

# STABILITÉ D'UN FILTRE DE PRÉDICTION AVEC UN QUANTIFICATEUR DANS LA BOUCLE

Christine UHL, Odile MACCHI

Laboratoire des Signaux et Systèmes  
CNRS-ESE, Plateau du Moulon  
91192 Gif-sur-Yvette Cedex

## RESUME

Nous étudions dans cet article la stabilité d'un prédicteur transverse, en tenant compte d'un quantificateur dans la boucle de prédiction; sa présence introduisant une partie réursive dans le filtre de prédiction. En nous limitant à un prédicteur d'ordre 1, de coefficient  $a$ , nous montrons que la condition  $|a| < 1$  est une condition de stabilité *suffisante, mais non nécessaire*, contrairement à ce qu'on pourrait croire à première vue. Lorsque  $a=1$ , le système étudié est celui, classique, de la modulation Delta. L'instabilité du système est due au bruit de saturation du quantificateur. Nous avons étudié deux cas. D'une part le cas de la faible non linéarité, où le quantificateur est une fonction analytique avec saturation et ayant une pente égale à 1 à l'origine. D'autre part le cas où le quantificateur est un relais idéal, et introduit une non linéarité importante. Nous avons trouvé, pour un signal d'entrée à bande étroite, une limite de stabilité de l'ordre de 4 pour une faible non linéarité et égale à 2 pour une forte non linéarité. La stabilité nécessite que l'amplitude de l'entrée ne soit pas démesurée par rapport au seuil de saturation.

## SUMMARY

In this paper the stability of a transverse predictor is studied, taking into account a quantizer in the prediction loop. The loop introduces a recursive part in the prediction filter. We restrict our scope to an order 1 predictor. It is shown that the condition  $|a| < 1$  for its coefficient is sufficient for stability, but is not necessary, which is an unexpected result. When  $a=1$  the system is the classical Delta modulation. The system instability is due to the quantizer saturation error. Two cases are studied. On the one hand the weak nonlinearity, where the quantizer is a saturation analytical function with a slope at the origin equal to one. On the other hand the strong nonlinearity, where the quantizer is an ideal relay. For a narrowband input signal, the stability limit is found close to 4 for a weak nonlinearity and equal to 2 for a strong one. For stability to hold it is required that the input amplitude is not too high w.r.t. the saturation level.

## I. INTRODUCTION

De nombreuses études ont été effectuées, au cours de ces dernières années, sur le comportement des filtres adaptatifs transverse [1]. Le système que nous considérons dans cet article peut être celui utilisé pour la réduction de débit dans le codage numérique de signaux téléphoniques. Pour cela on calcule l'estimée  $\hat{s}(n)$  du signal  $s(n)$  par un prédicteur adaptatif, qui est ici transverse; puis on transmet l'erreur de prédiction  $e(n)$ :

$$e(n) = s(n) - \hat{s}(n); \quad (I.1)$$

$$\bar{e}(n) = Q(e(n)), \quad (I.2)$$

après l'avoir quantifiée par une fonction non linéaire instantanée  $Q(\cdot)$  qui sature à  $\pm M$ .

Les études menées sur les filtres transverse adaptatifs ont généralement été faites en omettant le quantificateur qui numérise  $e(n)$  avant transmission, quantificateur qui est présent dans tout système numérique réel. En effet, il a été montré [3] que la structure optimale (au sens de l'erreur de codage) est celle où le quantificateur est placé dans la boucle de prédiction suivant le schéma de la figure I.1. On introduit au codeur le signal  $\tilde{s}(n)$ :

$$\tilde{s}(n) = \hat{s}(n) + \bar{e}(n). \quad (I.3)$$

Il s'agit du signal reconstitué à partir des  $\bar{e}(n)$  quantifiées:  $\hat{s}(n)$  est calculé à partir des échantillons passés de  $\tilde{s}(n)$ , donc finalement à partir de la suite des  $\bar{e}(j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . C'est ce qui permet, au décodeur, une reconstitution exacte de  $\tilde{s}(n)$ , puisqu'il dispose aussi de la suite  $\bar{e}(n)$ , après transmission. Ceci étant posé, la suite de l'article ne traite que du codeur.

Omettre ce quantificateur peut constituer une approximation grossière du système réel étudié. En effet, en plus des non linéarités

importantes qu'implique la présence d'un quantificateur dans la boucle de prédiction, celui-ci change la nature même du système: de transverse sans quantificateur, le système devient récurif. D'où des problèmes différents et plus difficiles à étudier.

La première étape de l'analyse consiste naturellement à étudier la stabilité du système au sens entrée  $s(n)$  bornée implique prédiction  $\hat{s}(n)$  bornée. C'est ce que nous faisons dans cet article. Il est en effet possible que le signal  $\hat{s}(n)$  explose sans que ceci soit visible au niveau de l'erreur de sortie  $\bar{e}(n)$ . Il en est ainsi à cause de la saturation du quantificateur, mais ceci pose des problèmes au décodage et implique un bruit de codage important. En considérant la boucle de la figure I.1 on pourrait penser que la stabilité du système exige que le système linéaire  $\tilde{s} \rightarrow \hat{s}$  soit à inverse stable. En fait il n'en est rien. Nous verrons, par exemple, que le coefficient  $a$  d'un prédicteur transverse d'ordre 1 peut être de module plus grand que 1 sans pour cela conduire à l'instabilité du système.

## II. GENERALITES

### II.1. Une condition suffisante de stabilité

Pour tout signal  $x(n)$  notons  $X(n-1)$  le vecteur des échantillons passés de  $x(n)$ .

$$X(n-1) \triangleq (x(n-1), \dots, x(n-q))^T. \quad (II.1)$$

De même pour les vecteurs  $\tilde{S}(n-1)$ ,  $S(n-1)$ ,  $E(n-1)$  etc... Le signal  $\hat{s}(n)$  s'écrit alors:

$$\hat{s}(n) = A^T \tilde{S}(n-1); \quad A = (a_1, \dots, a_q)^T \quad (II.2)$$

où  $A$  est le vecteur paramètre du filtre de prédiction d'ordre  $q$ .

D'après les équations (I.1) à (I.3) du système, on a les équations



$$\hat{s}(n) = A^T \hat{S}(n-1) + A^T \bar{e}(n-1), \quad (\text{II.3})$$

$$e(n) = s(n) - \hat{s}(n) = s(n) - A^T \hat{S}(n-1) + A^T \bar{e}(n-1). \quad (\text{II.4})$$

$\bar{e}(n-1)$  est le vecteur des échantillons passés du bruit de quantification:

$$\bar{e}(n-1) \triangleq (\bar{e}(n-1), \dots, \bar{e}(n-q))^T; \bar{e} \triangleq e - \bar{e}. \quad (\text{II.5})$$

L'équation (II.4) peut être décomposée en deux termes. Un terme linéaire en l'entrée:  $s(n) - A^T \hat{S}(n-1)$  et un terme  $A^T \bar{e}(n-1) =$

$\sum_{i=1}^q a_i (e(n-i) - \bar{e}(n-i))$  qui peut être considéré comme un bruit blanc si le quantificateur est fin; et qui est un terme non linéaire important si le quantificateur est grossier (peu de niveaux). C'est ce dernier terme qui est à l'origine du caractère récursif du prédicteur.

Pour simplifier les écritures, nous considérons dans la suite un prédicteur d'ordre 1. Une généralisation à  $q > 1$  ne pose pas de problème de principe.

Pour  $q = 1$  l'équation (II.3) ne fait intervenir que des scalaires. Par récurrence on obtient :

$$\hat{s}(n) = a^n \hat{s}(0) + \sum_{i=1}^n a^i \bar{e}(n-i). \quad (\text{II.6})$$

Deux cas se dégagent de cette équation selon que  $|a|$  est inférieur ou supérieur à 1.

**1<sup>er</sup> cas :**  $|a| < 1$ . Dans ce cas  $a^n \hat{s}(0)$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. D'autre part  $\bar{e}(n-i)$  est borné par le seuil de saturation  $M$  du quantificateur. On obtient ainsi :

$$\left| \sum_{i=1}^n a^i \bar{e}(n-i) \right| < \frac{Ma}{1-a}. \quad (\text{II.7})$$

La condition  $|a| < 1$  est donc suffisante pour que  $\hat{s}(n)$  et  $e(n)$  soient bornés. Dans les articles décrivant les systèmes de codage, cette condition est supposée vérifiée, probablement par un raisonnement implicite selon lequel elle serait aussi nécessaire.

**2<sup>ème</sup> cas :**  $|a| > 1$ . Dans l'équation (II.6), le terme  $a^n \hat{s}(0)$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini, sauf bien sûr si  $\hat{s}(0) = 0$ . Mais

rien n'empêche que le deuxième terme  $\sum_{i=1}^n a^i \bar{e}(n-i)$  vienne le com-

penser. C'est bien ce qui se passe lorsque le quantificateur est idéal ( $\bar{e} = e$ ). Nous montrons dans la suite qu'il existe une limite  $a_{lim} > 1$ , sur  $a$ , délimitant stabilité et instabilité: pour  $a$  plus grand que  $a_{lim}$   $\hat{s}(n)$  explose; pour  $a$  plus petit  $\hat{s}(n)$  est borné si  $s(n)$  est convenablement borné.

## II.2. Erreurs de granulation et de saturation.

Le bruit de quantification  $\varepsilon = e - \bar{e}$  est composé de deux types de bruit (voir fig. II.1), le bruit de granulation et le bruit de saturation. Le premier peut souvent être considéré comme du bruit blanc, si le quantificateur est assez fin. Il est par définition d'amplitude bornée. De la sorte, on voit sur l'équation (II.4) que si l'entrée  $s(n)$  est bornée, l'erreur de prédiction  $e(n)$  l'est aussi. C'est donc le bruit de saturation qui seul peut créer une instabilité du système, et nous l'étudions ici. Pour cela nous avons modélisé le quantificateur par un élément  $Q$  non linéaire, analytique avec une saturation au niveau  $M$ , et une pente  $p$  à l'origine:

$$\bar{e} = Q(e) = M \operatorname{th}(pe/M). \quad (\text{II.8})$$

## II.3. Inadéquation de l'analyse analogique.

Le bruit de saturation dans un système numérique tel que nous venons de le décrire a déjà été envisagé. C'est ainsi que Protonotarios [4] a approximé l'équation discrète (II.3) (pour  $q=1$ ) par l'équation différentielle :

$$\frac{d\hat{s}(t)}{dt} = (a-1)f_e \hat{s}(t) + af_e \bar{e}(t), \quad (\text{II.9})$$

$f_e$  étant la fréquence d'échantillonnage du système discret. Cette approximation est justifiée lorsque les harmoniques du spectre de  $\hat{s}(t)$  sont très petites devant  $f_e$  (condition C). Nous verrons au para-

graphe IV.2 que cette condition n'est pas vérifiée. D'après (II.9) le système étudié est approximé par le système de la figure (II.2). Ce dernier est composé d'une boucle analogique dans laquelle:

$$a' = (1-a)f_e; \quad M' = Mf_e, \quad (\text{II.10})$$

et  $v(t)$  est le bruit de saturation du quantificateur de la figure (I.1). La boucle analogique est suivie d'un échantillonneur et d'un organe non linéaire en escalier et sans saturation  $Q'$ , qui tient compte de l'effet de granulation.

Pour une entrée gaussienne de spectre  $1/(\omega^2 + a'^2)$ , nous pouvons appliquer la méthode de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov à la boucle analogique de la figure II.2. Soit  $P(v)$  la densité de probabilité de  $v(t)$ . L'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov s'écrit [4]:

$$\frac{d}{dv}((-a'v - Q(v))P) = \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dv^2}. \quad (\text{II.11})$$

$c$  étant une constante de normalisation, ceci se résoud en :

$$P(v) = c \exp(-a'v^2 - 2M'|v|). \quad (\text{II.12})$$

Pour qu'à une entrée bornée  $s(t)$  corresponde un bruit de saturation borné  $v(t)$  il faut que  $P(v)=0$  à l'infini. Or d'après (II.12) ceci implique la condition:  $a' > 0$  c'est à dire  $a < 1$ . Ceci est en contradiction avec les résultats de simulations et prouve l'inadéquation de l'approximation d'un système échantillonné par un système analogique. Nous allons donc faire une étude plus précise et tenir compte de la nature échantillonnée des signaux.

## III. SYSTEME FAIBLEMENT NON LINEAIRE.

### III.1. Signal d'entrée sinusoïdal.

Considérons le système linéaire sans quantificateur. Dans ce cas  $\bar{e} = e = e_0$  et les équations du système sont, pour tout  $a$ :

$$e_0(n) = s(n) - \hat{s}_0(n), \quad (\text{III.1.a})$$

$$\hat{s}_0(n+1) = a \hat{s}_0(n) + a e_0(n) = a s(n). \quad (\text{III.1.b})$$

Si le signal d'entrée  $s(n)$  est une sinusoïde de fréquence  $f$  et d'amplitude 1, échantillonnée à la fréquence  $f_e$ , alors

$$e_0(n) = \gamma \sin(n\phi + \psi); \quad \phi \triangleq 2\pi f/f_e; \quad (\text{III.2.a})$$

$$\gamma = (1 - 2a \cos\phi + a^2)^{1/2}, \quad (\text{III.2.b})$$

où la phase  $\psi$  est sans importance.

Considérons à présent que le quantificateur introduit une faible non linéarité. C'est le cas où  $a$  et  $p$  sont proches de 1, et où  $M$  est très grand par rapport à 1. Nous posons :

$$\hat{s}(n) = \hat{s}_0(n) + \hat{s}_1(n); \quad e(n) = e_0(n) + e_1(n), \quad (\text{III.3})$$

( $\hat{s}_0(n), e_0(n)$ ) étant solution de (III.1);  $\hat{s}_1$  est solution de :

$$\hat{s}_1(n+1) = -a e_0(n) + a \hat{s}_1(n) + a Q(e(n)); \quad e_1(n) = -\hat{s}_1(n). \quad (\text{III.4})$$

Nous faisons les deux hypothèses suivantes :

$$p |e_0 + e_1| / M \ll 1, \quad (\text{H1})$$

$$|e_1| \ll |e_0|. \quad (\text{H2})$$

Les simulations montrent que l'ordre de grandeur de l'approximation (H2) est  $|e_0|_{\max} / |e_1|_{\max} > 5$ . De même la figure III.1 montre que si (H1) et (H2) sont vérifiées la non linéarité peut être approximée par :

$$Q(e) = M \left( \frac{p}{M} e - \frac{1}{3} \left( \frac{p}{M} e \right)^3 \right). \quad (\text{III.5})$$

Il y a en effet 80 db d'atténuation pour l'harmonique 3 du spectre de  $Q(e)$ , par rapport à l'harmonique 1 qui est à la fréquence  $f$  de l'entrée. Si (H2) est vérifiée alors  $e^3$  peut être approximée par :

$$e^3 = (e_0 + e_1)^3 = e_0^3 + 3 e_0^2 e_1. \quad (\text{III.6})$$

En reportant (III.6) dans (III.5) on obtient :

$$Q(e_0 + e_1) = p e_0 - \frac{p^3}{3M^2} e_0^3 + (p - \frac{p^3}{M^2} e_0^2) e_1. \quad (\text{III.7})$$

Il découle de (III.4), (III.7) que

$$\hat{s}_1(n+1) = a(1 - p(1 - \frac{p^2}{M^2} e_0^2(n))) \hat{s}_1(n) + a(p-1) e_0(n) - \frac{ap^3}{3M^2} e_0^3(n). \quad (\text{III.8})$$

Pour que  $\hat{s}_1(n)$  reste borné il faut que le module du coefficient de  $\hat{s}_1(n)$  soit en moyenne inférieur à 1. Soit:

$$F(a) \triangleq a(1 - p(1 - \frac{p^2}{M^2} E(e_0^2(n)))) \quad (\text{III.9})$$

$$E(e_0^2(n)) = \gamma^2 / 2 = (1 - 2a \cos\phi + a^2) / 2. \quad (\text{III.10})$$

La condition de stabilité sur  $a$  est donc:

$$|F(a)| = |a(1 - p(1 - \frac{p^2}{2M^2}\gamma^2))| < 1. \quad (III.11)$$

La valeur de  $a_{lim}$  trouvée par (III.11) est comparée, à celle trouvée par simulations dans le tableau 1. Dans ces simulations,  $M=5$ ,  $f = 300$  Hz et  $f_e = 8000$  Hz. On voit que la théorie concorde avec les simulations, même si les hypothèses faites ne sont plus exactement vérifiées pour  $a$  proche de  $a_{lim}$  (mais inférieur). En effet l'amplitude de  $e_0$  et de  $e_1$  augmente avec  $a$ , de telle sorte que  $ple_0 + e_1/M \# 1$  et que  $le_1 \# |e_0|$  lorsque  $a$  est proche de  $a_{lim}$ . L'hypothèse (H1) peut donc être élargie à  $ple_0 + e_1/M < 1$  et de même (H2) peut être élargie à  $le_1 \# |e_0|_{max}$ .

$a_{lim} \setminus p$	1.0	1.1	1.2	1.5
simulation s(n) sinusoïdal	3.4	4.0	4.8	4.5
simulation s(n) gaussien	3.0	3.5	4.0	4.3
par (III.11)	4.3	4.4	4.4	4.2

Tableau 1. Limite de stabilité en fonction de la pente  $p$  pour un signal unitaire à bande étroite ( $M=5$ ).

### III.2. Signal d'entrée gaussien.

Supposons que l'entrée  $s(n)$  est un signal gaussien, centré, de fréquence  $f$ , généré à partir de deux signaux gaussiens indépendants  $b^1(n)$ ,  $b^2(n)$  à bande étroite devant  $f_e$  et modulés par deux porteuses en quadrature. Il peut être exprimé selon:

$$s(n) = \cos(2\pi n f / f_e) b^1(n) - \sin(2\pi n f / f_e) b^2(n).$$

Dans ce cas  $\hat{s}_0(n)$  et  $e_0(n) = s(n) - a s(n-1)$  sont gaussiens.

L'écart-type  $\sigma_e$  de  $e(n)$  vaut :

$$\sigma_e^2 = (1 + a^2) \sigma^2 - 2 a \Gamma_s(1), \quad (III.12)$$

en fonction de la puissance  $\sigma^2$  et de la corrélation  $\Gamma_s(\cdot)$  de  $s(n)$ . Naturellement:

$$\Gamma_s(p) = \Gamma_b(p) \cos(2\pi p f / f_e). \quad (III.13)$$

Il découle du fait que  $b^1(n)$  et  $b^2(n)$  sont des bruits à bande étroite que:

$$\Gamma_s(1) = \sigma^2 \cos(2\pi f / f_e) \quad (III.14)$$

si bien que

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 (1 + a^2 - 2 a \cos(2\pi f / f_e)) = \sigma^2 \gamma^2 \quad (III.15)$$

où la quantité  $\gamma$  est définie par (III.2.b).

Les équations (III.3) à (III.8), qui ont été trouvées sans faire d'hypothèses sur la nature du signal d'entrée  $s(n)$ , sont donc encore valables, pourvu que les hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiées, pour une puissance  $\sigma^2 = 1/2$  équivalente à celle de la sinusoïde unitaire. Les simulations montrent qu'il y a 60db d'atténuation pour l'harmonique 5 par rapport à l'harmonique 1 et que l'ordre de grandeur de (H2) est  $le_0 \# |e_1|_{max} > 4$ . Dans ce cadre la condition de stabilité reste donnée par (III.11).

Cette fois encore le Tableau 1 montre la concordance entre la théorie et les simulations. Les hypothèses (H1) et (H2) peuvent être élargies respectivement à  $ple_0 + e_1/M < 1$  et  $le_1 \# |e_0|_{max}$ .

On a donc montré, dans ce paragraphe, que dans le cas d'une faible non linéarité,  $a$  peut aller bien au delà de 1, jusqu'à des valeurs de l'ordre de 4, sans conduire à l'instabilité du système.

## IV SYSTEME FORTEMENT NON LINEAIRE.

Considérons maintenant le cas où le quantificateur est un relais idéal ( $p = \infty$  dans (II.8)),  $Q(e) = M \text{sign}(e)$ .

L'équation générale du système est d'après (II.3) et (II.4):

$$\hat{s}(n+1) = a \hat{s}(n) + aM \text{sign}(s(n) - \hat{s}(n)). \quad (IV.1)$$

Posons la condition initiale égale à  $\hat{s}$ :  $\hat{s} \triangleq \hat{s}(0)$ . (IV.2)

### IV.1. Cas où $a = 1$ .

Il s'agit ici du système classique de modulation Delta. Soit  $s(n)$  un signal borné quelconque. On montre aisément par récurrence que tant que  $s(2n) < \hat{s}$  et  $s(2n+1) > \hat{s} - M$  la trajectoire  $\hat{s}(n)$  oscille à la

fréquence  $f_e/2$  entre les niveaux  $\hat{s}(2n) = \hat{s}$  et  $\hat{s}(2n+1) = \hat{s} - M$ , en encadrant ainsi  $s(n)$  (voir figure IV.1.A). On a un encadrement oscillatoire semblable dans la configuration IV.1.B tant que  $s(2n) > \hat{s}$  et  $s(2n+1) < \hat{s} + M$ .

Si à un instant la trajectoire de  $s(n)$  traverse vers le bas son encadrement ( $[\hat{s} - M, \hat{s}]$  ou  $[\hat{s}, \hat{s} + M]$  selon la configuration A) ou B)) il y a une phase C) de décroissance linéaire de  $\hat{s}(n)$  où  $s(n) < \hat{s}(n)$ . Cette phase est de durée finie, faute de quoi  $s(n)$  tendrait vers l'infini comme  $\hat{s}(n)$ , ce qui est en contradiction avec la bornitude de  $s(n)$ . Ainsi à un instant  $N$  on trouvera  $\hat{s}(N) < s(N)$ , tandis qu'à l'instant précédent l'on avait  $\hat{s}(N-1) > s(N-1)$ . On se retrouve alors dans une configuration d'encadrement A) ou B) selon la parité de  $N$  à condition de remplacer  $\hat{s}$  par  $\hat{s}' = \hat{s}(N-1)$  ou  $\hat{s}(N)$  suivant le cas. De même pour une phase D) de croissance quand  $s(n)$  traverse son encadrement vers le haut.

Nous avons donc montré que pour  $a=1$ , avec une entrée bornée quelconque la solution générale de l'équation (IV.2) est bornée. C'est la stabilité recherchée.

### IV.2. Cas où $a > 1$ .

Considérons d'abord le cas d'une entrée nulle:

$$\hat{s}(n+1) = a(\hat{s}(n) - M \text{sign}(\hat{s}(n))). \quad (IV.3)$$

Cette récurrence est illustrée géométriquement sur la figure IV.2. Le point B a pour coordonnées  $(\hat{s}_{lim}, \hat{s}_{lim})$ , avec :

$$\hat{s}_{lim} = aM/(a-1). \quad (IV.4)$$

Il est clair que si  $\hat{s} > \hat{s}_{lim}$ ,  $(\hat{s}(n) - \hat{s}_{lim})$  explose en  $a^n$ . De même si  $\hat{s} < -\hat{s}_{lim}$ . En revanche si  $|\hat{s}| < \hat{s}_{lim}$ , deux cas sont à distinguer suivant que le point B "domine" A ou non (voir figure IV.2).

Si  $a < 2$ . Le point B domine A; pour tout  $|\hat{s}| < \hat{s}_{lim}$ , la récurrence amène le point  $(\hat{s}(n), \hat{s}(n+1))$  dans le carré DED'E', dont il ne peut s'échapper. Ainsi, passée la phase initiale,  $\hat{s}(n)$  est-il borné par  $aM$ , ce qu'on vérifie parfaitement sur les simulations.

Si  $a > 2$ . Le point A domine B. Même si  $|\hat{s}| < \hat{s}_{lim}$ , on vérifie aisément que la récurrence finira par amener la valeur  $|\hat{s}(n)|$  au-delà de  $\hat{s}_{lim}$ , ce qui produira une instabilité exponentielle.

Le cas d'une entrée  $s(n)$  non nulle se traite de manière similaire. Les droites AB' et A'B sont invariantes, mais la verticale AA' qui les délimite se déplace entre les points  $C_1 = (\min(s(n)), 0)$  et  $C_2 = (\max(s(n)), 0)$ . Si  $|s(n)|$  est borné par  $c$ , l'ordonnée maximale de A est  $a(c+M)$ . Pour que A soit dominé par B d'ordonnée  $aM/(a-1)$ , condition nécessaire à la stabilité, il faut donc que :

$$a < (2M + c) / (M + c), \quad (|s(n)| < c). \quad (IV.5)$$

Dans toutes nos simulations, nous avons fait varier  $a$ , pour des signaux d'entrée à bande étroite, avec  $M$  fixé et  $c=1$ , en cherchant la limite de stabilité. Il y a eu concordance absolue.

La valeur  $a=2$  est donc bien une limite de stabilité puisqu'elle n'autorise aucun signal à l'entrée du système ( $c=0$ ).

Si l'on considère que  $c$ 'est  $a$  qui est fixé ( $a < 2$ ) on peut donc énoncer ainsi le résultat précédent :

Si  $a < 2$ , il existe une amplitude limite pour l'entrée  $s(n)$ ,

$$c(a) = M(2-a)/(a-1), \quad (IV.6)$$

en-dessous de laquelle le système est stable, pourvu qu'il soit initialisé en-dessous de  $\hat{s}_{lim}$ . Cette limite n'est guère contraignante lorsque  $a$  est proche de 1 et elle est conforme au bon sens. Mais il faut quand même remarquer que ce type de stabilité est moins fort que pour un système linéaire récursif, dans lequel, si  $a < 1$ ,  $\hat{s}(n)$  borné correspond toujours  $\hat{s}(n)$  borné.

Le diagramme de récurrence précédent est inspiré de l'étude des systèmes récurrents et nous a fait songer à du chaos. On a une indication de sa présence en considérant les figures IV.3 et IV.4 tracées avec  $s(n)=0$ . La figure IV.3, qui donne  $\hat{s}(n)$ , montre des fréquences transitoires qui décroissent au cours du temps (doublement des périodes). La figure IV.4 montre que  $\hat{s}(n)$  a un spectre de bruit (alors qu'il n'y a pas d'entrée!), et que la condition C du paragraphe II.3 n'est pas vérifiée. Nous envisageons de poursuivre la présente étude dans cette direction.

## REFERENCES

- [1] B.WIDROW, S.D. STEARNS, "Adaptive Signal Processing", Prentice Hall, 1985.



- [2] O. MACCHI, "Le filtrage adaptatif en télécommunications", Annales des Télécommunications, Tome 36, n° 11-12, (Nov-Dec. 1981).
- [3] M. BONNET, O. MACCHI, "Compromis entre bruit de codage et débit de transmission", GRETSI 1989.
- [4] E.N. PROTONOTARIOS, "Application of the Fokker-Planck-Kolmogorov Equation to the Analysis of Differential Pulse Code Modulation Systems", J. Franklin Inst., 289 (January 1970) pp.31-45.

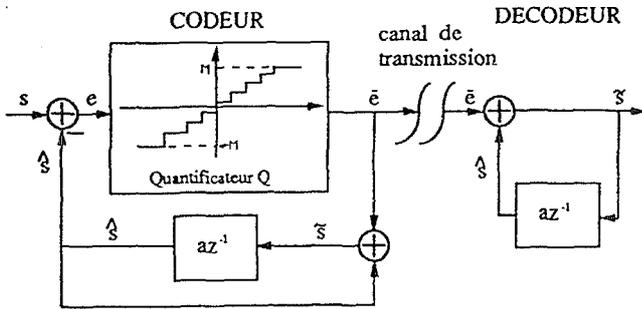


Figure I.1 Chaîne de transmission par prédiction/quantification

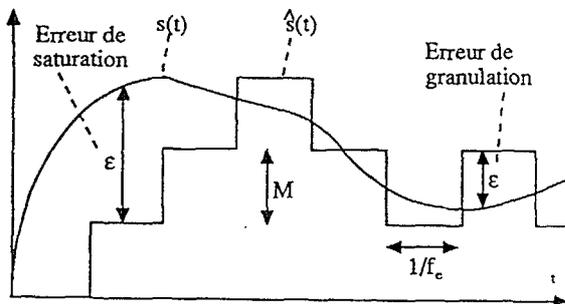


Figure II-1 Erreur de saturation et de granulation. Modulation Delta

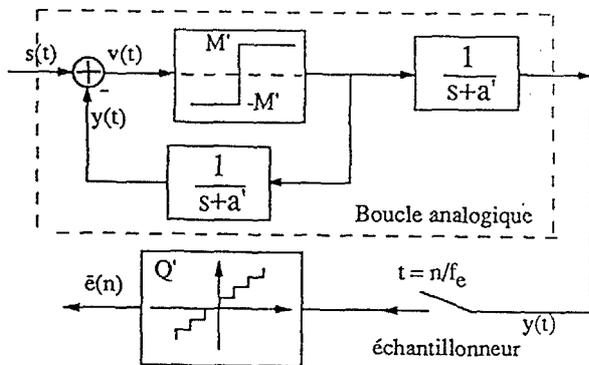


Figure II.2 Découplage erreur de saturation et erreur de granulation

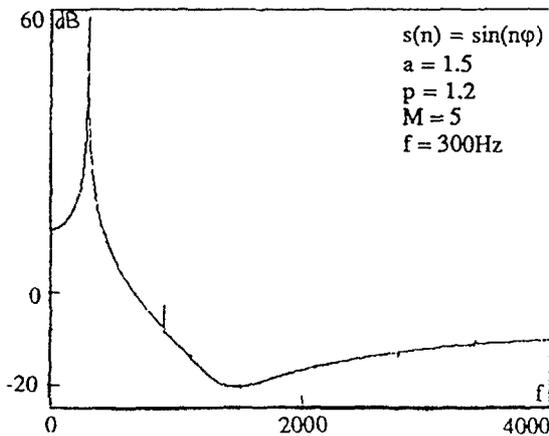


Figure III.1. Spectre de  $Q(e(n))$ .

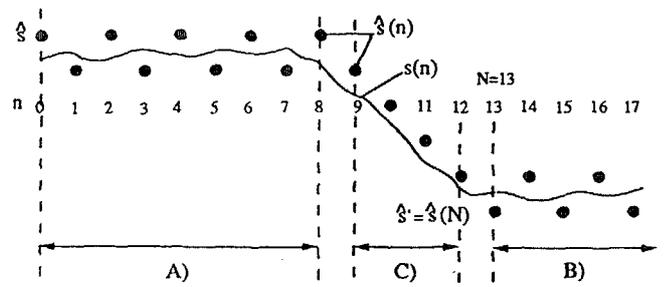


Figure IV.1 Solution générale pour la modulation Delta

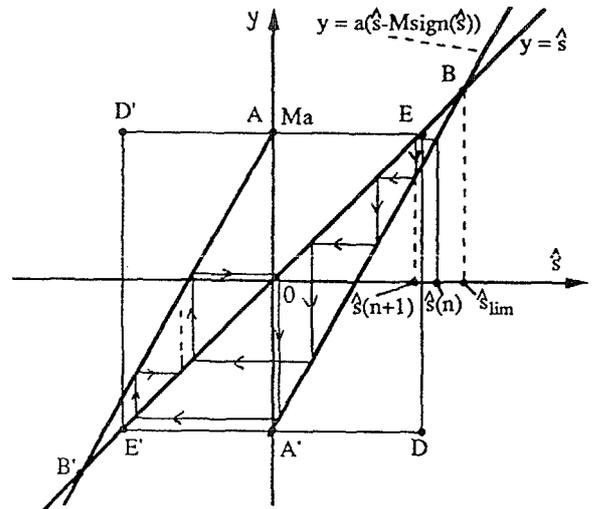


Figure IV.2 Illustration géométrique de la récurrence non-linéaire

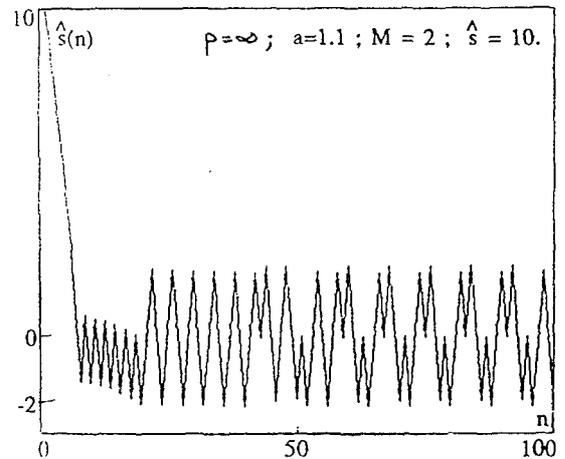


Figure IV.3.  $\hat{s}(n)$  en fonction de n.

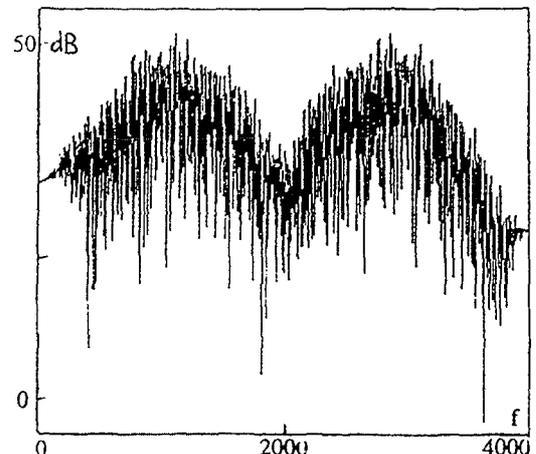


Figure IV.4. Spectre de  $\hat{s}(n)$   $p = \infty$ ;  $a = 1.1$ ;  $M = 2$ ;  $\hat{s} = 10$ .