



## FILTRE OPTIMAL DE DÉTECTION DE RUPTURES MARKOVIENNES

Chun Yang(\*) et M. Mariton(\*\*)(+)

(\*) Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE, Plateau du Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex

(\*\*)Matra Sep Imagerie et Informatique, Laboratoire de Traitement des Images et du Signal, 3 Av. du Centre, 78182 St. Quentin-en-Yvelines

### RÉSUMÉ

La théorie du filtrage optimal fournit une solution au problème de la détection de ruptures dans les systèmes dynamiques. Dans ce papier, nous nous intéressons aux performances d'un tel filtre où le modèle des transitions est une chaîne de Markov finie. En particulier nous analysons la consistance de l'estimée, la robustesse du filtre et l'évaluation du retard de détection et du taux de fausses alarmes.

### SUMMARY

Optimal filtering theory provides a solution for rupture detection in dynamic systems. In this paper we are interested in the performances of one such filter where jumps are modelled with a finite Markov chain. In particular we analyze the estimate consistence, the filter robustness and the detection delay and false alarm rate evaluation.

### INTRODUCTION

Les ruptures d'un système dynamique peuvent être modélisées à l'aide de modèles à sauts et elles représentent un phénomène important pour de nombreuses applications : vulnérabilité des systèmes de commande (tolérance aux pannes), poursuite de cible (manœuvres), surveillance des réseaux (fuites), segmentation de la parole, ... (voir par exemple la conférence<sup>1</sup>). La détection des sauts d'un régime à un autre constitue une étape primordiale quelque soit son utilisation ultérieure, surveillance du fonctionnement ou reconfiguration de la commande.

Dans notre travail nous supposons disposer d'un modèle du mécanisme des sauts et dans le cas le plus simple nous considérons une chaîne de Markov. Afin de simplifier le problème nous limitons la chaîne à un ensemble fini. La classe des systèmes linéaires à sauts markoviens, où cette chaîne indice le régime d'un système linéaire déterministe par morceaux, a donné lieu récemment à de nouveaux développements. En particulier les concepts de commandabilité et stabilisabilité<sup>2,3</sup> ont été analysés, ainsi que différentes synthèses de régulateurs optimaux<sup>2,4</sup>.

Un filtre optimal générant la probabilité a posteriori des différentes hypothèses permet de détecter les ruptures. La forme la plus simple de ce filtre correspond à une mesure directe mais bruitée du régime pour laquelle on obtient le filtre dit "de Wonham"<sup>5</sup>.

En tant que détecteur, le filtre fournit une décision utilisée, par exemple, pour une reconfiguration de la commande. Les propriétés telles que consistance d'estimation, retard de détection et taux de fausses alarmes sont donc des indicateurs très importants tant pour la comparaison de différents filtres que pour leur implantation.

A partir de cet exemple simple nous développons une méthode systématique d'évaluation des performances, basée sur l'intégration de l'équation de Fokker-Planck de la densité de probabilité conditionnelle qui caractérise l'évolution du filtre. En particulier le retard de détection et le taux de fausses alarmes peuvent être estimés comme des instants de premier passage et des simulations sont présentées afin de supporter ces analyses.

### MODELES A SAUTS MARKOVIENS ET FILTRAGE DU REGIME

Nous considérons une chaîne de Markov  $r_t$  sur  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , donnée par sa caractéristique locale  $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j=1,N}$  selon

$$\mathcal{P}\{r_{t+\Delta}=j \mid r_t=i\} = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ij}\Delta + o(\Delta), & i = j \end{cases} \quad (1)$$

En fait nous travaillons plutôt avec l'indicateur du régime  $\phi_t$ , le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  dont la  $i$ -ème composante,  $\phi_{ti}$ , vaut 1 si  $r_t = i$ , 0 sinon. Le filtre de Wonham<sup>5,6</sup> est adapté à des observations de la forme :

$$dy_t = h(r_t) dt + \sigma dw_t \quad (2)$$

où  $w_t$  est un processus brownien indépendant et  $h(\cdot)$  est la contribution du régime à l'observation. Si nous avons une modélisation parfaite,  $h(r_t)$  est équivalent à  $[h_1, h_2, \dots, h_N] \phi_t$ . En notant  $Y_t = \sigma^{-1} \{y_s, s \leq t\}$  l'information accumulée jusqu'à l'instant  $t$ , l'estimateur optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne est donné par l'espérance conditionnelle  $\hat{\phi}_t = E\{\phi_t \mid Y_t\}$ . Wonham a établi l'équation différentielle générant  $\hat{\phi}_t$  à partir des observations  $Y_t$  :

$$d\hat{\phi}_{ti} = [\Pi^T \hat{\phi}_t]_i dt + \hat{\phi}_{ti} (h_i - \sum_{j=1}^N \hat{\phi}_{tj} h_j) \sigma^{-2} (dy_t - \sum_{j=1}^N \hat{\phi}_{tj} h_j dt) \quad (3)$$

pour  $i = 1$  à  $N$ , avec une initialisation en  $\hat{\phi}(t_0)$ .

Ce filtre a en fait une structure familière : l'extrapolation selon le modèle a priori (le premier terme du second membre de (3)) et la mise à jour par l'observation (le deuxième terme) comme dans le filtre de Kalman. Mais une différence majeure existe dans le calcul du gain de recalage : le gain d'un filtre de Kalman peut être pré-calculé hors-ligne par une équation de Riccati alors que le gain dans (3) dépend de l'estimée courante  $\hat{\phi}_t$  et ainsi doit être calculé en-ligne.

Notre gain est non-linéaire avec les produits  $\hat{\phi}_{ti} \hat{\phi}_{tj}$  et cela posera des difficultés dans l'analyse.

Nous constatons que notre gain est un polynôme du second degré en les composantes de  $\hat{\phi}_t$ . En particulier, pour  $N = 2$  (le cas de deux régimes), c'est une parabole qui s'écrit explicitement

$$g_{ti}(\hat{\phi}_{ti}) = \frac{h_1 - h_2}{\sigma^2} \hat{\phi}_{ti} (1 - \hat{\phi}_{ti}) \quad (4)$$

Le gain (4) sera réduit lorsque l'incertitude sur le régime devient faible, e.g.,  $\hat{\phi}_{ti} \approx 0$  ou  $\hat{\phi}_{ti} \approx 1$  et il sera maximum lorsque la situation est la plus incertaine, i.e.,  $\hat{\phi}_{ti} \approx 0.5$ . L'augmentation du gain avec l'incertitude est justement la caractérisation de l'information de Shannon<sup>7</sup>. Comparée à la fonction d'entropie :  $x \log(1/x) + (1-x) \log(1/(1-x))$ , la fonction  $x(1-x)$  ( $x = \hat{\phi}_{ti}$  dans (4)) est en fait la partie prédominante du développement en série. D'autre part, le gain (4) est modulé par  $(h_1 - h_2)/\sigma^2$  qui est lié au rapport signal sur bruit. Chaque composante de l'estimée  $\hat{\phi}_{ti}$  a une interprétation probabiliste, c'est-à-dire la probabilité a posteriori d'être en régime  $i$  car  $\hat{\phi}_{ti} = E\{\phi_{ti} \mid Y_t\} = \mathcal{P}\{r_t=i \mid Y_t\}$ . Donc le filtre optimal (3) est aussi l'évolution des probabilités a posteriori du régime. La stratégie de décision d'erreur minimale consiste à prendre la plus grande valeur parmi  $\hat{\phi}_t$  comme la valeur la plus probable de  $r_t$ , mais d'autres méthodes telles qu'un test de seuil sur la trajectoire sont aussi possibles.

Pour illustrer le comportement du filtre (3), nous donnons tout de suite un exemple. En absence des connaissances sur le régime

(+) adresser la correspondance à cet auteur



initial, un choix comme  $\hat{\phi}_{t1} = 1/N$  pour  $i = 1$  à  $N$  est naturel.

**Exemple 1 :**

Pour un système de régime  $N = 2$  avec la matrice de transition  $\Pi = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$ , supposons que les valeurs de  $h(r_t)$  sont exactement connues avec  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 1$ . L'intensité de bruit vaut  $\sigma = 0.1$ . Une réalisation de la trajectoire de  $\hat{\phi}_{t1}$  est tracée Fig.1 où le vrai régime est 1 jusqu'à  $t = 1.2$ , 2 entre  $t = 1.2$  et  $t = 2.1$  et après il revient à 1.

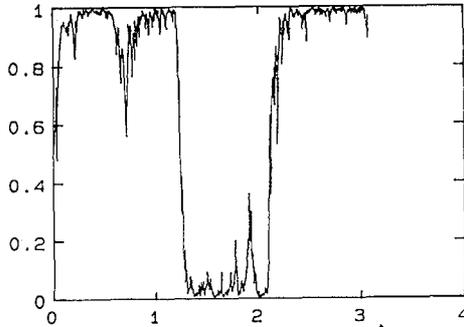


Fig. 1 - L'estimation du régime :  $\hat{\phi}_{t1}$

Nous traçons également l'observation  $y_t$ .

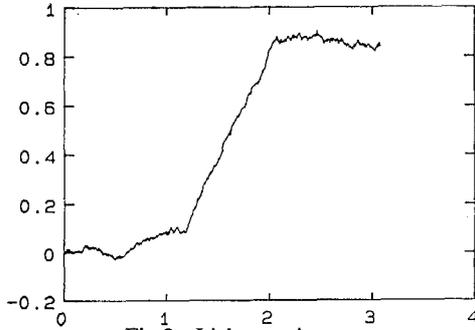


Fig. 2 - L'observation :  $y_t$

Nous observons que  $\hat{\phi}_{t1}$  suit bien la trajectoire de  $\phi_{t1}$ . Mais il y a aussi des différences significatives entre les deux trajectoires pendant certaines périodes. Il y a deux types de différences principales : après un saut de  $\phi_{t1}$  (à  $t = 1.2$  ou à  $t = 2.1$ , voir Fig.1),  $\hat{\phi}_{t1}$  ne réagit qu'après un petit délai, appelé le retard de détection si la décision de saut, noté  $l_t$ , est définie par le test de seuil sur  $\hat{\phi}_{t1}$  suivant :

$$\hat{\phi}_{t1} = \begin{cases} \geq S_1 : \text{en régime 1} \\ < S_1 \text{ et } > S_2 : \text{pas de décision} \\ \leq S_2 : \text{en régime 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_t = 1 \\ \\ l_t = 2 \end{cases} \quad (5)$$

Il y a aussi des instants, voir  $t = 0.71$  ou  $t = 1.88$  où  $\hat{\phi}_{t1}$  s'écarte beaucoup de ses valeurs courantes et cela risque d'indiquer un saut si le seuil est trop faible générant ainsi une fausse alarme. Par exemple si le seuil est 0.8, une décision de saut du régime 2 au régime 1 est faite à  $t \approx 2.2$  correspondant à une transition réelle à  $t = 2.1$  et pour ce seuil-là il n'y a pas de fausses alarmes. Par contre un seuil égal à 0.4 produit une décision presque immédiate mais déclenche une fausse alarme non désirable à  $t \approx 1.9$ . Donc un certain compromis doit être trouvé.

La forme de  $y_t$  nous fait penser à utiliser la méthode de somme cumulée ou le détecteur d'Hinkley<sup>1</sup> directement sur  $y_t$  car le saut de  $\phi_t$  correspond bien au changement de valeur moyenne de la "dérivée" de  $y_t$  et  $y_t$  elle-même est justement la somme cumulée<sup>8</sup> (intégration). Supposons  $h_j > h_i$  pour  $j > i$ , la décision du test de somme cumulée est alors

$$\text{un changement à l'instant } \tau = \inf\{t \mid y_t - m_t \geq d\} \quad (6)$$

où  $d$  est le seuil de détection et  $m_t$  est la valeur minimum atteinte par  $y_s$  pour  $s \leq t$ .

#### DENSITE DE PROBABILITE CONDITIONNELLE

Pour simplifier l'analyse, nous nous limitons dans la suite toujours au cas  $N = 2$ . En supprimant la redondance entre  $\hat{\phi}_{t1}$  et  $\hat{\phi}_{t2}$ , ( $\hat{\phi}_{t1} + \hat{\phi}_{t2} = 1$ ), nous pouvons réécrire (3)

$$d\hat{\phi}_{t1} = (\pi_{21} + (\pi_{11} - \pi_{21}) \hat{\phi}_{t1}) dt + \frac{h_1 - h_2}{\sigma^2} \hat{\phi}_{t1} (1 - \hat{\phi}_{t1}) ((h_1 - h_2) + (h_1 - h_2) \hat{\phi}_{t1}) dt + \sigma dw_t \quad (7)$$

avec  $\pi_{ij}$  pour  $i, j = 1, 2$  les composantes de  $\Pi$  et  $h = h(r_t)$  est la vraie valeur du système et  $h_1, h_2$  les valeurs du modèle utilisées dans le filtre. En distinguant les valeurs exactes de  $h$  de celles utilisées par le

filtre nous pouvons analyser un aspect important de la robustesse, c'est-à-dire la capacité à détecter des transitions malgré les incertitudes de la modélisation. Pour évaluer l'influence de l'écart entre modèle et réalité sur le comportement du filtre, nous quantifions cet écart par

$$\eta = (h - h_2) / \Delta h \quad \text{avec } \Delta h = h_1 - h_2 \quad (8)$$

Pour une modélisation parfaite  $\eta = 0$ , 1 correspond à  $h = h_2$ ,  $h_1$  respectivement. L'équation du filtre peut s'écrire de manière plus compacte :

$$d\hat{\phi}_{t1} = f_\eta(\hat{\phi}_{t1}) dt + g_\eta(\hat{\phi}_{t1}) dw_t \quad (9)$$

avec

$$f_\eta(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

$$g_\eta(x) = -e x^2 + e x$$

$$\text{où } a = \frac{\Delta^2 h}{\sigma^2}, b = -(1+\eta) \frac{\Delta^2 h}{\sigma^2}, c = \pi_{11} - \pi_{21} + \eta \frac{\Delta^2 h}{\sigma^2}, d = \pi_{21}, e = \frac{\Delta h}{\sigma}$$

D'après les coefficients de (9) les sauts du régime et l'erreur de modélisation modifient le comportement du filtre seulement à travers les deux coefficients du premier et du second degré,  $b$  et  $c$ .

L'étude d'une équation stochastique différentielle se formule d'une manière intéressante en passant à l'équation aux dérivées partielles associée. Dans notre cas, l'étude de (7) ou (9) sous chaque régime séparément revient à évaluer la densité de probabilité conditionnelle, notée  $p_i(x, t)$ , définie comme

$$\mathcal{P}\{x \leq \hat{\phi}_{t1} \leq x + dx \mid r_t = i, Y_t\} = p_i(x, t) dx \quad (10)$$

c'est-à-dire la probabilité que  $\hat{\phi}_{t1}$  soit entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$  sous le régime  $r_t = 1, 2$  sachant les observations jusqu'à alors.

La densité satisfait l'équation de Fokker-Planck<sup>9,10</sup>

$$\frac{\partial p_i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f_\eta(x) p_i(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\eta^2(x) p_i(x, t)}{\partial x^2} \quad (11)$$

avec une distribution initiale  $p_i(x, t_0)$  pour  $i = 1, 2$ .

Lorsque les sauts sont bien séparés, nous pouvons considérer simplement la solution asymptotique de (11). Avec  $\frac{\partial p_i(x, t)}{\partial t} = 0$ , nous obtenons la densité de probabilité conditionnelle asymptotique

$$p_i(x, \infty) = \frac{\alpha_i}{x^2(1-x)^2}$$

$$\exp\left\{2\left(\frac{\Delta^2 h}{\sigma^2} \frac{(\pi_{11} + \pi_{21})x - \pi_{21}}{x(1-x)} + \ln(1-x) - \left(\frac{\Delta^2 h}{\sigma^2} \pi_{11} + (2-\eta)\right) \ln \frac{1-x}{x}\right)\right\} \quad (12)$$

avec  $\alpha_i$  le facteur de normalisation et  $x \in (0, 1)$ .

L'exemple suivant illustre l'expression (12).

**Exemple 2 :**

Reprenons les données de l'Exemple 1. Avec une modélisation parfaite, les densités de probabilité pour  $\hat{\phi}_{t1}$  en régime 1 ( $\eta = 1$ ) et en régime 2 ( $\eta = 0$ ) sont illustrées Fig.3 et Fig.4 respectivement.

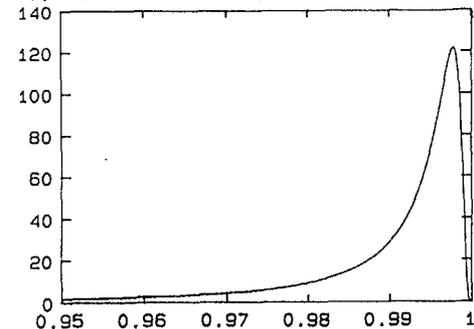


Fig. 3 - La densité de probabilité conditionnelle en régime 1

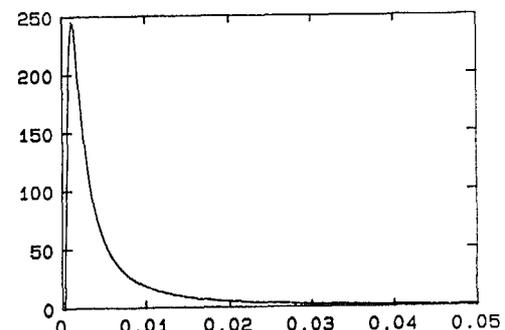


Fig. 4 - La densité de probabilité conditionnelle en régime 2



Nous observons que la fonction de densité est concentrée près de 1 ou 0 mais non confondue. L'estimation n'est donc pas consistante comme nous discuterons au paragraphe suivant.

#### ANALYSE DES PERFORMANCES DU FILTRE

Nous examinons d'abord le cas dégénéré  $\Pi = 0$ , c'est-à-dire le cas où la variable  $r_t$  est inconnue mais constante (il n'y a pas de sauts). Lorsque le système est en régime  $r_t = 1$ , selon (12), nous avons

$$p_1(x, \infty) = \frac{\alpha_1}{(1-x)^2} \rightarrow \delta(x-1) \quad (13)$$

de même pour le système en régime  $r_t = 2$ ,

$$p_2(x, \infty) = \frac{\alpha_2}{x^2} \rightarrow \delta(x) \quad (14)$$

où  $\delta(\cdot)$  définit la fonction de Dirac. Selon la définition, il est facile de vérifier, pour (14) par exemple, que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_2}{x^2} = \infty$  et  $\int_0^1 \frac{\alpha_2}{x^2} dx = 1$ .

Cela signifie que la fonction de densité est une masse concentrée au point 1 ou 0 et implique la consistance de l'estimation dans le sens où  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\hat{\phi}_t = \phi(i)\} = 1$ .

Ce résultat est obtenu de façon différente par Hijab<sup>11</sup>. Il a montré que le filtre est consistant si et seulement si  $\int_0^\infty |h_j - h(r)|^2 dt = +\infty$  pour  $j \neq r$  pourvu qu'il n'y a pas de probabilités nulles à  $t_0$ . Si les  $h_i$ ,  $i = 1$  à  $N$  sont constants, la condition se traduit simplement par  $h_i \neq h_j$  pour  $i \neq j$  et cela est cohérent avec notre analyse. La consistance est ainsi reliée à l'information contenue dans les données. Mais cette théorie ne peut pas s'appliquer telle quelle en présence des sauts.

Lorsque  $\Pi \neq 0$ , la notion de consistance définie ci-dessus n'est plus valable car  $\phi_t$  varie dans le temps. Mais si l'hypothèse de la séparation de deux sauts successifs reste vraie, nous avons intérêt à l'utiliser pour évaluer la densité asymptotique.

Comme nous avons vu Fig.3 et Fig.4, la valeur ayant une probabilité maximum s'écarte des bornes de l'intervalle (0, 1), et le filtre n'est plus consistant. Nous l'avons aussi remarqué dans la trajectoire particulière de la Fig.1 où un biais dans l'estimation apparaît. Ce biais peut s'interpréter par le fait que le filtre s'attend à une transition selon  $\Pi$  et essaie d'en trouver une dans le bruit même si en fait il n'y a pas de sauts.

La densité asymptotique nous permet également d'évaluer l'influence du rapport signal sur bruit et du taux de transition sur la densité.

#### Exemple 3 :

Pour la même matrice de transition et l'intensité de bruit de l'Exemple 1, nous choisissons trois jeux de valeurs pour  $\Delta^2 h / \sigma^2 = 25, 225, 400$  qui correspondent à  $\Delta h = 0.5, 1.5$  et  $2$  respectivement. Les densités en régime  $i = 1$  sont illustrées Fig.5.

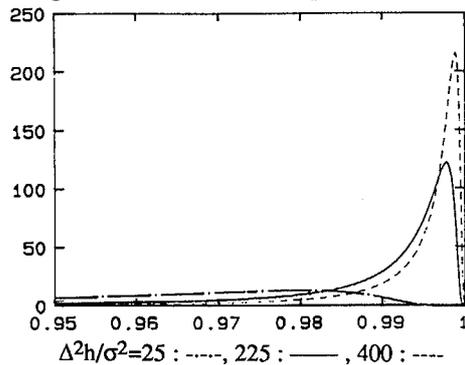


Fig.5 - L'influence de  $\Delta^2 h / \sigma^2$  sur la densité en régime un

Lorsque  $\Delta h$  augmente, le rapport signal sur bruit augmente, et la densité se concentre vers 1 pour le régime 1.

D'autre part, avec un rapport signal sur bruit fixé  $\Delta^2 h / \sigma^2 = 225$ , si le système est en régime 1, prenons  $\pi_{21} = 0.25$  fixé, lorsque  $\pi_{11} = -0.5$  et  $-1.2$ , les densités sont illustrées Fig.6.

La simulation montre que l'amplitude plus faible de  $\pi_{11}$  donne une densité plus proche de la borne : cela veut dire si la transition est peu fréquente, l'estimation est plus consistante. D'autre part étant donné  $\pi_{11}$  fixé, le choix de  $\pi_{21} = 0.25$  et  $2.5$  n'ont pas beaucoup modifié la densité. Cette insensibilité vis-à-vis de  $\pi_{21}$  peut s'expliquer par (12) où  $\pi_{21}$  intervient seulement dans  $(\pi_{11} + \pi_{21})x - \pi_{21} = \pi_{11}x + \pi_{21}(x-1) \approx \pi_{11}x$  où  $x \approx 1$  en régime 1.

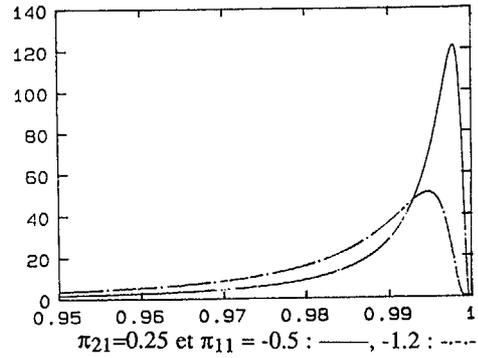


Fig.6 - L'influence de  $\Pi$  sur la densité  $r_t=1$  avec  $\pi_{21}$  fixé

Une analyse similaire a été conduite par Sworder et Chou<sup>4</sup> en utilisant une méthode différente. Sous l'hypothèse de bruit faible, en notant la différence entre le vrai régime  $\phi_t$  et son estimé  $\hat{\phi}_t$  par  $\tilde{\phi}_t \triangleq \hat{\phi}_t - \phi_t$ , ils ont trouvé une approximation pour cette quantité

$$\tilde{\phi}_{ii} \approx \frac{2 \sigma^2 \pi_{ri}}{(h_r - h_i)^2}, \quad \text{pour } i \neq r \quad (15)$$

où  $r$  représente le vrai régime. Ce biais est proportionnel au produit entre l'intensité du bruit d'observation et la probabilité de transition du vrai régime  $r$  à la  $i$ -ème composante considérée.

La densité conditionnelle asymptotique (12) nous permet d'étudier l'effet de l'erreur de modélisation  $\eta$ .

#### Exemple 4 :

Prenons  $\Delta h = 1.5$  et  $\sigma = 0.1$  comme modèle pour le filtre et la même matrice de transition que dans l'Exemple 1. Le vrai système est en régime 1 avec  $\eta = 0.8, 1, 1.5$  respectivement. Les résultats sont illustrés Fig.7.

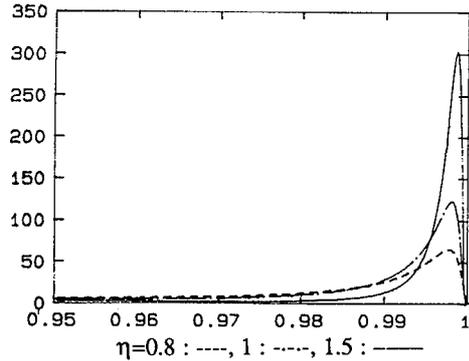


Fig.7 - L'influence de  $\eta$  sur la densité

La dynamique de  $\hat{\phi}_{11}$  est complexe mais deux phénomènes majeurs se détachent : fausses alarmes et retard à la détection (cf le test (5)). Des modèles simples ont été proposés pour décrire la variable  $l_t$  en sortie du test<sup>2,4</sup> :

S'il y a un saut de  $r_t$  de  $i$  à  $j$  à l'instant  $t_0$ ,  $l_t$  aura une même transition mais avec un retard modélisé comme une variable aléatoire indépendante de distribution exponentielle avec un retard moyen  $1/\pi_{ij}^0$ , plus précisément

$$\text{Prob}\{l_{t+\Delta}=j \mid l_s=i, s \in [t_0, t], r_{t_0}=j, r_{t_0^-}=i\} = \begin{cases} \pi_{ij}^0 \Delta + 0(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ij}^0 \Delta + 0(\Delta), & i = j \end{cases} \quad (16)$$

De même pour une fausse alarme : la déclaration d'une transition de  $l_t$  de  $i$  à  $j$  alors que  $r_t$  reste en régime  $i$  est décrite comme un événement indépendant exponentiellement distribué avec un taux

$\pi_{ij}^1$ , c'est-à-dire

$$\text{Prob}\{l_{t+\Delta}=j \mid l_s=r_s=i, s \in [t_0, t]\} = \begin{cases} \pi_{ij}^1 \Delta + 0(\Delta), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ij}^1 \Delta + 0(\Delta), & i = j \end{cases} \quad (17)$$

Les composantes de  $\Pi$  sont souvent plus petites que celles de  $\Pi^0$  pour qu'il soit impossible d'avoir des changements multiples de  $r_t$



avant que la bonne décision soit prise, et  $\Pi^1$  est de même amplitude que  $\Pi$ .

La détermination de  $\Pi^0$  et  $\Pi^1$  joue un rôle très important pour évaluer la performance du filtre et pour son utilisation. Elles peuvent être évaluées de façon expérimentale à partir des trajectoires observées. Mais nous pouvons aussi les évaluer de façon théorique grâce à la notion d'instant de premier passage<sup>9,10</sup>.

Pour un processus markovien  $x_t$  de distribution initiale  $p(x, t_0) = \delta(x - x_0)$  définie sur un point  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , le temps que  $x_t$  met pour atteindre les bornes  $x_1$  ou  $x_2$  pour la première fois à l'instant  $t_{pp}$  est appelé le temps de premier passage et noté  $\tau = t_{pp} - t_0$ .

Le premier passage se produit à des instants différents d'une réalisation à une autre et ce temps est bien une variable aléatoire. Il est bien connu que le temps moyen  $T(x_0)$  du premier passage de  $x_t$  à travers les barrières  $(x_1, x_2)$  se calcule par

$$T(x_0) = \frac{2 \left[ \int_{x_1}^{x_0} \frac{dy}{\psi(y)} \int_{x_0}^{x_2} \frac{du}{\psi(u)} \int_{x_1}^u \frac{\psi(x)}{g_1^2(x)} dx - \left( \int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{\psi(y)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{du}{\psi(u)} \int_{x_1}^u \frac{\psi(x)}{g_2^2(x)} dx \right) \right]}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{\psi(y)}} \quad (18)$$

avec  $\psi(y) = \exp\left(2 \int_{x_1}^y \frac{f_1(x)}{g_1^2(x)} dx\right)$

Nous illustrons l'utilisation de (18) pour estimer le retard de détection et le taux de fausses alarmes par l'exemple suivant.

**Exemple 5 :**

Supposons que le système vient de sauter du régime 2 au régime 1. Avec les seuils  $S_1 = 0.8$  et  $S_2 = 0.2$  (voir (5)), le Tableau 1 représente le temps moyen que met  $x_t$  à franchir 0.8 pour différentes valeurs initiales.

$x_0$	0.001	0.01	0.1	0.2
$T(x_0)$	0.0534	0.0476	0.0322	0.0251

**Tableau 1** - Le retard de détection moyen

Pour les valeurs initiales inférieures à 0.2, le retard moyen est de l'ordre 0.05. De même pour estimer le temps moyen entre deux fausses alarmes, nous supposons une série de valeurs initiales et le temps moyen que  $x_t$  met pour franchir (0.2, 1) est montré dans le Tableau 2 :

$x_0$	0.8	0.9	0.93	0.96
$T(x_0)$	5.2431	5.5044	5.5707	5.6324

**Tableau 2** - Délai moyen entre fausses alarmes

Le temps moyen est de l'ordre 5.5 et le taux est donc de l'ordre 0.18. Il est intéressant de mesurer une distance statistique entre deux régimes et de la comparer à la différence directe  $\Delta h = h_1 - h_2$ . En notant les densités de probabilité pour les deux régimes par  $p_{\eta_1}$  et  $p_{\eta_2}$  respectivement, nous prenons la distance de Kullback définie comme

$$d_k(p_{\eta_1}, p_{\eta_2}) = \int_0^1 p_{\eta_1}(x) \frac{p_{\eta_1}(x)}{p_{\eta_2}(x)} dx + \int_0^1 p_{\eta_2}(x) \frac{p_{\eta_2}(x)}{p_{\eta_1}(x)} dx \quad (19)$$

Après quelques manipulations, nous trouvons

$$d_k(p_{\eta_1}, p_{\eta_2}) = \frac{\alpha_{\eta_1}}{\alpha_{\eta_3}} + \frac{\alpha_{\eta_2}}{\alpha_{\eta_4}} \quad (20)$$

où  $\alpha_{\eta_1}$ ,  $\alpha_{\eta_2}$ ,  $\alpha_{\eta_3}$ , et  $\alpha_{\eta_4}$  sont quatre facteurs de normalisation dont deux sont liés aux  $\eta_1$  et  $\eta_2$  par  $\eta_3 = 2\eta_1 - \eta_2$  et  $\eta_4 = 2\eta_2 - \eta_1$ . Pour calculer cette distance statistique pour une modélisation parfaite nous devons alors évaluer (12) pour quatre situations avec  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$ ,  $\eta_3 = -1$  et  $\eta_4 = 2$  respectivement.

La méthode discutée dans ce papier possède comme avantages de pouvoir inclure de façon explicite le mécanisme de saut dans l'algorithme de détection.

**CONCLUSION**

Dans ce papier nous avons analysé un des filtres optimaux destinés à détecter des ruptures dans les systèmes dynamiques, le filtre de Wonham. Une méthode permettant d'évaluer systématiquement les performances du filtre a été développée à l'aide de la densité de probabilité conditionnelle de l'estimation basée sur l'intégration de l'équation de Fokker-Planck. En particulier, la non-consistance de l'estimation, la robustesse du filtre sont discutées et illustrées par des simulations.

Les performances de détection telles que le retard à la détection et le taux de fausses alarmes sont caractérisés comme des instants de premier passage et estimés numériquement. En fait ces quantités sont très importantes pour évaluer la performance global d'un système de commande utilisant la détection pour reconfigurer ses lois de contrôle.

Bien que nos études soient basées sur un cas particulier, mais la méthode peut s'étendre au cas des systèmes multirégimes avec des observations dynamiques et ponctuelles.

**REFERENCES**

[1] M. Basseville et A. Benveniste (eds) (1986). *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*. LNCIS, No.77, Springer-Verlag, Berlin.  
 [2] M. Mariton (1989). *Jump Linear Control Systems*. M. Dekker, New York.  
 [3] Y.D. Ji et H.J. Chizeck (1988). Controllability, Observability and Discrete-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control. *Int. J. Control*, Vol.48, No.2, 481 - 498.  
 [4] D.D. Sworder et D.S. Chou (1986). Passive Adaptation in Control System Design. Dans *Control and Dynamic Systems*, (eds) C.T. Leondes, No.24, 315 - 356.  
 [5] W.M. Wonham (1965). Some Applications of Stochastic Differential Equations to Optimal Nonlinear Filtering. *J. SIAM Control*, Ser.A, Vol.2, No.3, 347 - 369.  
 [6] E. Wong et B. Hajek (1985). *Stochastic Processes in Engineering Systems*. Springer-Verlag.  
 [7] A. Papoulis (1984). *Probabilities, Random Variables and Stochastic Processes*. (3ème ed.), Mc Graw-Hill.  
 [8] M. Basseville (1981). Edge Detection Using Sequential Methods for Change in Level - Part II: Sequential Detection of Change in Mean. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.*, Vol.ASSP-29, No.1, Feb., 32 - 50.  
 [9] R.L. Stratonovich (1963). *Topics in the Theory of Random Noise*, Volume 1: General Theory of Random Processes, Nonlinear transformations of Signals and Noise. Gordon and Breach.  
 [10] C.W. Gardiner (1983). *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences*. Springer-Verlag.  
 [11] O. Hijab (1987). *Stabilization of Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin.