

## Estimation de la matrice spectrale de signaux certains: Application à la séparation d'ondes en sismique

F. Glangeaud \*, J.L. Mari \*\*  
et J.L. Lacoume \*

\* CEPHAG, INPG/IEG, URA 346 CNRS, BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex

\*\*I.F.P. Institut Français du Pétrole, BP 311, 92506 Reuil-Malmaison

### RÉSUMÉ

La séparation d'ondes en sismique à partir de la matrice spectrale peut se simplifier dans certaines conditions que nous détaillons dans cet article. Après avoir précisé la spécificité des signaux sismiques lors de l'estimation de la matrice, et de la définition d'une source, nous montrons les limites de séparation sur des signaux synthétiques. Sur des exemples réels, nous montrons qu'il est possible en PSV (profil sismique vertical) [Mari et Coppens] d'extraire et de séparer des ondes montantes, descendantes et de conversion.

#### Les signaux sismiques

Les principaux outils de filtrage des données sismiques couramment utilisés sont les filtres en fréquence et les filtres en vitesse apparente. Ces outils permettent de sélectionner ou de rejeter les événements en fonction de critères simples (fréquence ou vitesse) facilement accessibles. Ces outils sont très performants et dans bon nombre de cas fournissent des résultats très satisfaisants. Il existe cependant un certain nombre de cas où ils sont nettement moins performants, notamment lorsque signal et bruit ont des vitesses apparentes proches et/ou des fréquences communes. On a alors recours à d'autres techniques fondées sur la décomposition de matrices spectrales. En sismique, l'utilisation de la matrice de covariance conduit aux techniques de décomposition en valeurs principales [Freire and Ulrych; 1988] ou de Karhunen-Loève [Hémon and Mace; 1978] et [C.Cliet, M. Dubesset, O. Michaud]. D'autres méthodes ont aussi été proposées par H. William et al [1984]. Les méthodes fondées sur l'utilisation de la matrice spectrale ont été introduites par Mermoz [1976] et appliquées en sismique par Lacoume et Glangeaud [1985] pour l'amélioration du rapport signal sur bruit et Mars et al [1989] pour la séparation des ondes.

Le sondage du sous-sol à partir de signaux sismiques est basé sur l'identification de réflecteurs. En milieu stratifié homogène des modèles simples permettent de détecter et d'estimer les discontinuités acoustiques du sous-sol. Dans le cas d'un milieu plus complexe, il est difficile de disposer de modèles réalistes. Nous étudions ici dans quelles conditions les ondes peuvent s'identifier aux projections sur les vecteurs propres de la matrice spectrale. Nous montrons aussi pourquoi en sismique la matrice spectrale n'est qu'approximée et quelles en sont les conséquences sur l'estimation des ondes. Nous précisons aussi la relation entre le terme "source" utilisé en traitement du signal et les ondes ou événements sismiques.

Les signaux sismiques  $\underline{X}(v)$  peuvent se schématiser dans le domaine de fréquences  $v$  comme composés d'ondes :

$$\underline{W}_i(v) = A_i(v) \underline{U}_i(v)$$

où  $A_i(v)$  est l'ondelette indépendante du capteur associée à l'onde  $i$  et  $\underline{U}_i(v)$  est le vecteur normalisé caractérisant la surface d'onde  $i$ .

En sismique, le premier objectif est de détecter des arrivées d'onde et de les dissocier. Une onde sur une antenne sismique est caractérisée par une certaine continuité ou stationnarité dans le plan temps-distance. Ceci peut se caractériser par une stationnarité des temps d'arrivée, des phases, des amplitudes et de la répartition spectrale. Après déconvolution une arrivée sismique est voisine d'un dirac. Ainsi il y a donc aussi stationnarité en fonction de la fréquence.

Deux ondes sismiques seront dissociées dans le domaine temps distance si les "ondelettes" qui leur sont associés peuvent être séparés. Cette notion d'onde sismique et de distance entre ondes ne s'identifie pas toujours avec la terminologie de source et de produit scalaire (dans le domaine des fréquences). Dans cette communication nous montrons comment séparer des ondes en sismique.

Soit  $\underline{M}(v) = E[ \underline{X} \underline{X}^\dagger ]$  la matrice spectrale de la section sismique;  $\dagger$  : transposé conjugué;  $v$  : fréquence;  $\underline{X}(v)$  vecteur donnée initiale.

- a) Les signaux sismiques sont en bande large;
- b) les ondes sont cohérentes entre elles et constituent la majeure partie des données ; le bruit incohérent est négligeable; les ondes utiles et la partie inutile sont cohérentes entre elles;
- c) la notion de moyennes d'épreuves n'est pas réaliste car le milieu sous-sol est invariant;
- d) les signaux sont non stationnaires en temps;
- e) la durée est limitée;
- f) ondelette certaine;
- g) les ondes ne sont que localement planes et l'utilisation de matrice de Toeplitz n'est pas possible

#### La matrice spectrale.

Etant données les caractéristiques des ondes sismiques, l'estimation de la matrice spectrale est faite  
- sur des signaux de durée limitée aux réflecteurs étudiés



- en remplaçant la moyenne d'ensemble E par  $\mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est un opérateur qui représenté un des 3 types de moyennes ou une combinaison de ces trois moyennes [Lacoume 1979] qui sont:  
 a) le périodogramme moyenné en limitant la largeur de la fonction de pondération à l'écart de temps maximal de chaque onde entre capteurs;  
 b) la moyenne le long de diagonales de la matrice en limitant cette moyenne à n intertraces (distance de stationnarité des fonctions de transfert de chaque onde).  
 c) la moyenne de section sismique en déplaçant l'ensemble du dispositif.

Le cas où le nombre d'ondes utiles est égal à 1 (une seule onde dominante recherchée) est trivial et ne sera pas traité ici. Nous supposons  $m > 1$  et sans restriction sur la généralité de l'étude nous nous limiterons dans les calculs et dans les exemples synthétiques à  $m=2$ . De même en se limitant à l'espace-signal, la partie bruit non colinéaire aux deux premiers vecteurs propres est éliminée. Nous considérons le bruit résiduel comme appartenant à l'onde.

Nous cherchons dans quelles conditions on peut approximer, à chaque fréquence, les ondes par des projections  $\underline{P}_i$  sur les vecteurs propres  $\underline{V}_i$ .

$$\underline{P}_1 = \langle \underline{X}, \underline{V}_1 \rangle \underline{V}_1; \underline{P}_2 = \langle \underline{X}, \underline{V}_2 \rangle \underline{V}_2$$

$$\underline{X} = A_1 \underline{U}_1 + A_2 \underline{U}_2; \underline{U} \text{ et } \underline{V} \text{ sont normalisés}$$

**acoustique sous marine**

Les vecteurs  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  sont considérés comme certains, ils commutent avec le terme d'espérance E

$$\underline{M} = E[\underline{X} \underline{X}^\dagger] = E[A_1 A_1^*] \underline{U}_1 \underline{U}_1^\dagger + E[A_2 A_2^*] \underline{U}_2 \underline{U}_2^\dagger + E[A_1 A_2^*] \underline{U}_1 \underline{U}_2^\dagger + E[A_2 A_1^*] \underline{U}_2 \underline{U}_1^\dagger$$

Les termes croisés s'annulent si  $E[A_1 A_2^*] = 0$ ; c'est le cas des sources **décorrélées par leurs ondelettes**; en remplaçant  $E[|A_1|^2]$  par  $P_{A1}$ :

$$\underline{M} = E[\underline{X} \underline{X}^\dagger] = P_{A1} \underline{U}_1 \underline{U}_1^\dagger + P_{A2} \underline{U}_2 \underline{U}_2^\dagger$$

Dans le cas où  $\underline{U}_1 \perp \underline{U}_2$ , il est bien connu, supposant aussi que l'estimation E est parfaite, que si la densité spectrale de la source 1 est toujours supérieure à celle de la source 2 il n'y a pas d'ambiguïté et les sources sont colinéaires aux vecteurs propres

$$\text{si } P_{a1} > P_{a2}, \text{ et } \underline{U}_1 \perp \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_1 = \underline{V}_1 \text{ et } \underline{U}_2 = \underline{V}_2, P_{a1} = \lambda_1 \text{ et } P_{a2} = \lambda_2$$

si  $P_{a1} = P_{a2}$  alors  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\theta$  est quelconque avec  $\cos(\theta) = |\langle \underline{U}_1, \underline{V}_1 \rangle|$ .  $\lambda_i$  est la valeur propre associée à  $\underline{V}_i$ .

**signaux sismiques**

Dans le cas des signaux sismiques les amplitudes ne sont généralement pas aléatoires. Il est même possible de considérer que toutes les arrivées sismiques ont la même ondelette! Dans ce cas les arrivées sismiques sont considérées comme différentes si les vecteurs  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  ne sont pas colinéaires.

L'espérance mathématique est remplacée par un opérateur de moyenne  $\mathcal{E}$ ;  $A_1$  et  $A_2$  commutent avec cet opérateur.

Cet opérateur moyenne est tel que  $\mathcal{E}[\underline{U}_1 \underline{U}_2^\dagger]$  soit petit alors que  $\mathcal{E}[\underline{U}_1 \underline{U}_1^\dagger] = \underline{U}_1 \underline{U}_1^\dagger$ .

Dans le cas d'une moyenne glissante  $\mathcal{E}[\underline{U}_1 \underline{U}_2^\dagger]$  doit être petit par une estimation sur n traces et, ce, quelle que soit la trace.

$$\underline{M} = A_1 A_1^* \mathcal{E}[\underline{U}_1 \underline{U}_1^\dagger] + A_2 A_2^* \mathcal{E}[\underline{U}_2 \underline{U}_2^\dagger]$$

En sismique nous utiliserons une des deux hypothèses supplémentaires suivantes [Mermoz]:

- 1)  **$\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  orthogonaux** :  $\underline{U}_1^\dagger \underline{U}_2 = 0$   
 dans ce cas la projection sur les deux premiers vecteurs propres permet la séparation des deux ondes, si  $A_1 \neq A_2$  et  $A_1 > A_2 \forall v$
- 2)  **$A_1 \gg A_2$  quelle que soit la fréquence**  
 dans ce cas, on obtient l'identification de l'onde principale et une détection de l'onde de plus faible amplitude.

Quand  $\underline{U}_2$  n'est pas orthogonal à  $\underline{U}_1$ , il se décompose sur les deux premiers vecteurs propres.

Pour la séparation des ondes, 4 cas sont possibles (Figure 1)

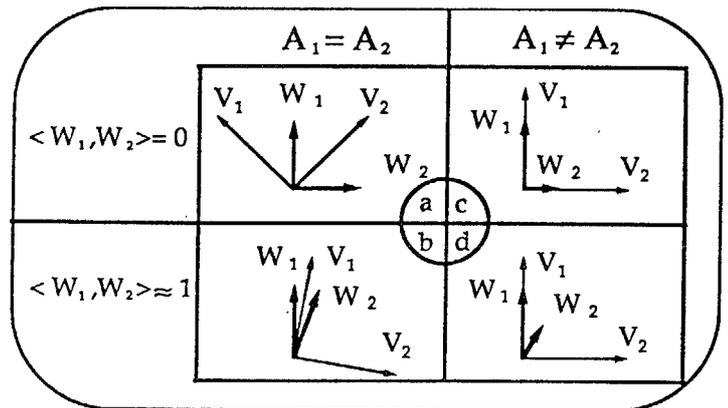


Figure 1: projection de deux ondes sur les vecteurs propres

**Simulation**

Ces cas sont illustrés avec des ondes planes en supposant, sans perdre de la généralité du traitement, que les ondelettes  $A_i$  sont indépendantes de la fréquence et constantes. Les ondelettes sont alors des diracs. Les signaux synthétiques présentés sont des ondes planes. Un aspect plus réaliste est obtenu en convoluant les résultats par l'ondelette sismique et en introduisant des variations lentes de  $\underline{U}$  sur les capteurs. Nous nous limitons à une antenne de 16 capteurs et une moyenne sur les diagonales de la matrice sur 7 traces de 128 point ( ce qui correspond aux applications sur des cas réels). Les résultats sont donc présentés sur 10 traces. Seuls 40 points sont représentés. Dans ces conditions, des ondes d'incidences très différentes (cas a et c) n'ont pas un produit scalaire nul à toutes fréquences (en particulier ce n'est pas le cas aux basses fréquences)

Dans les cas a et c (Figure 2) les écarts de temps des deux ondes entre deux traces voisines sont  $t_1 = 0,5p$  et  $t_2 = -0,8p$  où p est le pas d'échantillonnage. Le produit scalaire des deux ondes sur  $n=7$  traces est un sinus cardinal en fréquence (premier

passage à zéro à  $v_s/4,7 = 2v_s/L$  et une porte en temps de largeur  $n(t_1-t_2)p = Lp = 9,3p$

Dans les cas cas b et d (Figure 3)  $t_1 = 0,1p$  et  $t_2 = -0,4p$ , le produit scalaire des deux ondes sur 7 traces en temps a une largeur de  $3,5p$

a)  $A_1 = A_2$ ;  $\langle \underline{U}_1, \underline{U}_2 \rangle = 0$  (Figure 2 à gauche)

En théorie  $\theta$  (angle  $\underline{U}_1, \underline{V}_1$ ) n'est pas défini. Cependant sur des cas réels et avec l'approximation de l'estimation par  $\mathcal{E}$   $\theta$  est défini et est fonction des pentes relatives et de  $\mathcal{E}$ . A chaque fréquence on obtiendra une répartition particulière des deux ondes sur les deux vecteurs propres, le résultat en temps est issu de la somme de ces diverses fréquences et il y a en moyenne, en temps, équipartition des deux ondes. L'énergie totale des projections selon  $\underline{V}_2$  à certaines fréquences peut parfois être supérieure à celle correspondant à  $\underline{V}_1$ .

Les projections  $P_1$  et  $P_2$  ne permettent pas de séparation des ondes.

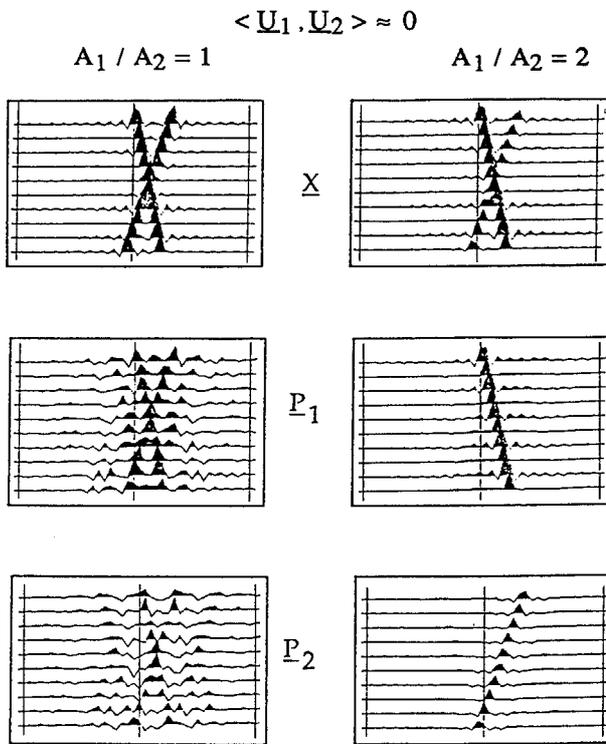


Figure 2. Ondes d'incidences très différentes

b)  $A_1 = A_2$ ;  $\langle \underline{U}_1, \underline{U}_2 \rangle \approx 1$  (Figure 3, à gauche)

Le premier vecteur propre est voisin de  $\underline{X}/\|\underline{X}\|$  et il n'y a pas de séparation. Il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes (projections obliques)

c)  $A_2/A_1 < 1$  et  $\langle \underline{U}_1, \underline{U}_2 \rangle \approx 0$  (Figure 2, à droite)

L'onde 1 (de plus grand amplitude) tend à s'aligner sur  $\underline{V}_1$ ; l'onde 2 tend à s'aligner sur  $\underline{V}_2$ . La séparation des ondes par simple projection sur les vecteurs propres devient effective et

$$\sum |P_{1i}|^2 \approx \lambda_1 > \sum |P_{2i}|^2 \approx \lambda_2 \quad \forall v$$

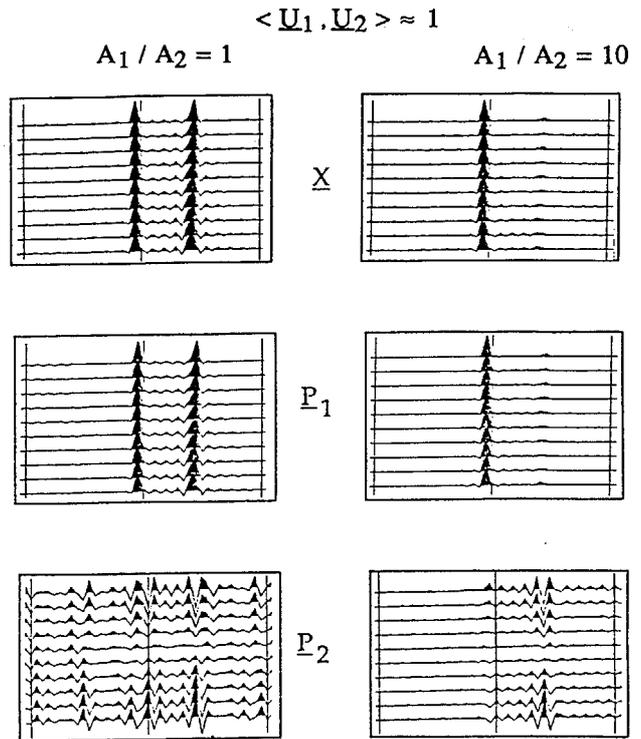


Figure 3. Ondes d'incidence voisines. Les échelles de  $P_2$  ont été multipliées par 100 et 1000

d)  $A_2/A_1 \ll 1$  et  $\langle \underline{U}_1, \underline{U}_2 \rangle \approx 1$  (Figure 3 à droite)

Les deux surfaces d'onde sont voisines; l'onde 1 tend à s'aligner sur  $\underline{V}_1$   $\theta \rightarrow 0$ . Mais le rapport des amplitudes des projections de l'onde 2 sur  $\underline{V}_1$  et sur  $\underline{V}_2$  dépend de  $A_2/A_1$ . Si  $A_2/A_1$  est très petit (0,1), alors la majeure partie de l'énergie de l'onde 2 est sur  $\underline{V}_1$ , mais elle reste négligeable par rapport à la projection de  $\underline{W}_1$ . Alors que sur  $\underline{V}_2$   $\underline{W}_2$  devient prépondérant. Le seuil de détection de l'onde 2 est ainsi amélioré bien que son estimation soit biaisée et ne conserve pas les amplitudes. La figure 4 représente le gain  $G$  en dB à une fréquence donnée, dans le cas où le module du produit scalaire vaut  $3/8$  en fonction de  $(A_2/A_1)^2$ .

$$G = 20 \log \frac{\langle \underline{U}_2, \underline{V}_2 \rangle}{\langle \underline{U}_1, \underline{V}_2 \rangle}$$

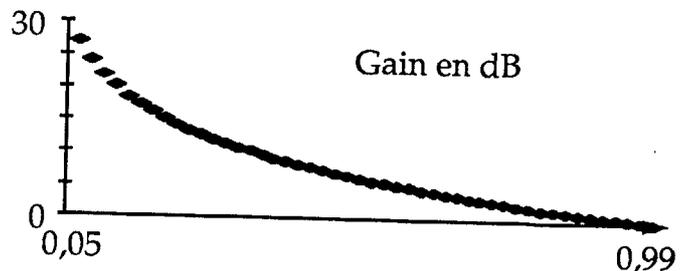


Figure 4 Gain dans le cas  $\alpha = \pi/4$  ( $\langle \underline{U}_1, \underline{U}_2 \rangle = \cos \alpha$ ).

L'observation des résultats obtenus (Figure 3) permet une détermination des modèles  $\underline{M}_1$  et  $\underline{M}_2$  de surface d'onde; une projection oblique permet alors une meilleure séparation des deux ondes.



$$\text{Proj} [ \underline{X}/\underline{M}_1; //\underline{M}_2 ] = \frac{\underline{X} - \text{Proj} [ \underline{X}/\underline{M}_2 ]}{\underline{M}_1 - \text{Proj} [ \underline{M}_1/\underline{M}_2 ]} \underline{M}_1 \text{ avec}$$

$$\text{Proj} [ \underline{X}/\underline{M}_2 ] = \langle \underline{X}, \underline{M}_2 \rangle \underline{M}_2$$

Le déroulement du traitement est le suivant :

#### Choix de m

- estimation de la matrice spectrale, calcul des valeurs propres et vecteurs propres;
- estimation de l'espace source avec m donné a priori
- projection sur les m premiers vecteurs propres appelée section propre  $\underline{P}_i$ ;
- par soustraction, estimation de l'espace bruit; en l'absence d'onde dans cet espace la valeur exacte est  $\leq$ ; essai pour m-1.

#### Décision: utilisation de $\underline{P}_i$ ou estimation de modèles

- Y a-t il une ou plusieurs ondes dans chaque section propre?
- Une onde est-elle entièrement localisée sur un vecteur propre?
- La présence de discontinuité liée à une symétrie indique une projection partielle.
- Les ondes sont elles d'amplitudes différentes? Sont elles orthogonales?

(l'orthogonalité doit être estimée avec les critères utilisés pour  $\underline{E}$  par exemple pour une moyenne sur les diagonales de 7 termes l'orthogonalité de deux ondes s'exprimera sur 7 traces et non pas sur toute la section sismique).

#### exemple d'application aux signaux PSV.

La moyenne en distance s'est avérée la meilleure et sera la seule présentée. La dimension de l'espace-source dépend de la durée d'observation des données. Dans l'exemple présenté, pour une durée de 500 ms, la dimension est de 3 alors que pour une durée moitié la dimension n'est que de 2.

Sur 250 ms (Figure 5) la séparation des deux ondes descendantes est bien réalisée et on identifie une onde convertie "S $\downarrow$ ". Cette onde a une amplitude 15 fois plus faible que le signal incident. Chaque projection  $\underline{P}_i$  est donc normalisée indépendamment.

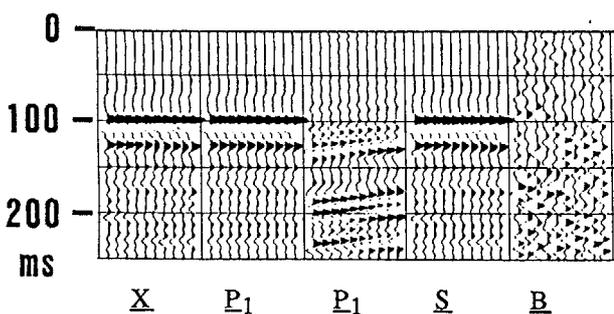
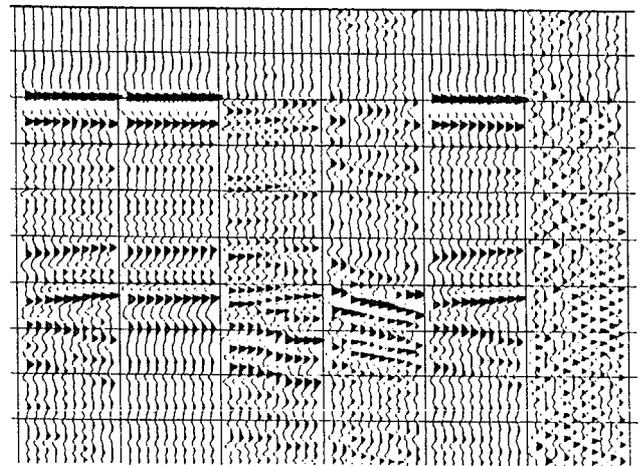


Figure 5  $\underline{X}$ : signal initial;  $\underline{P}_i$  Projection sur  $\underline{V}_i$ ;  $\underline{S}$ : espace signal;  $\underline{B}$  espace bruit. La première arrivée a été mise incidence nulle.

Sur 500 ms (Figure 6) la première section-propre  $\underline{P}_1$  sélectionne les ondes descendantes de type longitudinales "P $\downarrow$ " (qui ont la plus grande énergie). La projection sur le 3ème vecteur propre ne contient que des ondes montantes "P $\uparrow$ ". Sur  $\underline{P}_2$  la séparation n'est pas réalisée on observe des résidus d'ondes descendantes de vitesse plus lente que sur  $\underline{V}_1$  (avec discontinuité) et une onde montante plus lente que la montante détectée sur  $\underline{P}_3$ .  $\underline{P}_2$  ne s'aligne pas sur l'onde S $\downarrow$  convertie

descendante, comme c'était le cas sur un intervalle plus court.  $\underline{P}_2$  contient une partie de S $\downarrow$  et une partie de P $\uparrow$ . En effet la montante et la descendante ne sont pas d'amplitude nettement différentes à toute fréquence et ces deux ondes ne sont pas parfaitement orthogonales; donc  $\underline{P}_2$  et perturbé par P $\uparrow$ .



$\underline{X}$   $\underline{P}_1$   $\underline{P}_2$   $\underline{P}_3$   $\underline{S}$   $\underline{B}$

Figure 6

**En conclusion** En sismique, les ondes sont cohérentes (en terme d'ondelette) et la matrice spectrale est estimée avec un nombre de moyennes limité. Cependant, malgré ces limitations, il est possible de séparer les ondes qui interfèrent du fait que leurs amplitudes sont généralement différentes à toute fréquence. Cette méthode de détection est efficace en présence de peu d'ondes d'amplitudes différentes. Quand les ondes sont orthogonales, la séparation est aussi performante même pour des amplitudes très voisines.

#### Bibliographie

- C.Cliet, M. Dubesset, O. Michaud, pattern recognition: an application to wave separation in three-component offset VSP, SEG 56th annual international meeting Houston nov 2-6, 1986, expanded abstract 308-310.
- Hémon CH. et D. Macé, essai d'une application de la transformation de Karhunen-Loève au traitement du signal, *Geophysical Prospecting*, Vo 26, No. 4, 1978.
- Harlan William S, Jon F. Clearbout and Fabio Rocca, 1984, Signal/Noise separation and velocity estimation, *Geophysics*, VOL. 49, NO. 11; p 1869.
- Sergio L.M. Freire and Tad J. Ulrych, Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling; *Geophysics*, VOL. 53; NO. 6; (june 1988); p. 778.
- Lacoume, J.L., 1979: "Différentes approches de l'analyse spectrale", *Ann. Télécom.*, N° 3-4, P. 142.
- Lacoume, J.L., and Glangeaud, F., 1985: "Corrections of seismic traces by adaptive signal processing", expanded abstract IASTED, Applied Signal Processing, p 263-266..
- Mari, J.L. and Coppens F., 1989: "Le profil sismique vertical; traitement et application, *Revue de L'institut Français du Pétrole* N° 44 .
- Mars, J., Glangeaud, F., Lacoume, J.L., Fourmann, J.M., and Spitz, S., 1987: "Separation of seismic waves", SEG.
- Mermoz, H., 1976: "Imagerie, corrélation et modèles", *Ann. des Télécom.*, Vol. 31, 17-36.