



## COMPRESSION D'IMPULSION EN LARGE BANDE

J. Bertrand\*, P. Bertrand\*\* et J.P. Ovarlez\*\*

\*Université Paris VII - LPTM - F 75251 PARIS

\*\*ONERA - BP 72 - F 92322 CHATILLON

## RESUME

L'étude des codes radar à grand produit BT conduit à l'utilisation de la fonction d'ambiguïté exacte intégrant les retards et les compressions de temps. Quelques propriétés non classiques de cette fonction sont présentées comme corollaires d'études antérieures concernant les représentations temps-fréquence affines des signaux. En particulier, une méthode de calcul rapide rendant le tracé d'une fonction d'ambiguïté large bande aussi aisé que celui d'une fonction de Woodward est proposée.

## SUMMARY

In broad-band situations the true time-compression and delay radar ambiguity function must be substituted for Woodward's approximation. Some non classical properties of this function are presented as consequences of previous studies relative to the affine time-frequency representations of signals. In particular a fast computation technique is proposed which exhibits the same efficiency for broad-band plotting as the FFT in the narrow-band case.

## 1. INTRODUCTION.

La réponse radar d'un réflecteur parfait animé d'une vitesse uniforme est caractérisée par une transformation du type:

$$s(t) \longrightarrow s'(t) = s(a^{-1}t - b) \quad (1)$$

où  $s(t)$  représente le signal (réel) émis. Les paramètres  $a$  et  $b$  de la transformation sont déterminés par la distance et la vitesse radiale de la cible. Ce modèle de réflexion conduit à la fonction d'ambiguïté générale (cf. par exemple [1] [2] [3]):

$$|\chi(a_1, b_1; a_2, b_2)|^2 = (a_1 a_2) \times \quad (2)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} S(a f_1) S^*(a f_2) e^{-2i\pi(a_1 b_1 - a_2 b_2) f} df \right|^2$$

dans laquelle  $S(f)$  représente la partie à fréquences positives de la transformée de Fourier du signal  $s(t)$ . L'utilisation de codes à bande étroite permet généralement d'assimiler l'effet Doppler à une translation de fréquence et la fonction d'ambiguïté (2)

est alors bien approchée par la forme classique de Woodward. Toutefois lorsque la vitesse des cibles, la durée et la largeur de bande des signaux émis augmentent, l'approximation précédente cesse d'être justifiée et l'étude des ambiguïtés doit être reformulée à partir de la forme exacte (2). On peut noter que cette dernière expression ne dépend que des combinaisons:

$$a = a_2/a_1 \quad b = b_2 - (a_1/a_2)b_1$$

et peut s'écrire:

$$|\chi(a, b)|^2 = a \left| \int_{\mathbb{R}^+} S(f) S^*(af) e^{2i\pi abf} df \right|^2 \quad (3)$$

A des effets relativistes près, les paramètres  $a$  et  $b$  sont liés à la vitesse radiale relative  $\delta v$  et à la distance relative  $\delta x$  des cibles par:

$$a = 1 - 2(\delta v/c) \quad b = (2/c) \delta x$$

La suite des développements est consacrée à l'interprétation et à l'exploitation pratique de la forme (3).



## II. INTERPRETATION TEMPS-FREQUENCE DES AMBIGUITES.

La fonction d'ambiguïté de Woodward s'exprime à partir de la représentation de Ville-Wigner du signal par la formule:

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} P_W(t, f) P_W(t-\tau, f-\nu) dt df \quad (4)$$

Cette expression met en évidence le lien entre les ambiguïtés et la structure du signal dans le plan temps-fréquence.

En large bande une description adéquate des signaux est donnée par la représentation affine [4]:

$$P(t, f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi u f t} S(f\lambda(u)) S^*(f\lambda(-u)) \times \frac{u}{2\text{sh}(u/2)} du \quad (5)$$

$$\text{où } \lambda(u) = (ue^{-u/2}, 2\text{sh}(u/2))^{-1}$$

Les propriétés de covariance et d'unitarité de cette expression permettent d'exprimer la fonction d'ambiguïté affine (3) sous la forme:

$$|\chi(a, b)|^2 = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} P_A(t, f) P_A(a^{-1}t-b, af) dt df \quad (6)$$

L'équation obtenue est la généralisation large bande de l'interprétation temps-fréquence (4) des ambiguïtés.

L'étude des représentations temps-fréquence conduit naturellement à la notion de signaux localisés. En bande étroite, ces signaux sont soit des chirps purs de pente quelconque soit des chirps à modulation d'amplitude gaussienne c'est-à-dire des formes étendues de signaux de Gabor. La fonction de Woodward de ces signaux est calculable analytiquement et donne une illustration du lien entre ambiguïté et relations d'incertitude.

En large bande, il est également possible d'introduire des états localisés. Les analogues des chirps purs sont les signaux de la forme:

$$S_{\xi, \beta}(f) = e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta - \frac{1}{2}} \quad \xi, \beta \in \mathbb{R} \quad (7)$$

dont la représentation affine (5) est donnée par:

$$P_A(t, f) = (1/f) \delta(t-\xi-\beta f^{-1}) \quad (8)$$

Ces signaux sont ainsi localisés sur des hyperboles du demi-plan temps-fréquence ( $f > 0$ ) et constituent donc une réalisation des signaux "Doppler-invariants" introduits par Rihaczek [5]. Pour  $\beta=0$ , la famille (7) se réduit à la classe des signaux localisés dans le temps.

Les signaux de Gabor ont aussi des équivalents dans la théorie affine. Ils sont donnés par [6]:

$$S_{t_0, f_0}(f) = K f^{2\pi\lambda f_0 - \frac{1}{2}} e^{-2\pi\lambda f} e^{-2i\pi t_0 f} \quad (9)$$

où  $K$  est un facteur de normalisation.

Dans (9), les paramètres  $t_0$  et  $f_0$  repèrent le point du demi-plan temps-fréquence auquel l'état est attaché et  $\lambda$  caractérise l'étalement spectral du signal. Ces états sont désignés dans la suite sous le nom de signaux minimaux.

## III. LE GROUPE DE COMPRESSION

Il est bien connu que le groupe  $SL(2, \mathbb{R})$  des transformations linéaires du plan  $(t, f)$  conservant l'élément de surface laisse invariant l'ensemble des fonctions d'ambiguïté de Woodward [7]. Par produit semi-direct de ce groupe avec le groupe de Heisenberg, on obtient le groupe métaplectique inhomogène qui est le groupe le plus large agissant par transformations ponctuelles dans l'ensemble des fonctions de Woodward.

Pour les signaux à large bande l'analogue du groupe métaplectique, qu'on conviendra d'appeler groupe de compression, est le produit direct du groupe affine par un groupe de translations. Dans le demi-plan temps-fréquence, l'élément  $g = (a, b, c)$  de ce groupe agit selon:

$$(t, f) \longrightarrow (a(t+b+cf^{-1}), a^{-1}f)$$

La représentation dans l'espace des signaux est donnée par:

$$S(f) \longrightarrow S_g(f) = a^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi(abf+clnf)} S(af) \quad (10)$$

On remarque qu'une telle transformation laisse stable la famille (7) des signaux Doppler-invariants tout en agissant sur les paramètres  $\beta$  et  $\xi$ .

L'action du groupe de compression sur la représentation temps-fréquence est donnée par:

$$P(t, f) \longrightarrow P_g(t, f) = P(a^{-1}t-b-a^{-1}cf^{-1}, af) \quad (11)$$

La propriété de groupe et l'invariance de la mesure  $dt df$  déterminent la transformation de la fonction d'ambiguïté lors de la compression. En effet, compte tenu des relations (9) et (11), la fonction d'ambiguïté du signal  $S_{g_0}$  s'écrit:

$$|\chi_{g_0}^{\xi_0}(a, b)|^2 = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} P_{g_0}(t, f) P_{g_0}(a^{-1}t-b, af) dt df \\ = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} P_{g_0}(t, f) P_{g_0 \delta}(t, f) dt df$$

d'où par changement de variables:



$$\begin{aligned}
 |\chi_{\mathbb{A}}^{\mathbb{S}_0}(a, b)|^2 &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} P(t, f) P_{\mathbb{S}_0 \mathbb{S}_0}^{-1}(t, f) dt df \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} P(t, f) P(a^{-1} \langle b_0 + a_0^{-1} b - a^{-1} b_0 \rangle, af) dt df \\
 &= |\chi_{\mathbb{A}}(a, b_0 + a_0^{-1} b + a^{-1} b_0)|^2 \quad (12)
 \end{aligned}$$

Notons au passage que c'est la propriété d'invariance du sous-groupe affine qui est déterminante pour assurer la stabilité de la classe des fonctions d'ambiguïté (3) par le groupe de compression.

#### IV. TRAITEMENT NUMERIQUE DE LA FONCTION D'AMBIGUÏTE.

Le tracé de la fonction de Woodward est usuellement basé sur l'utilisation de la FFT. L'extension de cette méthode à la forme exacte (3) pose des problèmes nouveaux dus à la présence de dilatations qui introduisent de sérieuses difficultés d'échantillonnage. L'objet de ce paragraphe est de présenter une technique qui résout ces difficultés. La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation de Mellin de la forme:

$$M(\beta) = \int_{\mathbb{R}^+} S(f) f^{2i\pi\beta - \frac{1}{2}} df \quad (13)$$

et de son inverse:

$$S(f) = \int_{\mathbb{R}} M(\beta) f^{-2i\pi\beta - \frac{1}{2}} d\beta \quad (14)$$

Cette transformation vérifie la relation d'unitarité:

$$\int_{\mathbb{R}^+} S_1(f) S_2^*(f) df = \int_{\mathbb{R}} M_1(\beta) M_2^*(\beta) d\beta \quad (15)$$

Les formules (13)-(14) peuvent s'interpréter comme le développement du signal  $S(f)$  sur une base de signaux Doppler-invariants du type (7). L'intérêt principal d'un tel développement est de transformer toute dilatation des signaux:

$$S(f) \longrightarrow S'(f) = a^{\frac{1}{2}} S(af)$$

en multiplication:

$$M(\beta) \longrightarrow M'(\beta) = a^{-2i\pi\beta} M(\beta)$$

de leur transformée de Mellin. L'exploitation pratique des formules (13) et (14) est fondée sur l'existence d'une forme discrète qui se prête au calcul rapide.

Partant d'une fonction  $S(f)$  à bande limitée à l'intervalle  $(f_1, f_2)$ , on peut lui associer une fonction à support tout  $\mathbb{R}^+$  définie par:

$$\check{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q^{n/2} S(fQ^n) \quad (16)$$

où  $Q$  désigne le rapport  $f_2/f_1$ . Dans la suite cette fonction est dite "dilatocyclée" de  $S(f)$ . On peut vérifier que la transformée de Mellin de  $\check{S}(f)$  est de forme impulsionnelle du type:

$$\check{M}(\beta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \check{m}_p \delta(\beta - p/\ln Q) \quad (17)$$

L'expérience des représentations temps-fréquence affines [4] a montré que la localisation d'un signal dans une région du plan temps-fréquence entraînait sa localisation en variable de Mellin  $\beta$ . Si le domaine utile de  $\beta$  est l'intervalle  $(-\beta_0, \beta_0)$ , il est possible de remplacer  $\check{M}$  par sa périodisée  $\tilde{M}$  de période  $N/\ln Q \geq 2\beta_0$  où  $N$  désigne un entier assurant l'inégalité précédente. L'inverse de Mellin d'une telle fonction périodique est un signal de type impulsionnel géométrique qui s'écrit:

$$\tilde{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=K}^{K+N-1} q^{m+(nN/2)} S(q^m) \delta(f - q^{m+nN}) \quad (18)$$

où  $q = Q^{1/N}$  et  $K$  dépend du support de  $S$ .

Compte tenu de son origine  $\tilde{S}(f)$  est de plus dilatocyclique. Les deux distributions  $\check{M}(\beta)$  et  $\tilde{S}(f)$  ne sont chacune caractérisées que par  $N$  coefficients dont les relations mutuelles définissent la transformation de Mellin discrète. Cette dernière s'écrit par exemple:

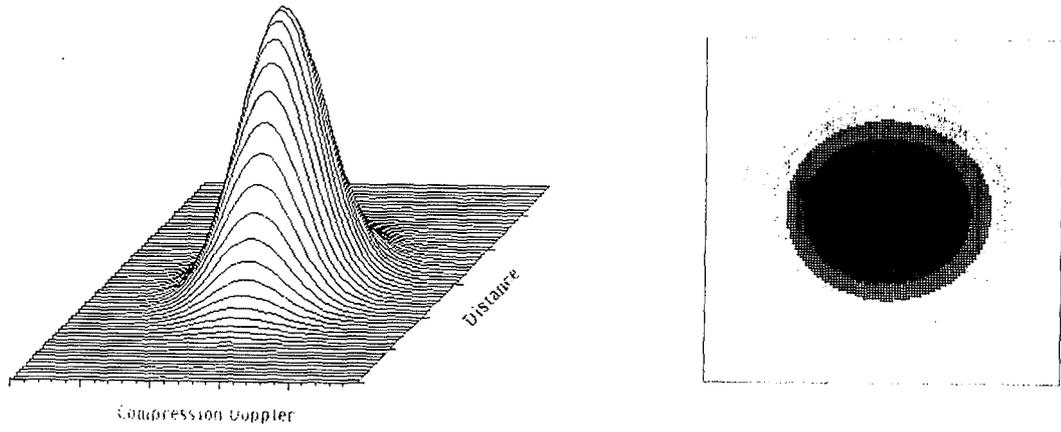
$$M\left(\frac{k}{\ln Q}\right) = \frac{\ln Q}{N} \sum_{m=K}^{K+N-1} q^{m/2} S(q^m) e^{2i\pi km/N} \quad (19)$$

L'analogie de (19) avec l'expression de la transformée de Fourier discrète permet l'utilisation d'un algorithme de FFT pour l'exploitation pratique de la transformation de Mellin.

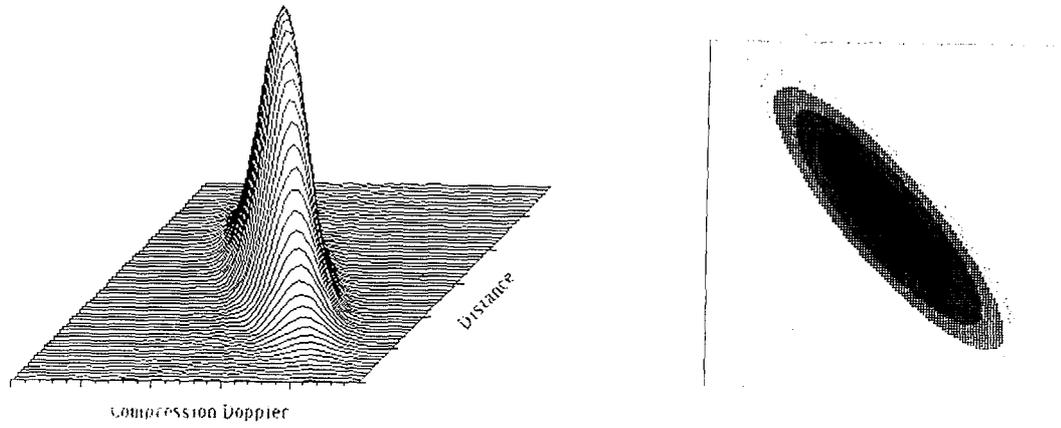
Les figures 1, 2 et 3 résultent de trois applications de la transformation de Mellin rapide au calcul de fonctions d'ambiguïté exactes. La figure 1 correspond à un signal localisé de la forme (9). La figure 2 donne la fonction d'ambiguïté d'un signal du même type ayant subi une compression de la forme (10). La figure 3 donne le résultat de l'application de la technique à un signal classique.

#### BIBLIOGRAPHIE

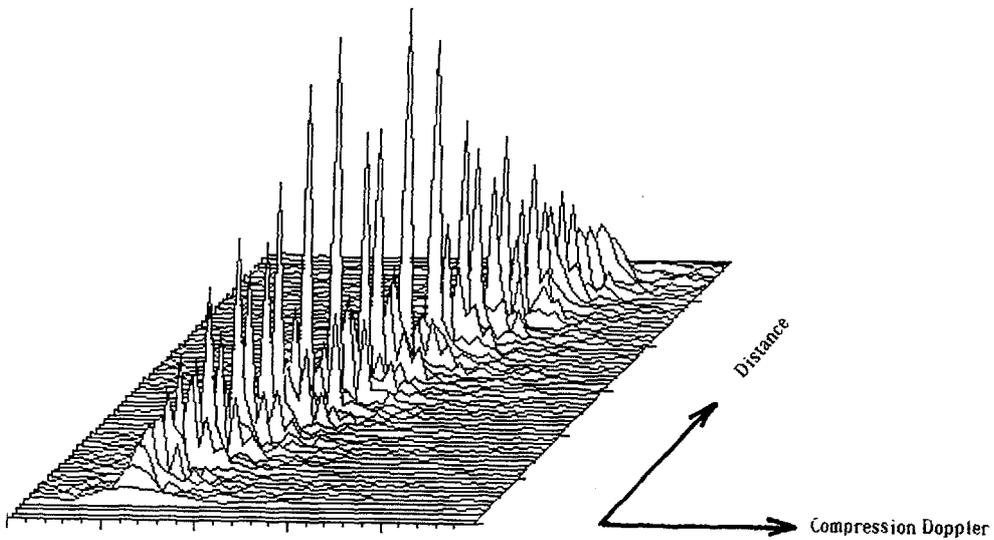
- [1] E. J. Kelly and R. P. Wishner, IEEE-MIL 9, 56-69 (1965).
- [2] G. Jourdain, Ann. Telecommunic. 32, 19-23 (1977).
- [3] J. M. Speiser, IEEE-IT 13, 122-123 (1967).
- [4] P. Bertrand et J. Bertrand, Rech. Aerosp. no 5, p. 277-283 (1985).
- [5] A. W. Rihaczek, "Principles of high resolution radar", McGraw Hill 1969.
- [6] J. R. Klauder dans "Functional Integration: Theory and Applications", J. P. Antoine et E. Tirapegui Ed., Plenum, NY, 1980.
- [7] A. Papoulis, "Signal Analysis", McGraw Hill 1977.
- [8] A. Unterberger, Département de Mathématiques de l'Université de Reims, note non publiée (1984).



**FIG 1 :** *Fonction d'ambiguité exacte d'un signal minimal*



**FIG 2 :** *Fonction d'ambiguité exacte d'un signal minimal comprimé*



**FIG 3 :** *Fonction d'ambiguité exacte d'un code de type chirp réalisé par sauts de fréquence*