



ANALYSE PAR ONDELETTES DES SIGNAUX ASYMPTOTIQUES :
Emploi de la phase stationnaire

B. ESCUDIE[†] R. KRONLAND-MARTINET^{*} A. GROSSMANN^{**}
et B. TORRESANI ^{**}

[†]L.T.S. - U.A. 346 • L.M.A. - CNRS ** C.P.T. - Luminy
ICPI Lyon CNRS - CRP Marseille Université de Luminy - Marseille

RESUME

La représentation en ondelettes décrit un signal à une combinaison linéaire d'ondes changées d'échelle et décalées. Elle s'interprète comme une fonction d'interambiguïté. Pour les signaux asymptotiques le module de la transformée se concentre autour d'une arête définissant le "squelette" de la représentation. Elle permet néanmoins la reconstitution approchée du signal avec une grande qualité. Ces propriétés sont utiles pour interpréter les récepteurs des systèmes SONARS animaux.

SUMMARY

The wavelet representation describes finite energy signals with scaled and delayed copies of a standard wave. It may be interpreted as a cross ambiguity function. For asymptotic signals the representation exhibits a main ridge which defines the so called "skeleton". It enables a rather accurate reconstruction of modulated signals. These properties appear very useful in the study of animal SONAR systems.



Introduction : La représentation en ondelettes met en oeuvre les propriétés de changement d'échelle, à la différence de la transformation de FOURIER adaptée à l'invariance par décalage temporel du filtrage linéaire. Elle ramène un signal d'énergie finie à une superposition linéaire de signaux changés d'échelle et retardés. Le sens physique d'une telle transformation est lié à l'interprétation des signaux filtrés dans des systèmes à bande relative ou "surtension" constante. Ceci est fondamental dans l'étude de la propagation des signaux en géophysique, où cette représentation fut introduite [1]. Le développement de cette représentation est d'une importance certaine pour les signaux acoustiques, notamment pour les récepteurs bioacoustiques des systèmes Sonars animaux en présence d'effet DOPPLER.

1) Représentation en ondelettes et fonction d'Ambiguïté :

Nous utilisons ici la définition de la représentation d'ondelettes [2][3]. Soit $S \in L^2(\mathbb{R})$, un signal d'énergie finie à valeur réelle et $G(t)$ l'ondelette subissant les changements d'échelle et les décalages. On appelle représentation en ondelettes $\mathcal{S}(t, \eta)$ la quantité : [2]

$$\mathcal{S}(t, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{\mathbb{R}} S(u) G^*(\eta(u-b)) du$$

où $G(u) \hat{=} g(v) = \int_{\mathbb{R}} G(u) e^{2i\pi v u} du$ possède les propriétés suivantes : [2][3][3b]

$$G \hat{=} g \in L^2, \int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2 dv < \infty, g(v) = g(v) \cdot U(v)$$

où $U(v)$ est la fonction unité d'HEAVISIDE traduisant le caractère analytique de g . Si G obéit aux relations (2), G est dite admissible et analytique.

Utilisant les propriétés définies en (1) et (2) on montre alors que : [2][3b]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} |\mathcal{S}(t, \eta)|^2 d\eta dt = \frac{1}{C_g} \int_{\mathbb{R}} |S(t)|^2 dt, C_g = \int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2 dv$$

il existe un noyau reproduisant P tel que : $\mathcal{S}(t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} P(t, \eta; t', \eta') \mathcal{S}(t', \eta') d\eta' dt'$

$$P(t, \eta; t', \eta') = \frac{k}{C_g} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} G((t-t')\eta) G^*((t-t')\eta') d\tau$$

Ceci permet de reconstituer $S(t)$ à partir de $s(t, \eta)$ et de $G(t)$ par intégration sur η et t . Compte tenu des propriétés de P la relation de reconstitution à date t fixée s'écrit : [3b]

$$S(t) = k_g \int_0^{\infty} \mathcal{S}(t, \eta) \eta^{1/2} d\eta, k_g =$$

Cette relation permet une inversion aisée de la représentation en ondelettes $\mathcal{S}(t, \eta)$.

La définition de \mathcal{S} exprimée par la relation (1) :

$$\mathcal{S}(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \int_{\mathbb{R}} g^*\left(\frac{v}{\eta}\right) S(v) e^{2i\pi v t} dv = \sqrt{\eta} \int_{\mathbb{R}} S(u) G^*(\eta(u-t)) du$$

montre que la représentation s'interprète comme la fonction d'interambiguïté entre le signal S et l'ondelette analysante G :

$$\mathcal{S}(t, \eta) = \chi_{SG}(t, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{\mathbb{R}} S(u) G^*(\eta(t-u)) du$$

Cette dernière remarque relie la représentation à l'ensemble des recherches faites sur la fonction d'ambiguïté et à l'interprétation physique proposée par Y. MEYER à l'aide du changement d'échelle [4][5]. Cet aspect incite alors à utiliser les procédés déjà mis en oeuvre dans l'étude des signaux et de leur fonction d'ambiguïté [6].

2) Représentation en ondelettes et signaux asymptotiques :

a) Signaux asymptotiques : [6][7]

Nous appelons signaux asymptotiques les signaux d'énergie finie $Z \in L^2_{\mathbb{C}}$ tels que le modèle exponentiel est proche du signal analytique : $Z_m = A e^{i\Phi} \simeq Z(t)$, où Z est le signal analytique associé au signal à valeur réelle S : [6]

$$S(t) = A(t) \cos \Phi(t), Z(t) = A(t) e^{i\Phi(t)}$$

Ces signaux possèdent des épanouissements au sens de D. GABOR à valeur $\Delta t \Delta \nu$ grande : [8] $\Delta t \Delta \nu \gg \frac{1}{4\pi}$

$A(t)$ et $\Phi(t)$ sont l'amplitude et la phase instantanées, $\nu_i(t)$ fréquence instantanée est telle que : $\nu_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$

b) Représentation en ondelettes et phase stationnaire : [7]

En utilisant la définition de la représentation en ondelette et l'écriture analytique de l'ondelette $G(t)$ où :

$$G(t) = A_G(t) e^{i\Phi_G(t)}$$

$$\mathcal{S}(b, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{\mathbb{R}} A(u) A_G(\eta(u-b)) e^{i\mu \mathcal{L}(u)} du$$

avec $\mu \mathcal{L}(u) = \Phi(u) - \Phi_G(\eta(u-b))$

où μ est un paramètre caractéristique du type de modulation de fréquence considéré : [6] $\mu = B T, \frac{2\pi \nu_d}{\omega}$ avec B, T bande et durée du signal, ν_d fréquence de début et a paramètre de modulation pour une modulation hyperbolique.

La méthode de la phase stationnaire indique que : [7] $F(\mu) = \int_a^b M(u) e^{i\mu \mathcal{L}(u)} du, \mu \gg 1$

F se manifeste par l'existence de points stationnaires u_s tels que : $\dot{\mathcal{L}}(u_s) \equiv 0, \ddot{\mathcal{L}}(u_s) \neq 0$:

$$F = \left(\frac{\pi}{2\mu \ddot{\mathcal{L}}(u_s)} \right)^{1/2} M(u_s) e^{i\mu \mathcal{L}(u_s)} e^{i(\text{sgn} \ddot{\mathcal{L}}(u_s)) \frac{\pi}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$



e) Etude d'un signal à modulation hyperbolique en fréquence :

L'étude porte sur un signal du type : $Z(u) = A(u) e^{i \frac{\omega_d}{\alpha} \log|1+\alpha u|}$, $0 \leq u \leq T$ de fréquence instantanée $\nu_i = \frac{\Phi}{2\pi}$ tel que : $\mu = \omega_0/\alpha \gg 1$; un tel type de signal correspond à la classe de ceux émis par les chauves souris pour leur sonar de veille : $\nu_d = 100 \text{ kHz}$, $T = 3 \text{ ms}$, d'où $\mu = 1250$ et $BT \approx 270$. A l'aide d'une ondelette à fréquence fixe ν_c l'analyse conduit à : $\mathcal{S}_z \approx \frac{1}{2} \frac{A(u_s) A_G(\eta(u_s - b))}{|\nu_i(u_s)|^{1/2}} e^{i \mu \mathcal{L} - i \frac{\pi}{4}}$ avec : $\nu_i(u_s) = -\nu_d \alpha |1 + \alpha u_s|^{-2}$, $0 \leq u_s \leq T$

L'arête de la surface $\mathcal{S}_z(\eta, b)$ déterminée par le maximum de $A_G(u)$ est donnée dans le plan (η, b) par la courbe : $\eta = \tilde{\nu}_i(b) = \frac{\nu_d}{\nu_c} (1 + \frac{\eta b}{T})^{-1}$ avec : $\alpha = \frac{\nu_d}{T}$, $\tilde{\nu}_i = \nu_M (1 + nb/T)^{-1}$, où b_c vaut : $b_c = \frac{T}{m} \frac{(\nu_d - \eta \nu_c)}{\nu_c}$ d'après l'équation précédente. L'argument de \mathcal{S}_z s'écrit alors : $|\mathcal{S}_z| \approx \frac{1}{2} A(b) \sqrt{\nu_c \eta} A_G(\eta(b - b_c))$ dont le premier terme logarithmique se met sous la forme : $2\pi(Na/m) \log(\nu_d/\eta \nu_c)$ tandis que le second lié à la phase de l'ondelette présente une fréquence d'oscillation $\eta \nu_c$ et un retard caractéristique lié aux taux de modulation : $\pi'_d = \frac{\pi}{m} (\frac{\nu_d}{\nu_c} (1 - \eta)) = \frac{\pi}{m} \frac{\nu_d}{\nu_c} (1 - \eta)$.

3) Squelette de la Représentation et Reconstitution du Signal :

a) Notion de squelette de la représentation en ondelette :

Les résultats précédents relatifs au module de s_z révèlent une arête dont la trace dans le plan (η, b) coïncide avec la loi $\tilde{\nu}_i(u)$ pour une ondelette à fréquence pure. On retient que l'information de cette arête en définissant le squelette de $\mathcal{S}_z(\eta, b)$, noté $\tilde{\mathcal{S}}_z$, tel que : $\tilde{\mathcal{S}}_z = \mathcal{S}_z(\eta, b) \cdot \delta(\eta - \tilde{\nu}_i(b))$, $u'_s = u_s(\eta(b))$ où $\tilde{\nu}_i(b)$ est l'équation de la trace dans le plan (η, b) . Cette quantité se déduit de $\mathcal{S}_z(\eta, b)$ en posant $A_G(0) = 1$.

b) Reconstitution du signal à partir du squelette :

Si l'information contenue dans $\tilde{\mathcal{S}}_z(\eta, b)$ est convenable il est alors possible de reconstituer le signal $Z(t)$ à l'aide de la relation : [3b][2] $Z(t) = k_g \int_0^\infty \tilde{\mathcal{S}}_z(\eta, t) \eta^{1/2} d\eta$ d'où l'on déduit (à k_g près défini par G seul), soit : $Z_r(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} \left[\frac{A(u'_s) e^{i \Phi(u'_s)}}{\eta(b)^{-1/2} \mathcal{L}(u'_s)^{1/2}} \right]_{u'_s=t}$ ce qui fait apparaître une perturbation sur le module de Z par rapport à $Z(t)$. La phase $\Phi(t)$ et la fréquence instantanées ν_i sont présentées puisque l'erreur affecte uniquement le module par les deux termes $\eta^{1/2}$ et $\mathcal{L}(u'_s)$ contenant $-\eta^2 \nu_c (\eta t - b)$. Dans le cas d'une ondelette à fréquence pure $\nu_c(u) = 0$, ce qui fait disparaître cet effet perturbateur.

c) Reconstitution dans le cas d'une modulation de fréquence hyperbolique : En reprenant le signal étudié en 2c) avec : $\Phi(t) = \frac{\omega_0 t}{1 + \alpha t}$, $\nu_i(t) = \frac{\nu_0}{(1 + \alpha t)^2}$, $\mu = 150$, $T = 1,5 \text{ ms}$

dans les conditions décrites auparavant on tente la reconstitution $Z_r(t)$. L'effet sur l'amplitude sera lié au terme $\eta(b)^{1/2} \tilde{\nu}_i(b)^{-1/2}$ avec $\tilde{\nu}_i(b) = \nu_i/\nu_c = \eta(b)$. L'effet de distorsion d'amplitude est alors lié à $(1 + \alpha b)^{3/2}$. Connaissant $\tilde{\nu}_i(b)$, équation de l'arête, cet effet peut alors être compensé. La figure 3 a, b suivante nous montre le signal $S = \text{Re}(Z)$ et $S_r = \text{Re}(Z_r)$, où la loi de modulation de fréquence et de phase est parfaitement conservée.

d) Représentation des récepteurs des systèmes SONAR animaux :

La réception du signal S additionné d'un bruit gaussien stationnaire peut être rendue optimale par corrélation de $\mathcal{S}_z(\eta, b) + \mathcal{S}_B(\eta, b)$ par la copie $\mathcal{S}_z(\eta, b)$ ou par le "squelette" $\tilde{\mathcal{S}}_z$. Cette opération fournit alors un rapport signal sur bruit optimisé par filtrage adapté (cf. B. ESCUDIE et al. Journées Ondelettes 1989 Marseille 29/05 au 3/06 1989).

CONCLUSION : L'emploi de la phase stationnaire pour les signaux asymptotiques permet d'exprimer commodement la représentation d'ondelettes. Dans ce cas le module de la représentation exhibe une arête permettant de définir le "squelette" de la représentation. Celui-ci permet la reconstitution du signal sans perturbation sur les lois de modulation de fréquence. Ceci permet d'envisager la corrélation entre signal et squelette.

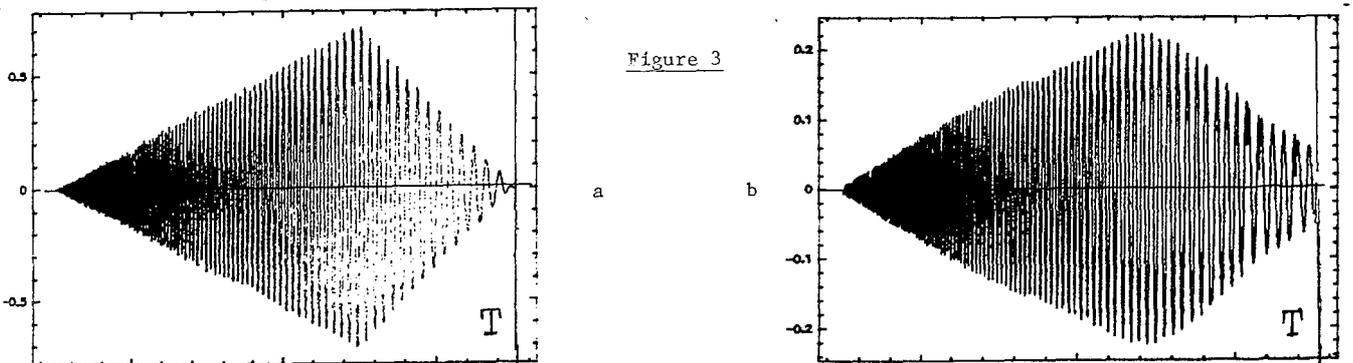


Figure 3

[1] J. MORLET et al. Geophysics vol 47 p 222-236 1982
 [2] A. GROSSMANN J. MORLET SIAM J. Math-Analysis vol 15 p 723-736 1984
 [3] A. GROSSMANN et al. Inverse Problems. Advances in Electronics and Electron Physics suppl. 19 Academic Press 1987
 [3b] A. GROSSMANN R. KRONLAND-MARTINET Signal Processing IV (EUSIPCO) vol. II p 475-482 North Holland Publ. 1988
 [4] A. BERTHON 11ième Colloque Traitement Signal GRETSI vol 1 p 157-160 1987
 [5] Y. MEYER Pour la Science N°119 p 28-37 Septembre 1987
 [6] P. FLANDRIN B. ESCUDIE Colloque Traitement Signal vol 1 p 69-74 1981
 [7] E. T COPSON Asymptotic Expansions Cambridge Univ. Press. p 30-34 1967
 [8] D. GABOR Journ. IEEE (London) vol 93 Novembre 1946
 [9] R. THOM Stabilité Structurale et morphogénèse Benjamin Ed. 1972
 [10] T. POSTON I. STEWARD Catastrophe Theory and its applications (cf § Oscillating Integrals Pitman Ed. Londres 1978