangent les erreurs faites à l'intérieur des sous-ensembles  $S_i$ . Il faut ainsi de préférence assurer une distance "interne" minimale identique à tous ces ensembles  $S_i$ .

Figure 2- Treillis associé à la modulation MAQ 32 de rendement 4/5 (code de base 1/2)



**I 2 Methode de partitionnement**

Ungerboeck a été le premier à montrer que l'optimalité des codes en treillis repose sur l'utilisation d'une certaine partition régulière des points de S, obtenue par la méthode dite de "partitionnement". La partition  $\{S_i, i=1, 2^q\}$  ainsi obtenue est telle que chaque sous-ensemble  $S_i$  a la même distance interne minimale. Elle permet de maximiser la distance libre de la modulation codée pour un code convolutif fixé.

Les figures 3 et 4 sont représentatives de la méthode de partitionnement appliquée à une modulation MAQ $2^N$  de rendement  $(N-1)/N$ , en notant les points de S par le numéro du sous-ensemble  $S_i$  auquel ils sont associés, la distance interne minimale des sous-ensembles étant fonction du degré de partitionnement.

Cette construction permet de définir la distance libre comme la distance minimum entre le chemin "tout zéro", et tout chemin issu du noeud 0 et reconvergeant vers ce même noeud, propriété de régularité du code qui suppose de plus la linéarité du codeur convolutif.

Cette approche peut être considérée comme valable dans la mesure où le point représentatif du mot "tout zéro" est le pire possible. Il doit être un point de  $S_i$  tel que l'ensemble des distances minimales aux sous-ensembles  $S_j, j \neq i$ , est à "valeurs minimales". Empiriquement, pour des modulations à deux dimensions telles que celle qui est représentée sur la figure 4, il faut que le point "tout zéro" soit situé vers le centre.

Il convient de citer les travaux de Rouanne, /10/, sur la méthode de partitionnement et la régularité des codeurs, ainsi qu'une application aux modulations multidimensionnelles par Wilson, /7/.

Le principal apport de l'approche d'Ungerboeck est de montrer que la distance libre de la modulation codée est la plus petite des deux distances suivantes :

- i)  $d_{1, \min}^1$ , distance interne minimale d'un sous-ensemble quelconque de la partition ainsi définie,
- ii)  $d_{2, \min}^2$ , distance libre du code convolutif utilisé, calculée pour les  $2^q$  points représentatifs de la partition  $\{S_i, i=1, 2^q\}$ , constitués par le point "tout zéro" et les  $2^q-1$  points les plus proches appartenant aux  $2^q-1$  autres sous-ensembles.

Un calcul exact des performances permettant des comparaisons avec d'autres modulations, doit se faire à  $E_b$  (énergie moyenne émise par bit d'information) constante, ce qui sera fait dans un paragraphe ultérieur.

**I 3 Methode d'expansion**

Cette méthode, basée sur les résultats qui viennent d'être énoncés, est également exploitée par Calderbank, /8/, à partir d'un formalisme à base de méthodes algébriques sur les espaces quotients.

Une modulation à deux dimensions peut être définie par  $2^{n+q}$  points pris dans une constellation de base obtenue par application périodique d'un motif de base à  $2^q$  éléments sur une grille régulière donnée.

Dans la figure 3 est représentée la constellation obtenue pour  $q=2$ , et dans la figure 4 la constellation obtenue pour  $q=3$ , pour un motif de base de forme MAQ, les points du motif de base étant représentatifs des partitions définies par le codeur convolutif. Dans la suite nous limiterons la discussion à la grille particulière  $Z^2$  qui permet de générer habituellement les modulations à très grand nombre d'états.

Il est possible de générer une modulation différente, utilisant le même codeur convolutif, ayant donc la même distance libre, selon la définition donnée au paragraphe précédent, uniquement en modifiant la "surface" englobant les  $2^{n+q}$  points représentatifs de la modulation, figures 3 et 4.

Sous des conditions de minimisation de la puissance moyenne, il est logique de prendre, pour une grille donnée, les

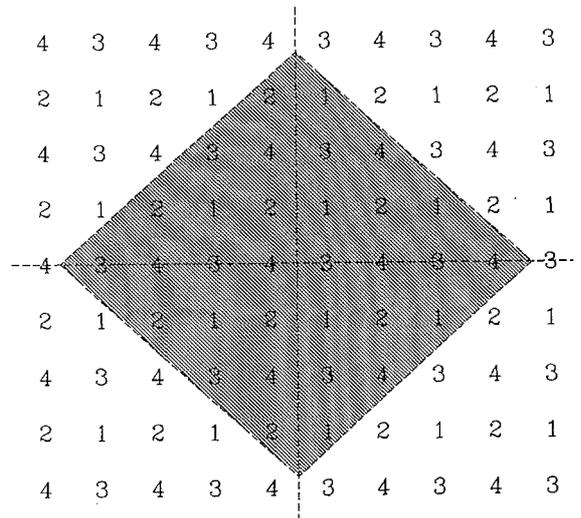


Figure 3- Modulation MAQ32 de rendement 4/5 (code de base 1/2)

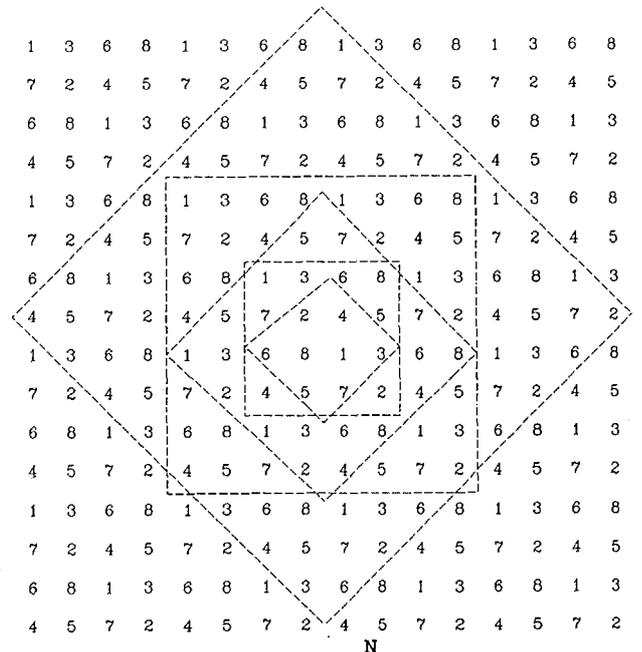


Figure 4- La famille MAQ2 de rendement  $N-1/N$  (code de base 2/3)



$2^{n+q}$  points plus proches de l'origine, ce qui débouche vers des constellations inscrites dans des cercles centrés.

## II Les modulations MAQ2<sup>N</sup> de rendement (N-1)/N

La modulation de référence, permettant une comparaison de toutes les modulations codées, est la modulation MDP4, dont la probabilité d'erreur, dans le cas transmission idéale, est donnée par:

$$P(E) = Q(d_0/\sigma) \text{ ou } P(E) = Q(\sqrt{2E_b/N_0}) \text{ avec,}$$

- .  $d_0$ , distance minimale,
- .  $\sigma^2 = N_0/2T_b$ , puissance du bruit reçu,
- .  $P = E_b/T_b = d_0^2/4$ , puissance moyenne émise,
- .  $1/T_b$ , débit binaire transmis.

Pour une modulation MAQ2<sup>N</sup> de rendement (N-1)/N, la probabilité d'erreur asymptotique est donnée par:

$$P(E) = \lambda Q(d_{\min}/\sigma) = \lambda Q(\sqrt{2E_b/N_0}) \text{ avec,}$$

- .  $\sigma^2 = N_0/(N-1)T_b$ , puissance du bruit reçu,
- .  $d_{\min} = \min(d_i, g_p d_0)$  où,
  - .  $d_i$  est la distance libre du code convolutif pour les  $2^q$  points représentatifs des partitions (motif de base),
  - .  $g_p d_0$  est la distance minimale "interne" d'une partition,

$\lambda$  est un facteur multiplicatif fonction du nombre de bits faux dans le message transmis correspondant au chemin erroné de distance  $d_{\min}$

.  $E_b = PT_b$ , où P est fonction de la modulation utilisée.

Nous supposons que les modulations MAQ2<sup>N</sup> sont définies à partir de la grille infinie  $Z^2$ , de distance minimale  $d_0$ , et sont inscrites dans des carrés centrés, figure 4. Elles peuvent également être définies pour la constellation de la figure 3 ( $q=2$ ).

### II-1 Code convolutif de base de rendement 1/2

Conformément à l'expression de la probabilité d'erreur d'une modulation codée de rendement (N-1)/N, nous étudions les gains asymptotiques, déterminés par l'utilisation d'un codeur de rendement 1/2, par rapport à la modulation de référence MDP4 et par rapport à la modulation non codée équivalente.

Les performances, en terme de distance minimale  $d_{\min}$ , ne dépendent que du degré de partitionnement, fixé dans ce cas à quatre sous-ensembles, et de la distance libre du code associé au motif de base, ceci indépendamment du nombre d'états de la modulation choisie. Par construction, la distance interne aux sous-ensembles  $S_i$ , correspondant aux branches multiples du codeur, est donnée par  $2d_0$  pour un motif de base MDP4, (figure 3). Ainsi, quel que soit le nombre d'états de la modulation, la distance  $d_{\min}$  est bornée par  $2d_0$ .

Le tableau 1 donne les distances libres du codeur de rendement 1/2 associé au motif de base MDP4 selon la complexité du treillis en terme de gain de codage. On constate

Tableau 1 - Gain  $g_c$  des codes de base (en dB)

Nombre d'états	4	8	16	32	64	128
codeur 1/2	7	7.8	8.4	9	10	10
codeur 2/3	6	7	7.8	7.8	8.5	9.1

Tableau 2 - Performances des modulations à codage convolutif  
Code de base : 1/2  
Protection de branches ( $P_b$ ) : 6 dB

Modulation Rendement	MDP4 1/2	MAQ8 2/3	MAQ16 3/4	MAQ32 4/5	MAQ64 5/6	MAQ128 6/7	MAQ256 7/8	MAQ512 8/9
Bande occupée % MDP4 (gain en dB)	2 (-3)	1 (0)	2/3 (1.8)	1/2 (3)	2/5 (4)	1/3 (4.8)	2/7 (5.5)	1/4 (6)
Gain asymptotique % MDP4 en dB (*)	3	2	0.8	-1.2	-3.2	-5.5	-7.8	-10.3
Gain asymptotique % modulation non codée équivalente en dB (**)		2	3	2.8	3	2.9	3	3

(\*)  $G = G_c - P_p + G_b$  avec  $G_c = \min(P_b, g_c)$ ,  
 $P_p$ : augmentation de puissance % MDP4  
 $G_b$ : gain de bande de fréquence occupée % MDP4

(\*\*)  $G = G_c - P_p$  avec  $G_c = \min(P_b, g_c)$ ,  
 $P_p$ : augmentation de puissance % modulation non codée MAQ2<sup>n-1</sup> équivalente.

modulation Rendement	MAQ8 2/3	MAQ16 3/4	MAQ32 4/5	MAQ64 5/6	MAQ128 6/7	MAQ256 7/8	MAQ512 8/9
Bande occupée % MDP4 (gain en dB)	1 (0)	2/3 (1.8)	1/2 (3)	2/5 (4)	1/3 (4.8)	2/7 (5.5)	1/4 (6)
Gain asymptotique % MDP4 (en dB)	$G_c - 4$	$G_c - 5.2$	$G_c - 7.2$	$G_c - 9.2$	$G_c - 11.5$	$G_c - 13.8$	$G_c - 16.3$
Gain asymptotique % modulation équivalente non codée (en dB)	$G_c - 4$	$G_c - 3$	$G_c - 3.2$	$G_c - 3$	$G_c - 3.1$	$G_c - 3$	$G_c - 3$

Tableau 3 - Performances des modulations à codage convolutif  
Code de base : 2/3  
Protection de branches ( $P_b$ ) : 9 dB



que pour un nombre de noeuds du treillis supérieur ou égal à quatre, la distance  $d_{\min}$  est égale à la distance interne minimale des sous-ensembles  $S_i$ .

Seule la modulation à code en treillis à quatre noeuds est envisageable, le treillis à deux noeuds n'apportant qu'un gain faible et les treillis à nombre de noeuds supérieur donnant le même gain. Le tableau 2 donne les gains asymptotiques de puissance et le gain en bande occupée, pour les modulations de la famille considérée par rapport à la modulation MDP4 transmettant le même débit. Il donne également le gain de puissance par rapport à la modulation non codée  $MAQ2^{N-1}$ , transmettant le même débit dans la même bande.

### II-2 Code convolutif de base de rendement 2/3

En étudiant la méthode d'expansion d'un motif de base MAQ8 sur la grille infinie  $Z^2$ , on remarque que la distance interne aux sous-ensembles  $S_i$  s'accroît de 3dB par rapport au motif de base MDP4, figure 4.

Le tableau 1 donne les gains en distance libre du code de rendement 2/3 en fonction du nombre de noeuds du treillis. La probabilité d'erreur de la modulation  $MAQ2^N$  de rendement  $(N-1)/N$  étant fonction de la distance  $d_{\min}$  calculée à partir de la distance minimale interne des sous-ensembles et de la distance libre du code de base, on en déduit les gains asymptotiques résumés dans le tableau 3.

L'utilisation d'un motif de base de plus de huit états, motivée par la croissance de la protection de branches en fonction de la cardinalité du motif de base, suppose un gain  $g_c$  des codes de base de rendement 3/4 ou plus supérieur à la distance minimum  $d_{\min}$  des modulations codées définies à partir du motif de base MAQ8, résultat non connu actuellement ne pouvant être vraisemblablement obtenu que pour un nombre de noeuds relativement important.

Au vu des résultats ainsi décrits, en limitant notre étude aux codes de complexité inférieure à 128 noeuds, le choix optimal de codage pour une modulation  $MAQ2^N$  est la structure à code 2/3, ceci indépendamment du nombre d'états de la modulation, pour un nombre de noeuds supérieur ou égal à quatre.

### III Le décodage

Le récepteur est constitué d'une partie démodulateur et d'une partie "décodeur" traitant les échantillons analogiques fournis par le démodulateur.

La transmission de la modulation  $MAQ2^N$  de rendement  $(N-1)/N$  est supposée idéale :

Les symboles sont émis au rythme  $1/T = (1/T_b) * 1/(N-1)$ ,

Le démodulateur fournit au décodeur des échantillons  $\{r_k\}$  au rythme  $1/T$ ,

Ces échantillons sont de la forme  $r_k = s_k + b_k$ , où  $s_k$  est le symbole émis et où les  $b_k$  représentent les échantillons de bruits gaussiens indépendants, de variance  $\sigma^2 = N_0 / (N-1) T_b$ .

Le "décodeur" fonctionnant suivant l'algorithme de Viterbi, recherche dans le treillis le chemin le plus proche du signal  $\{r_k\}$  reçu, au sens de la distance euclidienne.

Le décodeur à maximum de vraisemblance, suivant l'algorithme de Viterbi, doit choisir pour chaque noeud du treillis et à un instant donné quel est son antécédent le plus vraisemblable.

Du fait de l'existence de branches multiples, on constate que le fonctionnement peut se dérouler de la façon suivante:

i) le démodulateur fournit l'échantillon  $\{r_k\}$  sous forme de deux mots de  $m$  bits (composantes quantifiées),

ii) un circuit, qualifié de préprocesseur, fournit ensuite, pour chaque ensemble  $S_i$ , ( $i=1, 2^q$ ), un mot de  $n$  bits résultant du choix du symbole appartenant à  $S_i$  le plus proche de  $r_k$ , ainsi que la distance associée, (ou métrique élémentaire).

iii) à l'aide de ces distances, le décodeur décide pour chaque état de son antécédent le plus vraisemblable en comparant les métriques de noeuds,

iv) pour chaque état du treillis, le décodeur actualise la métrique ainsi que la mémoire de chemin, en incorporant  $p+n$  bits, les  $p$  premiers résultant du choix de l'état antécédent, les  $n$  autres étant ceux qui furent associés à la branche antécédente au cours de l'étape ii).

La figure 5 représente le schéma du "décodeur" à préprocesseur ainsi défini. Une façon simple de réaliser le préprocesseur est d'écrire dans une mémoire toutes les valuations associées aux  $2^{2m}$  valeurs possibles de  $r_k$  quantifié.

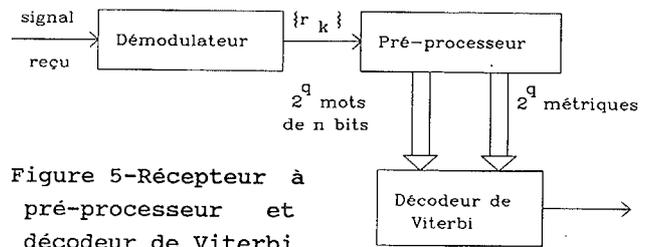


Figure 5—Récepteur à pré-processeur et décodeur de Viterbi

Conformément aux résultats énoncés dans les paragraphes précédents, on s'aperçoit que la modification de  $n$  permet une gamme de rendement variable (tableaux 2 et 3). Pour cela il suffit, ayant dimensionné le circuit pour la valeur de  $n$  la plus grande, de ne prendre à chaque instant que les  $n+p$  premiers bits qui seuls sont significatifs, le fonctionnement du décodeur n'étant pas modifié.

### Conclusion

La méthode d'expansion, illustrée dans le cas des modulations  $MAQ2^N$  de rendement  $(N-1)/N$ , s'avère efficace dans la synthèse des modulations à codage en treillis à grand nombre d'états. Dans le cas des modulations à deux dimensions, le code convolutif de base optimal est un code 2/3 appliqué à la modulation MAQ8. Le décodeur de Viterbi associé peut être utilisé pour des modulations de rendement quelconque à la condition de lui adjoindre un circuit préprocesseur.

L'utilisation de cette approche pour le cas de modulations multidimensionnelles doit être fructueuse, et doit s'appuyer sur la recherche des meilleurs motifs de base dans des espaces à  $M$  dimensions.

### Références :

- /1/ G. Ungerboeck : "Channel coding with multilevel/phase signals", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-28, pp.55-67, January 1982.
- /2/ N.Kobayashi et al. : "Simplified Viterbi decoding for high-speed data modem", ICC 1987, pp 12.7.1-12.7.7.
- /3/ H.K. Thapar : "Real-time application of trellis coding to high-speed voiceband data transmission", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. SAC-2, n°5, pp. 648-658, September 1984.
- /4/ B.E. Collins et al. : "Application of coded modulation to 1,544 Mbit/s data-in-voice modems for FDM FM and SSB analog radion systems", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol SAC-5, n°3, pp. 369-377, April 1987.
- /5/ L.F Wei : "Trellis-coded modulation with multidimensional constellations", IEEE Trans. on Information Theory, vol IT-33, n°4, pp. 483-501, July 1987.
- /6/ E. Biglieri et M. Elia : "Multidimensional modulation and coding for band-limited digital channel", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-34, n°4, pp 803-809, July 1988.
- /7/ S.G.Wilson : "Rate 5/6 trellis coded 8PSK", IEEE Trans. on Communication, vol. COM-34, n°10, octobre 1986.
- /8/ A.R. Calderbank et N.J.A. Sloane : "New trellis codes based on lattices and cosets", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-33, pp.177-195, March 1987.
- /9/ L.R. Bahl et al. : "An efficient algorithm for computing free distance", IEEE Trans. on Information Theory, pp. 437-439, May 1972.
- /10/ M. Rouanne : "Distance bounds and construction algorithms for trellis codes", Thèse, Université de Notre Dame, Indiana, April 1988.