



# APPLICATION DU FILTRAGE NON LINÉAIRE EN TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE

*Fabien Campillo & François Le Gland*

INRIA Sophia Antipolis, BP 109  
F-06561 Valbonne Cédex

## Résumé

On applique des techniques de filtrage non linéaire optimal à un problème de trajectographie passive. On a délibérément choisi un problème simple, en l'occurrence le problème de localisation. Le filtre non linéaire présenté (qui est une discrétisation du filtre optimal) est comparé au filtre de Kalman étendu qui donne de bons résultats pour ce problème.

## Abstract

We apply optimal nonlinear filtering techniques to a target motion analysis problem with bearings-only measurements. We present a rather simple example. We introduce a nonlinear filter (which is a space discretization of the optimal nonlinear filter) and we compare it to the extended Kalman filter.

## 1 Introduction

On considère le problème de trajectographie passive avec mesures d'angles seuls: un porteur  $P$  cherche à déterminer la position d'un bruiteur  $B$  à partir de l'observation de l'azimut  $\beta$  (cf. figure 1). L'hypothèse simplificatrice importante est la suivante: on suppose que  $B$  ne se déplace pas. Cette dernière hypothèse rend le problème observable: il suffit à  $P$  de se déplacer suivant un mouvement rectiligne uniforme (comme on le fera dans la simulation ci-dessous). Lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite, par exemple si on suppose que  $B$  se déplace suivant un mouvement rectiligne uniforme, les problèmes d'observabilité deviennent cruciaux (cf. [6,3,4,5]).

On note:  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  la position de  $B$  (paramètre inconnu);  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$  la position de  $P$  à l'instant  $t$ ;  $\alpha, \nu$  le cap et la vitesse de  $P$  (constantes connues).

L'observation s'écrit

$$y_k = h(t_k, \theta) + \sigma \nu_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

où  $t_k$  désigne le  $k$ -ième instant d'observation ( $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ ),  $\nu$  est un bruit blanc gaussien  $N(0, 1)$ , et

$$h(t, x) \triangleq \arctg \left( \frac{x_1 - \xi_1(t)}{x_2 - \xi_2(t)} \right) \quad (2)$$

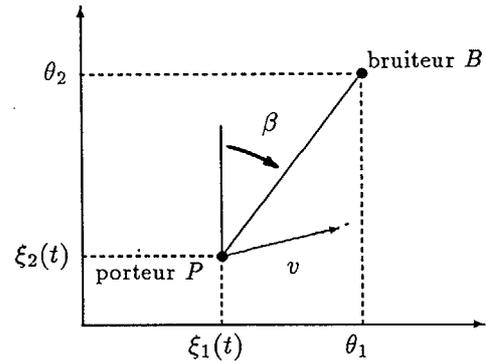


Figure 1 : le problème de localisation

## 2 Le Problème de Filtrage Non Linéaire

Le problème de localisation est un problème d'estimation pour lequel on peut adopter une approche bayésienne. On peut aussi le considérer comme un problème de filtrage non linéaire

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 0, & \theta(0) = \theta_0, \\ y_k = h(t_k, \theta(t_k)) + \sigma \nu_k, \end{cases} \quad (3)$$

où  $\theta_0$  est une variable aléatoire de loi  $p_0(x) dx$  donnée et indépendante de  $\nu$ .  $p_0(x)$  modélise la connaissance a priori que l'on a sur la valeur de  $\theta$ .

Le problème de filtrage non linéaire consiste à déterminer la loi conditionnelle de  $\theta(t_k)$  sachant l'information  $\mathcal{Y}_k = \sigma(y_1, y_2, \dots, y_k)$ . On note  $\pi(t_k, x)$  la densité de cette loi conditionnelle.

Cette densité se calcule de manière *réursive* (dans le cas du problème de localisation, il s'agit d'une simple application de la formule de Bayes). On calcule d'abord

$$p(t_k, x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_k - h(t_k, x)}{\sigma} \right)^2 \right] p(t_{k-1}, x), \quad (4)$$

avec la condition initiale  $p(t_0, x) \stackrel{\text{def}}{=} p_0(x)$ .  $p(t_k, x)$  est appelée densité conditionnelle non normalisée, c'est-à-dire que

$$\pi(t_k, x) = \frac{p(t_k, x)}{\int_{\mathbb{R}^2} p(t_k, x) dx} \quad (5)$$



La densité conditionnelle  $\pi(t_k, x)$  permet de calculer deux estimateurs de  $\theta$ : la moyenne conditionnelle  $\hat{\theta}_k = E(\theta(t_k)|\mathcal{Y}_k)$  (qui est aussi l'estimateur bayésien) et l'estimateur du maximum a posteriori (MAP)  $\tilde{\theta}_k$ . En effet,

$$\hat{\theta}_k = \int_{\mathbb{R}^2} x \pi(t_k, x) dx ,$$

$$\tilde{\theta}_k = \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^2} \pi(t_k, x) .$$

### 3 Discrétisation

$\pi(t_k, x)$  et  $p(t_k, x)$  sont des densités sur  $\mathbb{R}^2$ , pour cela une phase de discrétisation est nécessaire.  $\mathbb{R}^2$  est discrétisée à l'aide d'une grille  $G$  contenant un nombre *fini* de points. Le choix de la grille est libre, pour simplifier on peut prendre, comme dans la simulation ci-dessous, est une grille régulière:

$$\{(x_1, x_2); x_i = x_i^{min} + n_i h_i, n_i = 1, \dots, N_i, i = 1, 2\} ,$$

où on se fixe

- $N_1, N_2$ , le nombre de points de discrétisation dans chaque direction,
- $x_1^{min} < x_1^{max}, x_2^{min} < x_2^{max}$ , les bornes dans chaque direction ,

on a alors

$$h_i = (x_i^{max} - x_i^{min}) / (N_i - 1), i = 1, 2.$$

$p(t_k, x)$  et  $\pi(t_k, x)$  désignent maintenant des densités discrètes définies sur  $G$ , et sont des approximations des densités définies au paragraphe précédent. Elles se calculent de manière équivalente

$$p(t_k, x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_k - h(t_k, x)}{\sigma} \right)^2 \right] p(t_{k-1}, x) , \quad (6)$$

et

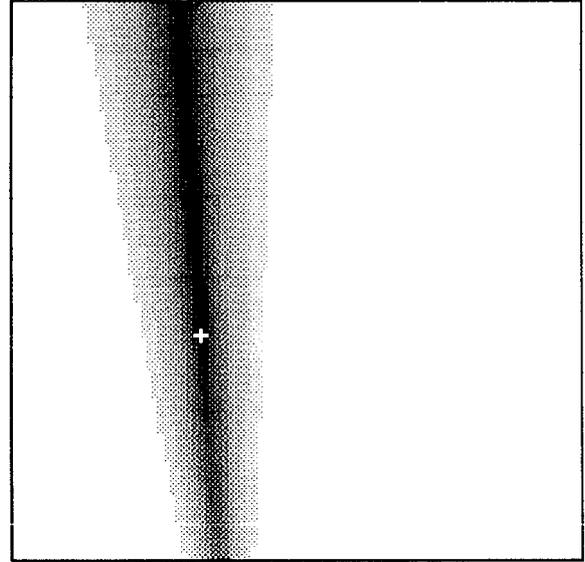
$$\pi(t_k, x) = \frac{p(t_k, x)}{\sum_{x \in G} p(t_k, x)} , \quad (7)$$

avec  $p(t_0, x) = \bar{p}_0(x)$  une approximation de  $p_0(x)$  sur  $G$ . Les estimateurs sont alors donnés par

$$\hat{\theta}_k = \sum_{x \in G} x \pi(t_k, x) , \quad (8)$$

$$\tilde{\theta}_k = \text{Arg max}_{x \in G} \pi(t_k, x) . \quad (9)$$

**Remarque 3.1** La simplicité du filtre optimal (6) est due à l'absence de bruit dans l'équation de la dynamique (3). Le fait que la dynamique est triviale (i.e.  $\dot{\theta} = 0$ ) simplifie encore la mise-en-œuvre. D'un point de vue informatique, cet algorithme ne nécessite ni une place mémoire importante, ni un calculateur puissant. Dans l'exemple présenté plus loin on utilise une grille de  $100 \times 100$  points, mais ce nombre peut être réduit sans perdre beaucoup en précision. De plus l'utilisation de grille adaptative permettrait d'utiliser des grilles de peu de points, tout en gardant la même précision.



✚ VRAIE VALEUR

Figure 2 : Densité conditionnelle représentée par niveau de gris (instant  $t = 400$ , dimensions du domaine  $[-5, 10] \times [30, 80]$  (km))

**Remarque 3.2**  $\hat{\theta}_k$  et  $\tilde{\theta}_k$  ne sont que des estimateurs du paramètre inconnu  $\theta$ . C'est  $\pi(t_k, x)$  qui contient toute l'information sur la connaissance a posteriori que l'on a du paramètre  $\theta$ . En particulier les courbes de niveaux de  $\pi(t_k, x)$  donnent un équivalent rigoureux des ellipses d'incertitude du cas linéaire gaussien.

### 4 Simulation

On utilise les valeurs suivantes (exprimées en mètres, secondes et degrés)

- $\theta_1 = 0, \theta_2 = 50000$ ,
- $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, v = 6, \alpha = 90$ ,
- $t_{max} = 3600, t_k = k\Delta t, \Delta t = 4$ ,
- $\sigma = 5$ .

Pour la discrétisation on utilise

- $x_1^{min} = -5000, x_1^{max} = 10000$ ,
- $x_2^{min} = 30000, x_2^{max} = 80000$ ,
- $N_1 = 100, N_2 = 100$ .

Sur cet exemple on calcule  $\{\pi(t_k, \cdot); k = 1, \dots, N\}$  et les trois estimateurs de  $\theta$  suivants

- $\hat{\theta}_k$  : la moyenne conditionnelle (8),

- $\tilde{\theta}_k$  : l'estimateur du maximum a posteriori (9),
- $\bar{\theta}_k$  : l'estimateur donné par le filtre de Kalman étendu [1,2].

Dans la mesure où il n'y a pas de problème d'observabilité, le filtre de Kalman étendu donne de bons résultats et ne nécessite pas de mise au point particulière — comme un changement de coordonnées — excepté une initialisation un peu fine (cf. remarque 4.1).

Sur les figures 2, 3, 4 on a tracé la densité conditionnelle  $\pi(t, x)$  (respectivement aux instants  $t = 400, 1600, 3600$ ). La densité est représentée sous forme de niveau de gris: le niveau de gris est proportionnel à la probabilité (les zones les plus sombres correspondent aux endroits où  $\theta$  a une plus forte probabilité de se trouver, les zones blanches correspondent à une probabilité nulle). Sur la figure 5, on a tracé les différents estimateurs sur une simulation.

**Remarque 4.1** Le comportement du filtre de Kalman étendu dépend très fortement de son initialisation, en particulier de la valeur de la covariance initiale. De plus il n'existe pas de méthode simple d'initialisation (en dehors de la simulation). Dans tous les cas le filtre de Kalman étendu a un comportement plutôt "capricieux". En revanche, le comportement du filtre optimal discrétisé ne dépend pas de sa valeur initiale, dans la simulation on a pris  $\bar{p}_0(x) =$  loi uniforme sur  $G$ .

**Remarque 4.2** Pour le filtre de Kalman étendu, comme pour le filtre optimal, il n'y a pas eu de post-traitement des résultats (l'estimation n'a pas été lissée sur une fenêtre glissante). Ces estimateurs peuvent en effet être améliorés. Dans la figure 5, on a préféré présenter les résultats bruts.

## 5 Développement Futurs

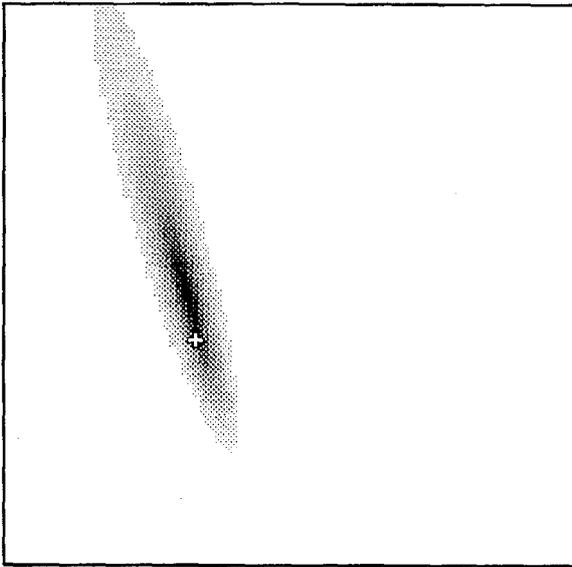
*Maillage adaptatifs* Au vu des figures 3 et 4, la nécessité d'utiliser une méthode de grille de points adaptative est claire. L'intérêt en est évident: utiliser beaucoup moins de points en espace tout en gardant la même précision, cela avec un gain en temps-calcul.

*Autres problèmes de trajectographie passive* Les techniques présentées ici peuvent aussi s'appliquer au problème de trajectographie passive avec mesure d'angles seuls lorsque le bruiteur se déplace suivant un mouvement rectiligne uniforme. Ce problème est en dimension 4 (au lieu de 2). Dans ce cas, l'utilisation d'une grille de points adaptative semble nécessaire.

*Extensions à d'autres problèmes de filtrage non linéaire* Les techniques présentées ici s'appliquent dans le cas plus général où l'équation d'état est de la forme  $\dot{\theta} = f(\theta)$ .

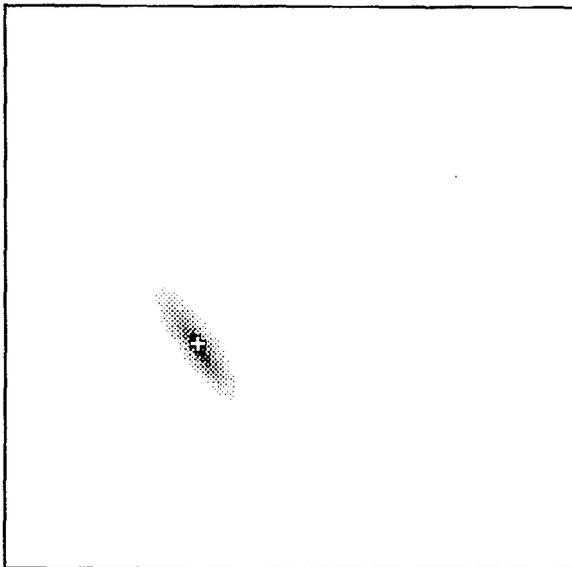
## Bibliographie

- [1] A. GELB (ed.). *Applied Optimal Estimation*, volume 64 of *Mathematics in Science and Engineering*. MIT Press, Cambridge, 1974.



⊕ VRAIE VALEUR

Figure 3 : Densité conditionnelle représentée par niveau de gris (instant  $t = 1600$ , dimensions du domaine  $[-5, 10] \times [30, 80]$  (km))



⊕ VRAIE VALEUR

Figure 4 : Densité conditionnelle représentée par niveau de gris (instant  $t = 3600$ , dimensions du domaine  $[-5, 10] \times [30, 80]$  (km))

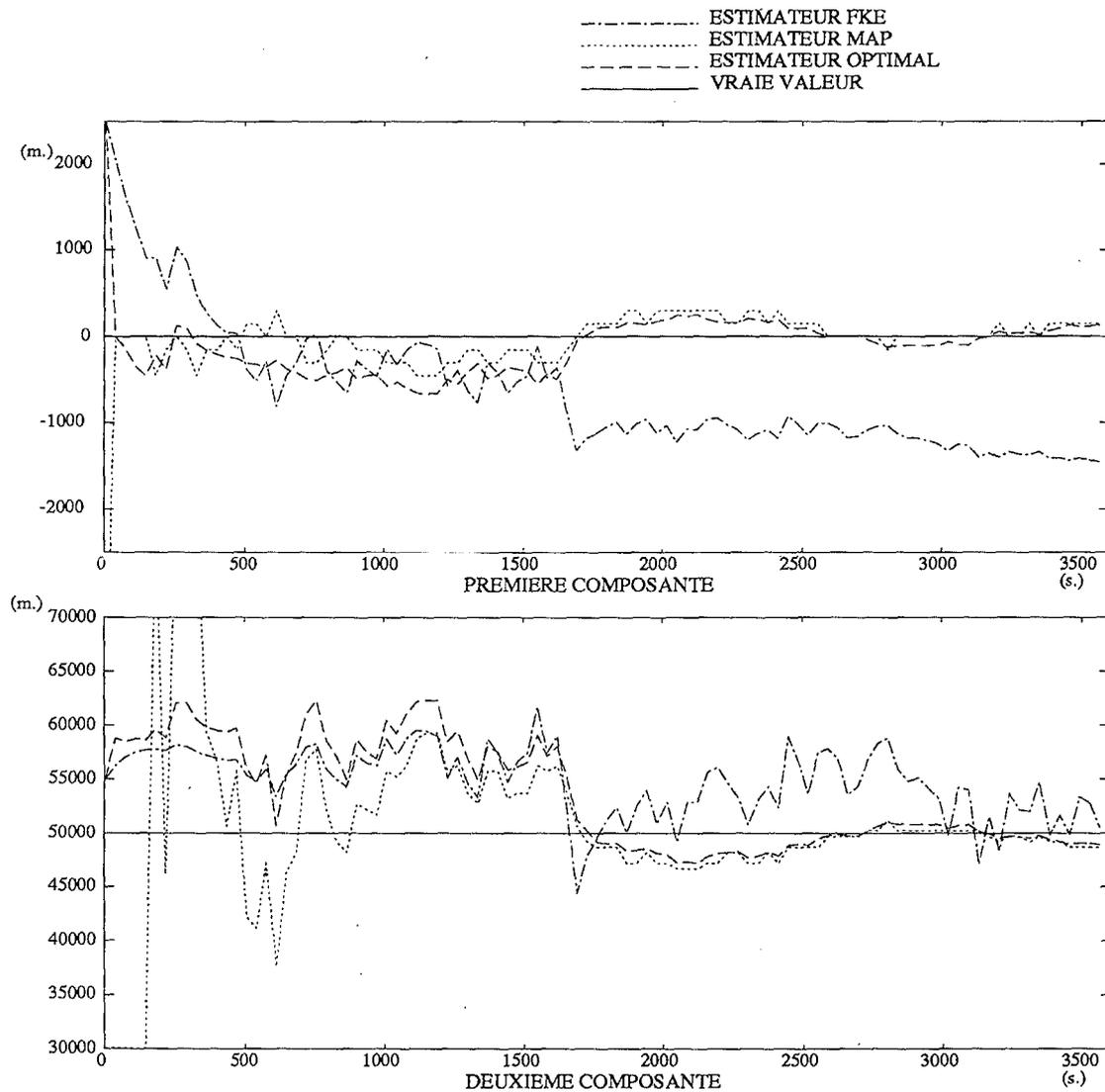


Figure 5 : Estimation des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$

- [2] P.S. MAYBECK. *Stochastic Systems and State Estimation*, vol. 1,2,3, volume 141 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New-York, 1979.
- [3] S.C. NARDONE and V.J. AIDALA. Observability criteria for bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **AES-17**(2):162-166, March 1981.
- [4] S.C. NARDONE, A.G. LINDGREN, and K.F. GONG. Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**(9):775-787, September 1984.
- [5] A. OUSTRI and G. FAVIER. Observabilité et optimisation de manœuvres en azimétrie. In *Onzième Colloque sur le Traitement de Signal et des Images*, pages 325-328, Nice, 1987. GRETSI.
- [6] D. PILLON and C. JAUFFRET. Critère d'observabilité en trajectographie par mesure d'angles pour des cibles en mouvement non rectiligne uniforme. In *Onzième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*, pages 321-324, Nice, 1987. GRETSI.