

UNE METHODE RECURSIVE POUR LA DECOMPOSITION HARMONIQUE  
DE PISARENKO

\* \* \* \*  
YACOUBI-S. E.M. - MENEZ J. - MATHIEU P. - ALENGRIN G.  
\*\* \*\*  
VILLEMUR C. - CASTANIE F.

\* LASSY - Laboratoire Signaux et Systèmes Université de Nice  
\*\* GAPSE - Laboratoire d'Electronique - ENSEEIH de Toulouse

et GRECO 69 "SARTA" du CNRS

RESUME

Dans cette communication, nous présentons deux méthodes d'estimation "adaptatives" pour la décomposition harmonique de Pisarenko. L'estimation des paramètres est calculée à chaque nouvelle donnée d'observation permettant ainsi de suivre l'évolution des fréquences de signaux sinusoidaux lorsqu'elles varient lentement dans le temps. La première méthode algorithmique est basée sur la méthode de la puissance itérée inverse, dans laquelle l'initialisation, pour chaque nouvelle itération est réalisée à partir de l'estimation des paramètres obtenue à l'instant précédent. La deuxième méthode utilise une modélisation autorégressive (A.R.) avec "soustraction de bruit".

1. INTRODUCTION

La méthode de la décomposition harmonique proposée par Pisarenko [1] est basée sur la recherche du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice de corrélation de la séquence d'observation. Cette méthode donne à la fois une bonne résolution spectrale et une estimation sans biais des fréquences des composantes sinusoidales présentes dans le signal.

Dans la première méthode proposée et développée au LASSY, la recherche du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre est obtenue par la méthode de la puissance itérée inverse (choisie pour sa stabilité et sa convergence rapide) avec comme initialisation à chaque instant  $t$  le vecteur propre calculé à l'instant précédent  $(t - 1)$ . Cette méthode permet de réduire considérablement le nombre d'itérations pour la recherche du vecteur propre associé à la valeur propre minimale.

La deuxième méthode, développée au GAPSE, utilise le principe de la "soustraction du bruit". Elle consiste à effectuer une modélisation A.R. du signal à partir de sa matrice de corrélation, à la diagonale principale de laquelle on enlève à chaque itération sur l'ordre, une fraction croissante de la variance de l'erreur de prédiction linéaire (EPL), aboutissant ainsi en quelques itérations à la solution de Pisarenko.

2. PRINCIPE DE LA METHODE DE PISARENKO

On considère un signal d'observation bruité

$$x(t) = s(t) + b(t) \quad t=0,1,\dots \quad (1)$$

$$\text{avec } s(t) = \sum_{i=1}^p C_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (2)$$

signal sinusoidal contenant  $p$  composantes sinusoidale d'amplitudes  $C_i$ , de pulsations  $\omega_i$  et de phases  $\phi_i$ , vérifiant l'équation récurrente d'ordre  $2p$  :

SUMMARY

In this paper, we present two adaptive estimation methods for the Pisarenko's harmonic retrieval in which the estimation is obtained for each new data allowing to follow the evolution of sinusoidal signal parameters with a very slow time varying frequency. The first algorithmic method is based on the inverse power iteration method in which the initialization, at each new iteration, is realized from the estimation of the obtained parameters on the previous instant. The second method uses an autoregressive (A.R.) modelisation with "soustraction of the noise".

$$s(t) + \sum_{k=1}^{2p} a(k) s(t-k) = 0 \quad (3)$$

$a(0) = 1$  et  $a(i) = a(2p-i)$  pour  $i = 1, \dots, p$

et  $b(t)$  un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\beta$  que l'on suppose non corrélé avec le signal  $s(t)$ . En remplaçant dans (3)  $\{s(t-k)\}$  par  $\{x(t-k) - b(t-k)\}$ , on obtient une équation que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{matrix} \text{T} & & \text{T} \\ \underline{X}_t & \underline{A} & = & \underline{B}_t & \underline{A} \end{matrix} \quad (4)$$

avec :

$$\begin{matrix} \text{T} \\ \underline{X}_t = ( & x(t) & x(t-1) & \dots & x(t-2p) & ) \\ \text{T} \\ \underline{B}_t = ( & b(t) & b(t-1) & \dots & b(t-2p) & ) \\ \text{T} \\ \underline{A} = ( & a(0) & a(1) & \dots & a(2p) & ) \end{matrix}$$

En prémultipliant (4) par  $\underline{X}_t^T$  et en prenant l'espérance mathématique  $E\{ \cdot \}$ , on aboutit à une équation aux valeurs propres :

$$(R_x - \beta I) \underline{A} = 0 \quad (5)$$

Le vecteur paramètre  $\underline{A}$  est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\beta$  de la matrice de corrélation  $R_x$  du signal d'observation  $x(t)$  [2].

3. CALCUL DU VECTEUR PROPRE

On utilise le résultat suivant [3] :

-1  
la séquence de vecteurs  $\underline{A}(l+1) = R^{-1} \underline{A}(l)$  ( $l$  variant de 0 à  $L$ ) converge pour  $L$  suffisant vers le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice  $R$  ( $R$  matrice symétrique, définie positive), la séquence étant initialisée par  $\underline{A} = \underline{I}$  vecteur unité. La valeur propre minimale est obtenue par minimisation avec contrainte :



MIN de  $\sum x(t)$  avec la contrainte  $\hat{A} \hat{A}^T = 1$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, on aboutit à la solution donnant la valeur propre minimale :

$$\beta_{min} = \frac{\hat{A}^T R \hat{A}}{\hat{A}^T \hat{A}}$$

4. PREMIERE METHODE D'ESTIMATION PROPOSEE

Lorsque les fréquences des composantes sinusoidales varient lentement dans le temps la recherche du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre est encore obtenue par application de la méthode précédente avec introduction d'un facteur d'oubli dans le calcul de la corrélation à chaque instant. Pour le calcul du vecteur paramètre  $\hat{A}(t,L)$  à l'instant  $t$ , on initialise la méthode de la puissance itérée inverse, par le vecteur propre calculé à l'instant précédent  $(t-1)$  :  $\hat{A}(t,0) = \hat{A}(t-1,L)$  ce qui permet de réduire considérablement le nombre  $L$  d'itérations, tout en gardant les avantages de la méthode de calcul du vecteur propre, à savoir une convergence rapide et une estimation des fréquences non biaisée. En désignant par  $\alpha$  le facteur d'oubli,  $N$  la fenêtre d'initialisation et de calcul de la corrélation ( la plus petite possible ), et  $p$  le nombre supposé connu a priori de composantes sinusoidales contenues dans le signal. L'algorithme est le suivant [6] :

initialisation :  $t = 0$

$R(0)$  = Matrice des coefficients de corrélation  $R_x(0,i,j)$   $i,j = 0, \dots, 2p$

$$R_x(0,i,j) = \frac{1}{N-2p} \sum_{n=0}^{N-2p} x(n+2p-i)x(n+2p-j)$$

pour  $l = 1, 2, \dots, L$

$$\begin{cases} \hat{A}(0,l+1) = \beta(0,l) R(0) \hat{A}(0,l) \\ \beta(0,l) = \frac{\hat{A}^T(0,l) R(0) \hat{A}(0,l)}{\hat{A}^T(0,l) \hat{A}(0,l)} \\ \hat{A}(0,l) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \end{cases}$$

Normalisation du vecteur paramètre  $\hat{A}(0,l)$

itération :  $t = 1, 2, \dots$

$R(t)$  = Matrice  $\{ R_x(t,i,j) = \alpha R_x(t-1,i,j) + x(N+t-i)x(N+t-j)$  pour  $i,j=0, \dots, 2p$  }

pour  $l = 1, 2, \dots, L$

$$\begin{cases} \hat{A}(t,l+1) = \beta(t,l) R(t) \hat{A}(t,l) \\ \beta(t,l) = \frac{\hat{A}^T(t,l) R(t) \hat{A}(t,l)}{\hat{A}^T(t,l) \hat{A}(t,l)} \\ * \hat{A}(t,0) = \hat{A}(t-1,L) \end{cases}$$

Normalisation du vecteur paramètre  $\hat{A}(t,l)$

Résolution du polynome caractéristique :

$$1 + a(t,1) z^{-1} + \dots + a(t,2p) z^{-2p} = 0$$

donnant les pulsations  $\omega_i$  pour  $i = 1, \dots, p$

5. DEUXIEME METHODE D'ESTIMATION PROPOSEE

Soient  $x(t)$  le signal bruité sur une fenêtre d'observation  $[0,t]$ ,  $R(t)$  une estimation de sa matrice de corrélation et  $R$  sa séquence

de corrélation, on démontre que le vecteur paramètre  $\hat{A}$  converge vers le vecteur propre de la décomposition harmonique de Pisarenko correspondant à la plus petite valeur propre  $\beta$  de la matrice  $R(t)$  lorsqu'il est calculé à partir de l'expression suivante [4] :

$$\hat{A} = ( R(t) - \beta I )^{-1} R$$

Comme l'algorithme A.R. utilise des corrélations, on choisit une fenêtre d'analyse de l'ordre de  $(20 * p)$  points. Il est possible de se ramener à une fenêtre plus courte en utilisant des covariances, mais la correction à effectuer sur la diagonale principale de la matrice de covariance devient alors plus délicate [5].

A l'instant  $t$  et pour  $m = 1$  on a :

$$\hat{A}(t,1) = ( R(t) - \beta(1) I )^{-1} R$$

et pour  $m = 2, 3, \dots$  ( récursion sur l'ordre )

$$\hat{A}(t,m) = ( R(t) - \beta(m) I )^{-1} R$$

avec  $\beta_m(t) = \sum_{j=2}^m 1 / G \mu(j-1)$

$\mu(j)$  = résidu de l'algorithme de modélisation autorégressive,  $G$  = gain de faible valeur .

La suite des  $\beta_m(t)$  pour  $t$  variable donne des estimations successives de la puissance du bruit  $\beta$ . Il suffit d'itérer sur les  $\beta_m(t)$  en vérifiant à chaque pas si la matrice  $( R - \beta_m(t) I )$  ne devienne pas singulière. Pour un tel critère d'arrêt, le coût du test est faible si l'on utilise un algorithme A.R. du type Levinson (plus simple à corriger seul le premier terme de la corrélation est modifié).

6. RESULTATS EXPERIMENTAUX

a) Calcul de la valeur propre minimale et du vecteur propre associé dans le cas d'une seule sinusoïde de fréquence constante pour un rapport S/B = 0. dB. On étudie en fonction du nombre d'itérations et du nombre  $N$  d'échantillons utilisé dans le calcul des coefficients de corrélation, l'estimation de la fréquence et de la valeur propre minimale. Comme on pouvait s'y attendre, on constate sur la Fig. 1a et la Fig. 1b que cette estimation n'est correcte que pour  $N$  suffisamment grand. De plus on remarque qu'il n'y a plus d'amélioration de cette estimation à partir d'un certain nombre d'itération.

b) Application de la première méthode adaptative à un signal sinusoidal de fréquence constante perturbé par un bruit blanc. Pour la Fig. 2a le rapport S/B est de +10 dB, le facteur d'oubli  $\alpha = 1$ , la fenêtre initiale  $N = 9$ , le nombre de paramètres  $2p + 1 = 3$ , le nombre d'itérations  $L = 3$  ; l'initialisation à l'instant  $t$  est le vecteur paramètre calculé à l'instant précédent  $(t-1)$  :  $\hat{A}(t,0) = \hat{A}(t-1,3)$ . La convergence est assez rapide et l'estimation de la fréquence est non biaisée. Pour la Fig. 2b le rapport S/B est de 0. dB, la courbe 1 est obtenue pour un nombre d'itération  $L = 10$  et sans initialisation par le vecteur paramètre calculé à l'instant précédent, la courbe 2 pour un nombre d'itérations  $L = 3$  avec initialisation par le vecteur paramètre calculé à l'instant précédent. On remarque que la convergence est plus rapide et le biais en fréquence réduit.

c) Comparaison des deux méthodes à un signal sinusoidal de fréquence variable perturbé

par un bruit blanc.  
Le signal sinusoïdal est de la forme  $s(t) = C \sin(2\pi f(t)t + \phi)$ , la loi de variation de sa fréquence  $f(t)$  est de type parabolique

$$f(t) = f_0 + a t^2$$

sa fréquence instantanée  $F(t)$  définie par  $F(t) = d(f(t).t) / dt$  s'écrit :

$$F(t) = f_0 + 3 a t$$

La Fig. 3a montre le résultat de l'estimation par la première méthode dans le cas d'un signal ayant une loi de variation de fréquence  $f(t)$  parabolique ( $f_{min} = 0.1$  à  $f_{max} = 0.2$ ). Le rapport S/B est de +10. dB le nombre total de paramètres  $2p+1 = 3$ . On remarque que suivant la valeur du facteur d'oubli ( $\alpha = 0.999, 0.95, 0.90, 0.85$ ) on estime soit la loi de variation  $f(t)$  pour  $\alpha$  très voisin de 1 ou la fréquence instantanée  $F(t)$  pour  $\alpha$  plus petit.

La Fig. 3b donne le résultat obtenu par la deuxième méthode appliquée au même signal pour la valeur de  $m = 10$  à l'initialisation et  $m = 2$  à 3 pour les itérations suivantes,  $G = 0.1$ , la fenêtre visualisée [ 56 à 256 ]. On obtient les mêmes résultats que la première méthode avec un facteur d'oubli  $\alpha = 1$ . On représente sur la Fig. 3c le résultat de la première méthode pour un rapport S/B = 0. dB et un facteur d'oubli  $\alpha = 0.8$ .

d) Application de la première méthode pour un signal comportant deux composantes sinusoïdales de fréquences constantes et à variation linéaire par intervalle.

Dans le cas de la Fig. 4a le rapport S/B est de +30. dB, le nombre total de paramètres  $2p + 1 = 5$ , la fenêtre initiale  $N = 19$  et le facteur d'oubli  $\alpha = 0.8$ .

La Fig. 4b montre le résultat obtenu pour les mêmes conditions que précédemment mais avec un nombre total de paramètres  $2p + 1 = 7$ . La résolution du polynôme caractéristique donne 3 fréquences ce qui permet d'augmenter la résolution lorsque les deux fréquences se croisent. La Fig. 4c montre le résultat obtenu dans les mêmes conditions que la Fig. 4b en introduisant un critère de distance par rapport au cercle unité ( $< 0.01$ ) appliqué aux racines du polynôme caractéristique permettant de ne déterminer que les fréquences présentes dans le signal.

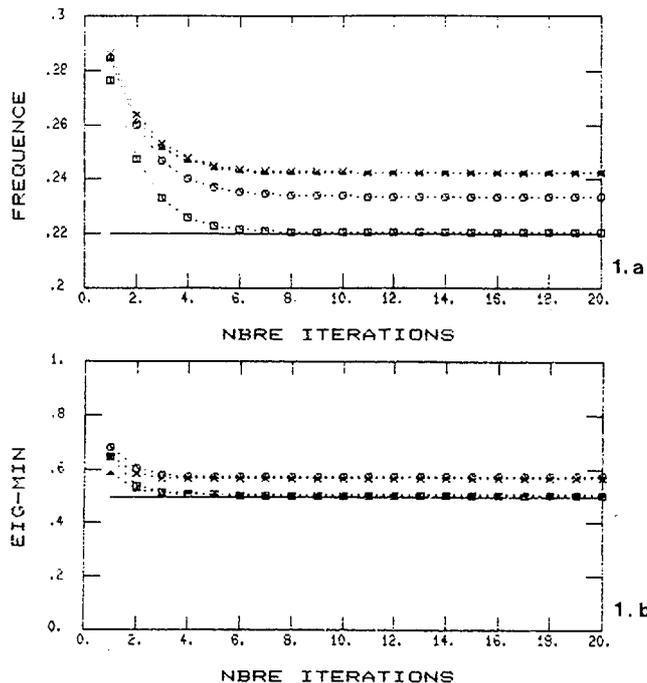


Fig. 1. Estimation du vecteur propre par la méthode de la puissance itérée inverse

e) Application de la première méthode à un signal comportant une seule composante sinusoïdale de fréquence variable par intervalle de rapport S/B = +20. dB. La variation de la fréquence instantanée est d'abord constante, puis elle subit une variation linéaire décroissante avec changement de phase à l'origine, suivie d'une variation linéaire croissante avec un saut de fréquence sa variation finalement est parabolique avec changement de phase à l'origine et un saut de fréquence. La Fig. 5a donne la variation de la fréquence instantanée sur chacun des intervalles de variation précédemment définis ainsi que la fréquence estimée par la première méthode proposée. La Fig. 5b représente la variation de la valeur propre minimale permettant de mettre en évidence le changement de modèle d'un intervalle à l'autre.

7. CONCLUSION

Nous avons présenté deux méthodes d'estimation de fréquences des composantes sinusoïdales d'un signal perturbé par un bruit blanc additif. La première méthode permet d'obtenir une estimation pertinente de la fréquence instantanée des composantes sinusoïdales présentes dans le signal. Sa complexité de mise en oeuvre est assez grande. La seconde méthode est de ce point de vue plus simple mais elle ne permet d'estimer que la loi de variation de la fréquence.

8. REFERENCES

[1] - PISARENKO V.F. "The retrieval of harmonics from covariance function" Geophys. J. R. Astro. Soc. Vol 33, pp 347-366, Sep 1975  
 [2] - MARPLE S.L. "Spectral line analysis by Pisarenko and Prony methods" IEEE Trans. on ASSP, Vol 30, pp 399-405, Jun 1982  
 [3] - KARHUNEN J. "Adaptative algorithms for estimating eigen-vectors for correlation type matrices" Int. Conf. on ASSP 1984  
 [4] - JOHNSON S.J. - ANDERSEN N. "On power estimation in maximum entropy spectral analysis" Geophysics, Vol 43, pp 681-690, Jun 1978  
 [5] - VILLEMUR C. - CASTANIE F. "Sur la méthode de soustraction du bruit" communication personnelle, Fev 1987  
 [6] - ALENGRIN G. - MATHIEU P. - MENEZ J. - YACOUBI-S. E.M. "Algorithmes d'analyse spectrale adaptative" Rapport de recherche GRECO 69 SARTA GT 6, LASSY Univ. de Nice, Mai 1986

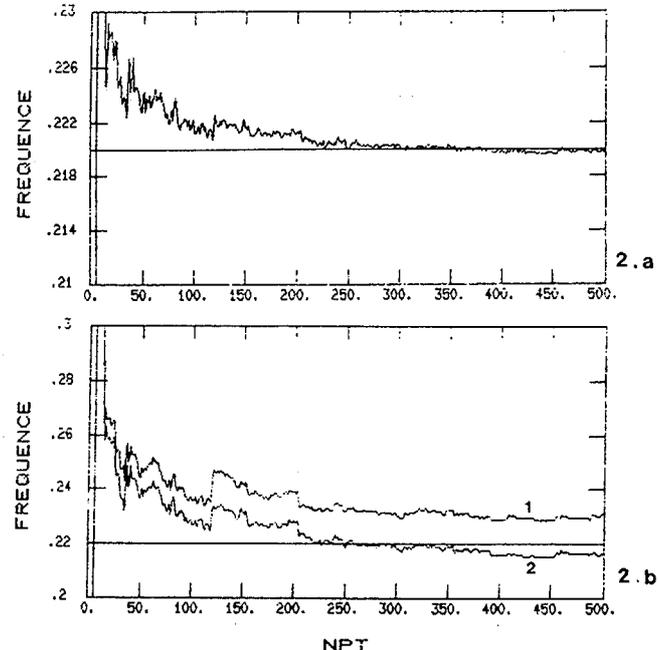


Fig. 2. Application de la 1ère méthode

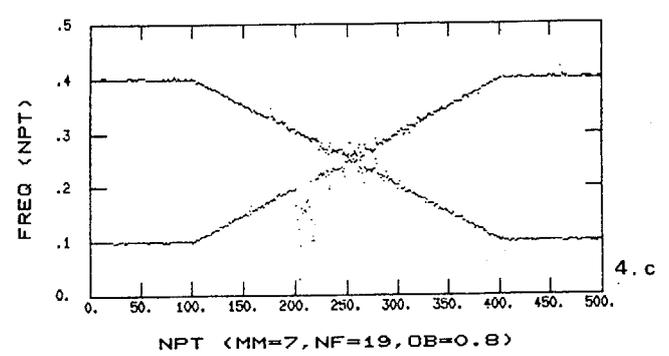
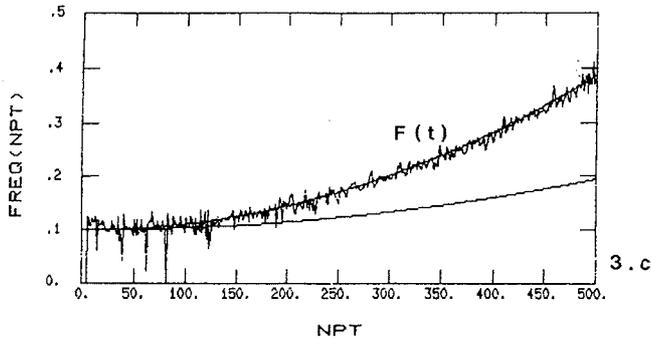
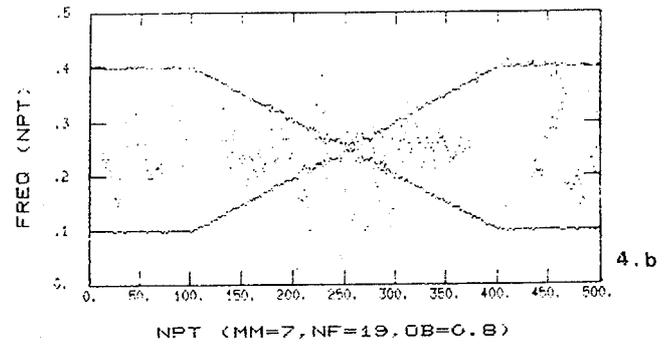
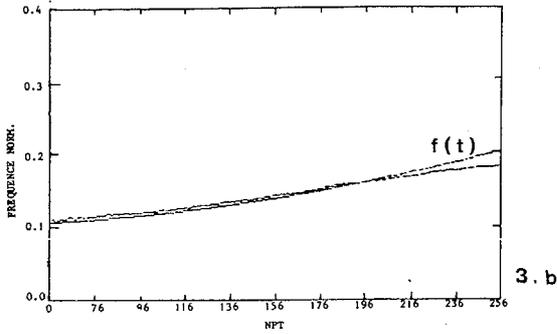
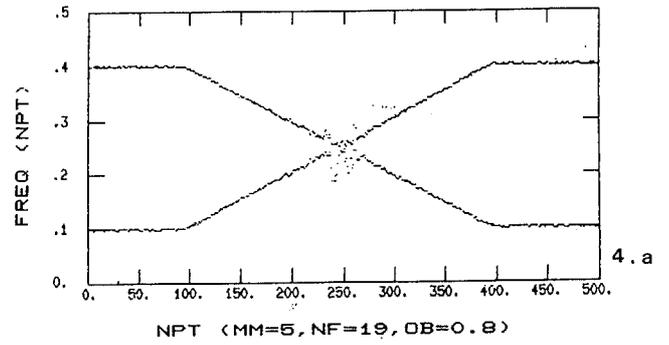
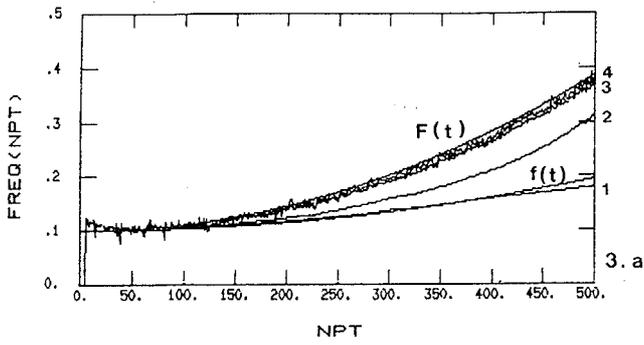


Fig. 3. Comparaison des deux méthodes

Fig. 4. Cas de deux composantes sinusoidales

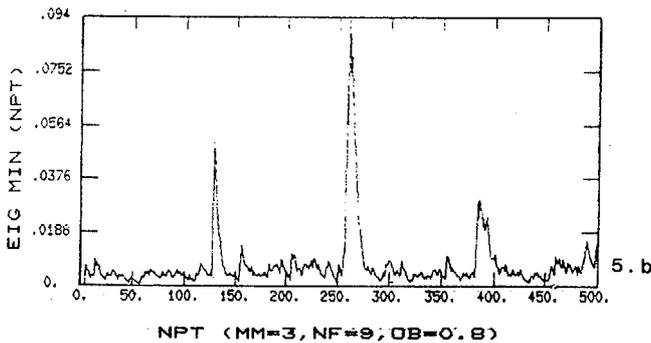
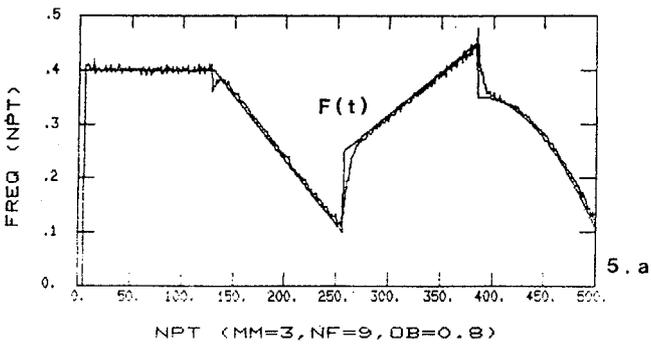


Fig. 5. Cas d'une seule sinusoïde à plusieurs variations