

LOUPE PAR FILTRAGE FREQUENTIEL

GARNIER M. ZARADER J.L

Service d'Aéronomie Université Paris 6

RESUME

Nous présentons dans cet article une nouvelle méthode d'accroissement de la résolution spectrale en temps réel, appelée Loupe par Filtrage Fréquentiel (LFF). L'utilisation de la TFD permet d'effectuer les opérations de filtrage et de translation de la bande de fréquence étudiée en bande de base dans le domaine fréquentiel. Ainsi, contrairement au zoom à démodulation complexe (ZFFT), cette technique permet de conserver l'information liée à la puissance et à la phase du signal.

SUMMARY

In this paper, we study a new real time method of spectral resolution increase, called frequency filtering zoom (LFF). The DFT's use allow to execute the operations of frequency filtering and translation in base-band in the frequency domain. So, contrary to the complex demodulation zoom (ZFFT), this technic allow to save the informations corresponding to the signal power and phase.



1) INTRODUCTION

Outil puissant d'analyse spectrale, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) est utilisée dans un grand nombre de domaines scientifiques (géophysique, acoustique, ...). Le spectre, calculé à partir du signal défini sur A points, acquis durant un temps T et échantillonné à une fréquence F_e , est restitué sur A points. Le pas en fréquence Δf_A est donné par :

$$\Delta f_A = \frac{1}{T} = \frac{1}{AT_e} = \frac{F_e}{A}$$

Cependant, il faut disposer pour certaines applications, où F_e est limitée par la relation de Shannon et A par la puissance du calculateur, d'une résolution plus fine. L'opération qui consiste à diminuer le pas Δf_A sans modifier les paramètres T_e et A est communément appelée zoom ou loupe spectrale. Basée sur le principe de l'accroissement de la durée d'observation du signal (T), nous avons développé une Loupe par Filtrage Fréquentiel (LFF). Outre sa capacité à rejeter efficacement les fréquences hors-bande le zoom LFF a la particularité de n'introduire aucun déphasage après traitement. On pourra ainsi exploiter le spectre de puissance mais aussi le spectre de phase.

2) LOUPE PAR FILTRAGE FREQUENTIEL

Nous nous sommes inspirés, pour mettre au point la loupe par filtrage fréquentiel (LFF), de la méthode classique de démodulation complexe (ZFFT) en s'intéressant, plus particulièrement, à la technique de filtrage utilisée.

2.1) Loupe à démodulation complexe

Notée ZFFT, la loupe à démodulation complexe [1] est une application de la propriété de translation de la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow X(f) \\ x(t) \exp(2\pi j f_1 t) &\longrightarrow X(f - f_1) \end{aligned}$$

La réalisation de cette loupe tient en trois points. Le signal $x(k)$, obtenu après échantillonnage du signal $x(t)$ à une période T_e , est multiplié par $\exp(2\pi j S k/A)$ où S/AT_e est la fréquence origine de la loupe. Ensuite, le signal complexe $x_c(k)$ est filtré par un passe-bas de largeur B/AT_e . Pour finir le signal de sortie du filtre $x_f(k)$ est sous échantillonné avec une période T'_e donnée par la relation :

$$T'_e = AT_e/2B$$

ce qui revient à prélever un point tous les $A/2B$ points du signal $x_f(k)$. On peut alors procéder à l'analyse spectrale du signal sous-échantillonné $x_{sec}(k)$.

Une telle loupe suppose un filtrage efficace

(taux d'ondulation faible dans la bande passante et bande de transition étroite). D'autre part, ces filtres étant, le plus souvent à déphasage linéaire (Butterworth, Chebychev, ...), on perd l'information liée à la phase du signal. La simplicité de réalisation en fait son principal intérêt.

Bien que les caractéristiques des loupes LFF et ZFFT soient comparables, la technique que nous avons mise au point est totalement différente et présente l'avantage de conserver l'information liée à la phase du signal traité.

Nous nous sommes imposés le cahier des charges suivant :

- acquisition et traitement en ligne de blocs de A points.
- reconstruction du signal filtré dont les composantes proviennent du zoom sur la bande de largeur B/AT_e Hz et d'origine S/AT_e Hz.
- taux d'ondulation faible et bande de transition étroite.
- déphasage quasi-nul dans la bande passante.

2.2) Principe

Pour réaliser la loupe par filtrage fréquentiel nous avons, dans un premier temps, décomposé la suite $x(k)$ en blocs de A points, notés $x_i(l)$ ($l \in [0, A-1]$), puis nous avons multiplié le spectre $X_i(n)$ du bloc $x_i(l)$ par le filtre $F(n)$, qui vaut 1 si n est compris entre S et $S+B$ et 0 ailleurs :

$$X_{fi}(n) = X_i(n) F(n)$$

L'étape suivante consiste à traduire $X_{fi}(n)$ pour ramener la bande $[S, S+B]$ à l'origine, en respectant les propriétés spectrales des signaux réels. Le spectre $Y_i(p)$ obtenu après translation est défini sur $2B$ points par :

$$\begin{aligned} Y_i(0) &= \text{Re}\{ X_{fi}(S) \} \\ Y_i(B) &= \text{Re}\{ X_{fi}(S+B) \} \\ Y_i(p) &= X_{fi}(S+p) \quad \text{avec } p \in [1, B-1] \\ Y_i(p) &= Y_i^*(2B-p) = X_{fi}^*(A-S-2B+p) \quad \text{avec } p \in [B+1, 2B-1] \end{aligned}$$

En calculant la transformée de Fourier discrète inverse de $Y_i(p)$ on obtient le signal $y_i(r)$, défini lui-aussi sur $2B$ points. $y_i(r)$ est alors juxtaposé à $y_{i-1}(r)$, qui est issu du traitement du bloc précédent, $x_{i-1}(l)$. On procède ainsi jusqu'à obtention d'un bloc de A points, noté $y(l)$. On peut alors calculer la transformée de Fourier discrète $Y(v)$ du signal $y(l)$. Le facteur de loupe C , qui correspond aussi au nombre de blocs nécessaires à la reconstruction du signal $y(l)$, est donné par :

$$C = \frac{A}{2B}$$

Nous avons représenté sur la figure 1.a le signal de sortie $y(l)$ lorsque l'entrée est une sinusoïde $x(k)$ définie par :

$$x(k) = G_0 \cos(2\pi f_0 k T_e + \varphi)$$

avec : $G_o = 1 \text{ V}$, $f_o = 11.5 \text{ Hz}$ et $\varphi = \pi/4 \text{ Rd}$.
 $T_e = 1/256 \text{ s}$, $A=256$, $B=16$, $S=10$ d'où $\Delta f_A = 1 \text{ Hz}$ et $C=8$.

Le temps total nécessaire à la reconstruction du signal filtré est $T = AT_e * C$ soit 8 secondes. Le nombre total de points traités est $D = A * C$ soit 2048 points et la résolution finale Δf_p est de 1/8 Hz.

On constate que le signal présente de fortes discontinuités, dues essentiellement à la juxtaposition des blocs $y_i(\tau)$. Au niveau spectral (figure 1.b), ces discontinuités introduisent des raies parasites indésirables. On note cependant que la composante fondamentale à 11,5 Hz est déjà prédominante.

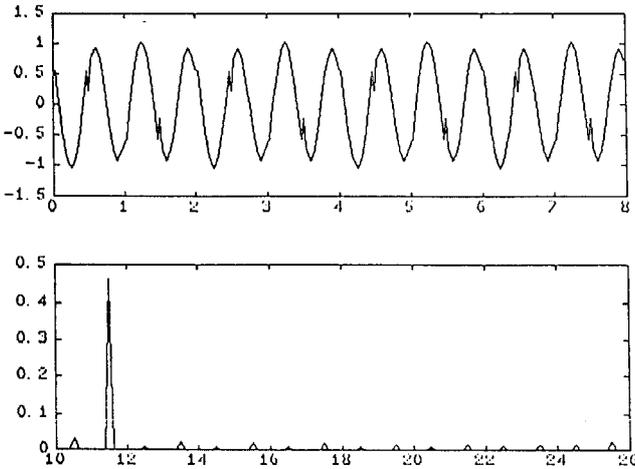


Figure 1 a) Réponse $y(t)$ au signal $x(k)$.
 b) Spectre d'amplitude $|Y(n)|$.

L'importance des taux d'ondulations dans la bande passante ($d_1 = -9 \text{ dB}$) et dans la bande affaiblie ($d_2 = -10 \text{ dB}$), observés sur le gain en puissance (figure 2), tend à confirmer que ce type de traitement est peu efficace. Pour améliorer la reconstruction de $y(t)$, nous avons repris les points importants de cet algorithme (pondération, filtrage, translation) en y apportant de nouvelles solutions.

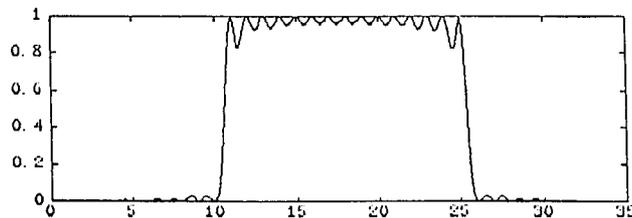


Figure 2 Gain en puissance de la loupe représenté entre les fréquences 0 et 32 Hz

2.3) Choix de la fenêtre de pondération, technique de dépondération et effet de la translation

Le signal en sortie de loupe étant formé à partir des transformées de Fourier $X_i(n)$, il faut, dans un premier temps, choisir une fenêtre de troncature plus performante que la fenêtre naturelle. En utilisant la fenêtre de Hanning $h_N(t)$, définie par :

$$h_N(t) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi t/A)$$

on améliore l'estimation du spectre des blocs $x_i(t)$ mais le signal $y_{N1}(t)$ obtenu après traitement est pondéré par tranches de $2B$ points (figure 3.a). Pour effectuer la dépondération nous avons recommencé le traitement sur les blocs $x_i^t(t')$ ($t' \in [0, A-1]$), qui sont constitués de la seconde moitié du bloc $x_i(t)$ suivie de la première moitié du bloc $x_{i+1}(t)$.

$$\begin{cases} x_i^t(t') = x_i(t'+A/2) & \text{si } t' \in [0, A/2-1] \\ x_i^t(t') = x_{i+1}(t'-A/2) & \text{si } t' \in [A/2, A-1] \end{cases}$$

On constate alors, sur la figure 3, qu'un point $x_i(t)$ quelconque est multiplié, lors du premier traitement, par $h_N(t)$ et, dans le second traitement par $h_N(t+A/2)$.

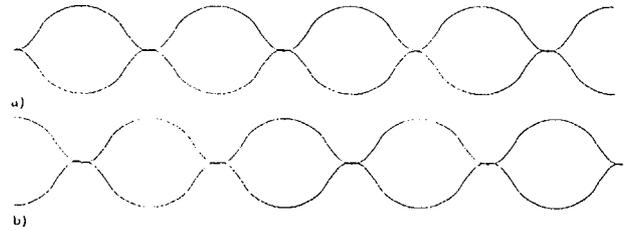


Figure 3 a) Résultat du premier traitement $y_{N1}(t)$
 b) Résultat du second traitement $y_{N2}(t)$

Si, de plus, on tient compte de l'opération de translation, le produit de $x_i(t)$ par $h_N(t)$ devient :

$$x_i(t) h_N(t) \longrightarrow x_i^t(t') h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A)$$

De même :

$$x_i^t(t') h_N(t') \longrightarrow x_i^t(t') h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A)$$

Pour $t' \in [0, A/2-1]$, on trouve :

$$\begin{aligned} x_i^t(t') h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A) &= \\ x_i(t'+A/2) h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A) & \end{aligned}$$

En posant $t = t'+A/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_i(t'+A/2) h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A) &= \\ (-1)^S x_i(t) (1+\cos(2\pi t/A)) \exp(2\pi j t S/A)/2 & \end{aligned}$$

En effectuant la somme des deux traitements, on a :
 $x_i(t) h_N(t) \exp(2\pi j t S/A) + x_i(t'+A/2) h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A)$
 soit encore :

$$\begin{aligned} x_i(t) [(1-\cos(2\pi t/A)) + \\ (-1)^S (1+\cos(2\pi t/A))] \exp(2\pi j t S/A)/2 \end{aligned}$$

Le résultat attendu, à savoir $x_i(t) \exp(2\pi j t S/A)$, est obtenu pour les valeurs paires de S . Pour éliminer le terme $\cos(2\pi t/A)$ apparaissant pour les valeurs impaires de S nous avons décidé de multiplier systématiquement $x_i^t(t')$ par $(-1)^S$. Ainsi la somme :

$$\begin{aligned} x_i(t) h_N(t) \exp(2\pi j t S/A) + \\ (-1)^S x_i^t(t') h_N(t') \exp(2\pi j t' S/A) \end{aligned}$$

est égale à :

$$\begin{aligned} x_i(t) [(1 - \cos(2\pi t/A)) + \\ (-1)^{2S} (1 + \cos(2\pi t/A))] \exp(2\pi j t S/A)/2 \end{aligned}$$

où encore :

$$x_i(t) \exp(2\pi j t S/A)$$

Note Le raisonnement qui vient d'être effectué pour des valeurs de t' comprises entre 0 et $A/2-1$, peut être mené de façon identique pour $t' \in [A/2, A-1]$



Le traitement des blocs $x_i^t(l')$ est représenté sur la figure 4.

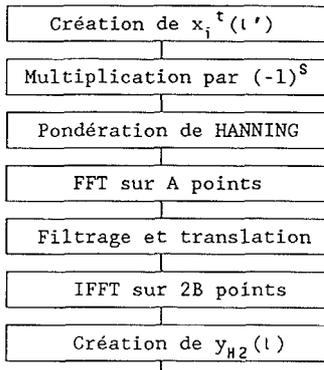


Figure 4 Traitement des blocs $x_i^t(l')$

2.4) Diminution des effets de bord de bande

Nous pouvons déjà apprécier, en comparant les figures 1 et 5, l'amélioration apportée dans la reconstruction du signal de sortie et par conséquent dans l'estimation du spectre. On constate cependant, la persistance de raies parasites dont l'amplitude décroît lorsque la fréquence f_0 s'éloigne des bords de la loupe. Ainsi, les composantes hors-bande appartenant aux intervalles $[S\Delta f_A, (S-1)\Delta f_A]$ et $[(S+B)\Delta f_A, (S+B+1)\Delta f_A]$ ne sont que faiblement atténuées. Nous avons décidé, pour diminuer l'influence de ces raies, d'intervenir les étapes filtrage-translation et pondération de Hanning. En effet, la relation liant le spectre $S(n)$ d'un signal quelconque $s(k)$ défini sur A points et non-pondéré, et le spectre $S_H(n)$ du même signal pondéré par Hanning est :

$$S_H(n) = \frac{1}{2} S(n) - \frac{1}{4} S(n-1) - \frac{1}{4} S(n+1)$$

avec, en particulier, pour les raies 0 et A/2 :

$$S_H(0) = \frac{1}{2} \text{Re} (S(0) - S(1))$$

$$S_H(A/2) = \frac{1}{2} \text{Re} (S(A/2) - S(A/2-1))$$

Dans notre cas, après avoir appliqué la fonction de pondération sur $x_i(l)$ et opéré le filtrage et la translation, le spectre $Y_i(n)$ obtenu vérifie les relations :

$$Y_i(0) = \frac{1}{2} \text{Re} (X_i(S) - \frac{1}{2} X_i(S-1) - \frac{1}{2} X_i(S+1))$$

$$Y_i(B) = \frac{1}{2} \text{Re} (X_i(S+B) - \frac{1}{2} X_i(S+B-1) - \frac{1}{2} X_i(S+B+1))$$

Par contre, si on inverse les étapes filtrage-translation et pondération de Hanning, on trouve, pour $Y_i(0)$ et $Y_i(B)$:

$$Y_i(0) = \frac{1}{2} \text{Re} (X_i(S) - X_i(S+1))$$

$$Y_i(B) = \frac{1}{2} \text{Re} (X_i(S+B) - X_i(S+B-1))$$

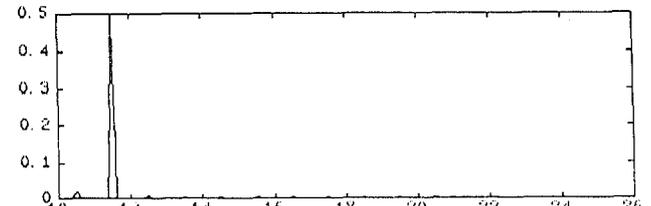
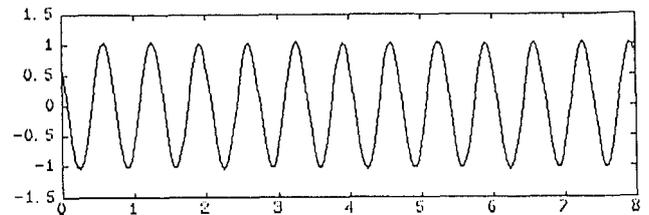


Figure 5 a) Réponse $y(l)$ au signal $x(k)$ ($=\cos(2*\pi*f_0*k*T_e+\pi/4)$) pour $f_0 = 11,5$ Hz, $T_e = 1/256$ s, $A = 256$, $B = 16$ et $S = 10$.

b) Spectre d'amplitude $|Y(n)|$

Nous avons ainsi éliminé la contribution due aux raies $X_i(S-1)$ et $X_i(S+B+1)$. Le résultat obtenu après inversion, représenté sur la figure 6, montre la disparition des raies parasites.

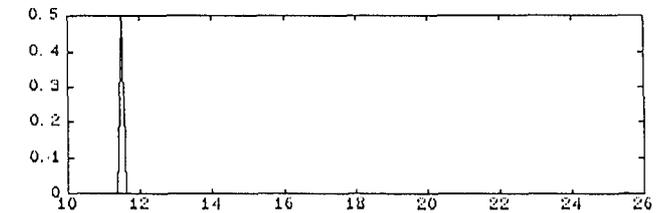
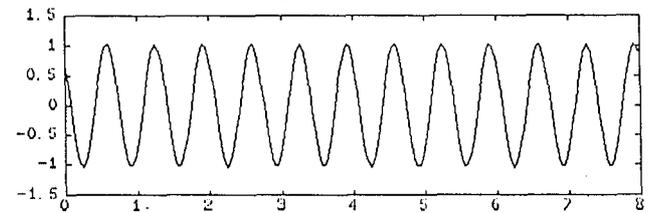


Figure 6 a) Réponse $y(l)$ au signal $x(k)$ ($=\cos(2*\pi*f_0*k*T_e+\pi/4)$) pour $f_0 = 11,5$ Hz, $T_e = 1/256$ s, $A = 256$, $B = 16$ et $S = 10$.

b) Spectre d'amplitude $|Y(n)|$

2.5) Choix du filtre fréquentiel

Nous nous sommes intéressés pour finir à l'opération de filtrage et, plus particulièrement, au traitement des raies en bord de bande, $X_i(S)$ et $X_i(S+B)$. Nous avons reproduit sur la figure 7 le recouvrement spectral dû à la translation. Les taux d'ondulation correspondant sont de -13 dB dans la bande et de -29 dB hors bande. La bande de transition B_T est donnée par :

$$B_T = S \Delta f_A - (S-1) \Delta f_A = \Delta f_A$$

En modifiant les coefficients proches des bords de bandes de la façon suivante :

$$F(S) = F(S+B) = 0.5$$

$$F(S+1) = F(S+B-1) = 0.6$$

$$F(S+2) = F(S+B-2) = 0.8$$

on augmente la bande de transition ($B_T = [(S+3)-(S-1)] \Delta f_A = 4\Delta f_A$) mais on diminue les taux

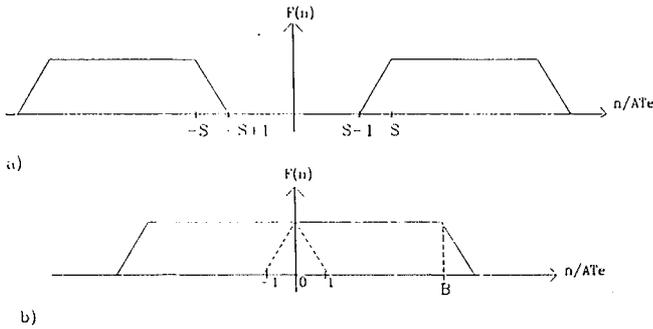


Figure 7 a) Filtre F(n)

b) Recouvrement spectral après translation d'ondulations dans la bande passante ($d_1 = -17$ dB) et dans la bande affaiblie ($d_2 = -34$ dB).

L'algorithme définitif est décrit sur la figure 8.

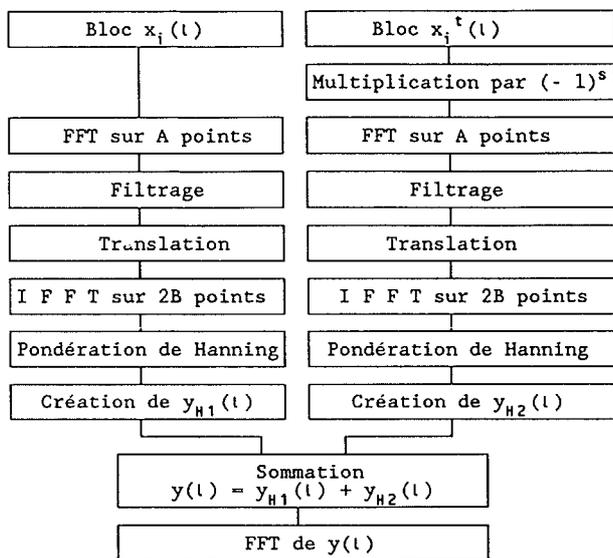


Figure 8 Loupe par filtrage fréquentiel

2.6) Déphasage

L'expression du spectre de sortie Y(v) [2] est donnée par :

$$Y(v) = \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{l=0}^{A/2-1} x(iA+l) W_C^{-vi} \left[I(v,l) + (-1)^S W_{2C}^{+v} I(v, l + \frac{A}{2}) \right] + \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{l=A/2}^{A-1} x(iA+l) W_C^{-vi} \left[I(v,l) + (-1)^S W_{2C}^{-v} I(v, l - \frac{A}{2}) \right]$$

Avec :

$$I(v,l) = \sum_{r=0}^{2B-1} J(l,r) W_A^{-vr}$$

et :

$$J(l,r) = (1 - \cos(\pi r/B)) / 4B \left[F(S) \cos(2\pi l S/A) + \sum_{u=1}^{B-1} F(S+u) \cos(2\pi l(S+u)/A + \pi r) + \sum_{u=1}^{B-1} 2F(S+u) \cos(-2\pi l(S+u)/A + \pi r u/B) \right]$$

F(n) = coefficient du filtre au canal n

Nous avons représenté (figure 9), à partir de l'expression du spectre Y(v), le déphasage de la loupe. On constate que, quelque soit le type de filtre F(n) utilisé, le déphasage des composantes

comprises entre $(S+1)\Delta f_A$ et $(S+B-1)\Delta f_A$, reste inférieur à 10^{-5} radians.

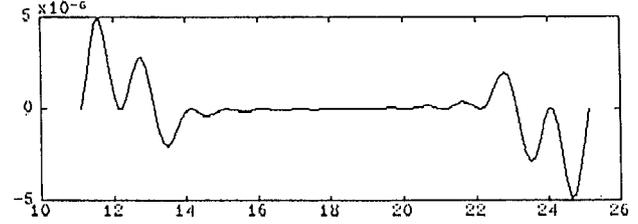


Figure 9 Déphasage phi(f) avec $T_e = 1/256$ s, $A=256$, $B=16$, $S=10$.

3) APPLICATIONS

Mise en oeuvre sur l'ordinateur IN1200 d'IN2 la loupe LFF permet le dépouillement de données physiques en temps réel. La principale limitation au fonctionnement de l'algorithme, est due au temps de calcul de la FFT (20 ms pour 1024 points). A chaque acquisition d'un bloc de A points, un spectre Y(v) est restitué. Nous avons représenté sur la figure 10 l'évolution temps-fréquence d'un signal de parole. Acquis à une fréquence de 16 KHz sur des blocs de 256 points, la loupe porte sur les fréquences comprises entre 0 et 1 KHz ($B=16, S=0$). La résolution, augmentée d'un facteur 8, passe de 62,5 Hz à 7,8 Hz. Cette étude a permis de mettre en évidence une fréquence fondamentale à 101,5 Hz dans la première partie du mot et une composante à 390 Hz dans la deuxième partie du mot.

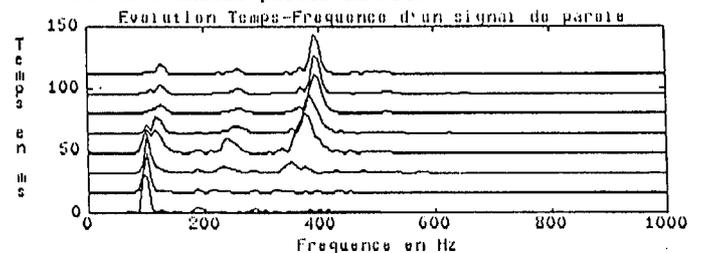


Figure 10 Evolution temps-fréquence d'un signal de parole. Spectre calculé toutes les 16 ms et défini sur 256 points avec une résolution de 7,8 Hz.

En conclusion, la loupe par filtrage fréquentiel fournit un moyen simple et efficace d'affiner la résolution spectrale. La possibilité d'effectuer un traitement en temps réel est un atout important. Enfin, la loupe LFF sera particulièrement utile dans les expériences nécessitant une connaissance précise de la phase car, contrairement au zoom à démodulation complexe, elle n'introduit aucun déphasage.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hoyer E.A., Stork R.F. : "ZFFT using complex demodulation" ICASSP, pp 78-81, New-York 1977.
 [2] Zarader J.L. : "Conception et réalisation d'une loupe par filtrage fréquentiel et d'un transformateur de Fourier rapide" Thèse de Doctorat de l'Université P.M Curie, Paris, Décembre 1988.

