

ANALYSE THEORIQUE DU CRITERE DES CHANGEMENTS DE SIGNE
APPLIQUE AU RECALAGE D'IMAGES

Jean LIENARD Vincent LECLERC

THOMSON CGR

283 rue de la MINIERE 78530 BUC, France

RESUME

Le critère déterministe ou statistique des changements de signe est une mesure de similarité entre images I_1 et I_2 basée sur le comptage des passages par zéro de l'image de différence $I_1 - I_2$ dont le nombre est maximum en l'absence de décalage. Sous certaines hypothèses, on établit la relation liant cette mesure aux caractéristiques du signal et du bruit (bandes passantes, rapport). L'examen de cette équation nous permet de conclure à l'efficacité du filtrage des images, vérifiée expérimentalement, en vue d'améliorer la détection de leur décalage. L'influence du rapport signal sur bruit est aussi mieux perçue.

SUMMARY

Deterministic or statistical sign change criterion (DSC or SSC) is a similarity measurement between images I_1 and I_2 which is based on the zero-crossing counting of the difference image $I_1 - I_2$. Its amount is maximum when images are registered. Under some assumptions, this zero-crossing density can be related to the signal and noise characteristics such as bandwidths and ratio. The mathematical expression is analysed and we show improvements in registration detection after low-pass filtering both images.

1. INTRODUCTION:

En Imagerie Médicale, le RECALAGE d'images constitue une étape importante préalable dans le traitement de séquences d'images. La détection du décalage entre images d'une même scène à des instants différents est analogue au problème de détection de délai entre sources (Time Delay Estimation) [3]. Les approches classiques de ce problème de signaux unidimensionnels continus ont été classées en trois catégories: la corrélation croisée (généralisée), l'analyse de la phase du spectre croisé et l'estimation paramétrique. Pour les images, différents critères de similarité existent, ont été analysés et appliqués avec plus ou moins de succès. Entre autres, le critère des changements de signe, "STOCHASTIC or DETERMINISTIC SIGN CHANGE", a été dernièrement proposé [1] et développé à partir de considérations de statistiques non paramétriques [2]. Cette méthode, basée sur un comptage, offre l'avantage d'une réalisation matérielle simple et peu coûteuse. L'objet de ce document est de la justifier dans le cadre de la théorie du signal. L'examen des relations mathématiques ainsi obtenues permettra de mieux comprendre le fonctionnement de ce critère, d'en déduire le prétraitement optimal des images, et d'envisager son application au recalage de séquences médicales. Enfin, nous verrons la confrontation des résultats théoriques avec l'expérimentation sur des images réelles.

2. ETUDE THEORIQUE DES CRITERES SSC ou DSC

Les images à recaler sont représentées par des signaux discrets bidimensionnels de taille finie N^2 :

$$x(i,j) = s(i,j) + n_1(i,j) \quad (1)$$

$$y(i,j) = s(i+\alpha, j+\beta) + n_2(i,j) \quad (2)$$

$$i \in [0 \dots N-1] \quad j \in [0 \dots N-1]$$

où

$s(i,j)$ représente la scène commune aux deux images x et y ,

α et β représentent les décalages (bougés) respectivement horizontal et vertical de l'image y par rapport à x ,

n_1 et n_2 sont les bruits propres des images échantillonnées

On suppose en outre que les fréquences d'échantillonnage horizontale (fréquence pixel) et verticale (fréquence ligne) sont égales à la même valeur commune $F=1/T$.

Définition: Le critère des changements de signe est un critère de similitude entre signaux, basé sur le comptage des changements de signe de la différence de ces signaux. Il correspond à la mesure de la fréquence moyenne du signal différence. En cas de similarité, le critère est maximum, il mesure la fréquence apparente du bruit contenu dans les signaux. Il décroît lorsqu'un décalage existe entre les signaux.



En imagerie, le Critère des Signes (DSC ou SSC) consiste donc à évaluer le nombre de passages par zéro de l'image de différence x-y et à rechercher la position de décalage spatial bidimensionnel de y par rapport à x qui maximise cette valeur.

En pratique, comme l'image de différence est explorée ligne par ligne, ou colonne par colonne, le comptage des changements de signe revient à mesurer le nombre de passages à zéro d'un signal unidimensionnel discret v(p) de durée finie N²

$$v(p) = d(i,j) \quad p = iN+j \quad (3)$$

Or, la densité des passages à zéro d'un signal unidimensionnel v est donnée par le rapport (Cfr [5] et [6]):

$$\lambda_v = (\pi^{-1}) \cdot \sigma_v / \sigma_v'$$

où σ_v est l'écart-type (la puissance moyenne) du signal v,

et σ_v' , celui de sa dérivée (v'=u).

Nous allons rechercher les expressions de ces puissances. Au préalable, nous définissons pour tout signal bidimensionnel u(i,j):

ses moments spectraux d'ordre k+r:

$$U_{kr} = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi^k \cdot \psi^r \cdot S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi / \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi \quad (4)$$

ses largeurs de bandes effectives, horizontales et verticales:

$$\Phi_u^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi^2 \cdot S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi / \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi \quad (5)$$

$$\Psi_u^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi^2 \cdot S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi / \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{uu}(\phi, \psi) d\phi d\psi \quad (6)$$

ou

$$\Phi_u^2 = U_{20} \quad \Psi_u^2 = U_{02} \quad (7)$$

et les facteurs de forme spectraux κ_{urk}

$$U_{rk} = \kappa_{urk} \cdot \Phi_u^r \cdot \Psi_u^k \quad (8)$$

d(i,j) est la différence des images x(i,j) et y(i,j), son autocorrélation s'écrit:

$$R_{dd}(m,n) = 1/N^2 \sum_i \sum_j d(i,j) \cdot d(i+m, j+n) \\ = R_{nn}(m,n) + 2 \cdot R_{ss}(m,n) - R_{ss}(m+\alpha, n) - R_{ss}(m, n+\beta) \quad (9)$$

où $R_{nn}(m,n)$ est l'autocorrélation combinée des bruits n_1 et n_2 et $R_{ss}(m,n)$ celle du signal s(i,j) des scènes x et y

Considérons un signal et des bruits de puissances moyennes respectives σ^2 et v^2 , ($v^2 = v_1^2 + v_2^2$), ce qui peut s'écrire:

$$\sigma^2 = (1/2\pi)^2 \iint S_{ss}(\phi, \psi) d\phi d\psi = R_{ss}(0,0) = S_{00} \\ v^2 = (1/2\pi)^2 \iint S_{nn}(\phi, \psi) d\phi d\psi = R_{nn}(0,0) = N_{00}$$

La puissance moyenne du signal de différence est:

$$\sigma_v^2 = R_{dd}(0,0) \\ = R_{nn}(0,0) + 2R_{ss}(0,0) - R_{ss}(\alpha,0) - R_{ss}(0,\beta) \\ = v^2 + (1/2\pi)^2 \iint S_{ss}(\phi, \psi) [2 - e^{j\alpha\phi} - e^{j\beta\psi}] d\phi d\psi \\ = v^2 + (1/2\pi)^2 \iint S_{ss}(\phi, \psi) [2 - \cos\alpha\phi - \cos\beta\psi] d\phi d\psi \\ = v^2 + 2(1/2\pi)^2 \iint S_{ss}(\phi, \psi) [\sin^2(\alpha\phi/2) + \sin^2(\beta\psi/2)] d\phi d\psi \\ = v^2 + 2(1/2\pi)^2 \iint S_{ss}(\phi, \psi) [(\alpha\phi/2)^2 + (\beta\psi/2)^2] d\phi d\psi \\ = v^2 + \sigma^2/2 [\alpha^2 \cdot \Phi_s^2 + \beta^2 \cdot \Psi_s^2] \quad (10)$$

si on limite les fonctions sinus au premier terme de leur développement en série de Taylor.

Le signal échantillonné v(p) possède une dérivée u(p) dont le spectre a pour expression:

$$U(\phi) = j\phi \cdot V(\phi)/T \quad (11)$$

La densité spectrale de puissance de ce signal est donc:

$$S_{uu}(\phi) = 1/N^2 U(\phi) \cdot U(-\phi) = (\phi/T)^2 S_{vv}(\phi) \quad (12)$$

$$= (\phi/T)^2 S_{dd}(N\phi, \phi) \quad (13)$$

et sa puissance moyenne est égale à:

$$\sigma_u^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} S_{uu}(\phi) d\phi = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} (\phi/T)^2 S_{dd}(N\phi, \phi) d\phi \\ = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{+\pi} (\phi/T)^2 \left\{ S_{nn}(N\phi, \phi) + 2S_{ss}(N\phi, \phi) - e^{jN\alpha\phi} S_{ss}(N\phi, \phi) \right. \\ \left. - e^{j\beta\phi} S_{ss}(N\phi, \phi) \right\} d\phi \\ = (1/2\pi)^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (\phi/T)^2 \left\{ S_{nn}(\psi, \phi) + S_{ss}(\psi, \phi) [2 - e^{j\alpha\psi} - e^{j\beta\psi}] \right\} d\psi d\phi \\ = 1/T^2 [\Phi_n^2 \cdot v^2 + \sigma^2/2 (\kappa_{s22} \cdot \Phi_s^2 \cdot \Psi_s^2 \cdot \alpha^2 + \kappa_{s04} \cdot \Phi_s^4 \cdot \beta^2)] \quad (14)$$

en limitant de nouveau les fonctions sinus à leurs premiers termes du développement de Taylor.

En introduisant les variables sans dimension

$$\rho_\phi = \Phi_s / \Phi_n \quad \rho_\psi = \Psi_s / \Psi_n \\ \theta_{\phi\alpha} = \Phi_s \cdot \alpha \quad \theta_{\psi\alpha} = \Psi_s \cdot \alpha \\ \theta_{\phi\beta} = \Phi_s \cdot \beta \quad \theta_{\psi\beta} = \Psi_s \cdot \beta \\ SNR = \sigma^2 / v^2$$

la densité des passages par zéro de l'image de différence prend la forme finale:

$$\lambda_v = \Phi_n / \pi T \left\{ \frac{1 + SNR \cdot \rho_\phi^2 \cdot [\kappa_{s22} \cdot \theta_{\psi\alpha}^2 + \kappa_{s04} \cdot \theta_{\phi\beta}^2] / 2}{1 + SNR \cdot [\theta_{\phi\alpha}^2 + \theta_{\psi\beta}^2] / 2} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

L'examen de cette relation suscite les remarques suivantes:

1. La limitation des développements en série de Taylor est autorisée si le déplacement est inférieur à la plus petite "période effective" du signal s(i,j):

$$\alpha T \ll 2\pi/\psi_s$$

$$\beta T \ll 2\pi/\phi_s$$

2. sans décalage ($\theta_{\psi\alpha}=0$, $\theta_{\phi\beta}=0$), la densité apparente est égale à $\phi_n/\pi T = \lambda_n$, la densité des passages par zéro des bruits combinés.

3. Pour de grands décalages α et β , la densité tend asymptotiquement vers $\phi_s/\pi T$ (avec des facteurs de forme k_{s22} et k_{s04} unitaires); comme la largeur de bande effective du signal (ϕ_s) est généralement inférieure à celle du bruit (ϕ_n), le critère est maximum lorsque les images sont recalées.

4. En présence d'images non bruitées, la mesure est indépendante du décalage, on emploie alors le critère déterministe qui consiste à ajouter un motif doublement périodique (de période $2T$, c-à-d une succession d'impulsions positives et négatives, d'amplitude $q/2$ et de puissance moyenne $v^2=q^2$).

Ce damier joue le même rôle que les termes de bruit n_1 et n_2 mais ses caractéristiques (amplitude crête q , fréquence $\phi_n=\pi$, $\lambda_n=\phi_n/\pi T=F$) sont mieux contrôlées par l'opérateur.

5. Un prétraitement des images consiste à les filtrer de manière à réduire la fréquence ϕ_s par rapport à la largeur de bande effective du bruit ϕ_n . Dans ce cas, la différence s'accroît entre le critère à délai nul et le critère à délai infini.

3. APPLICATION DU CRITERE DSC AU RECALAGE D'IMAGES

L'estimation du décalage d'images d'une même scène, prises à des instants différents, peut être obtenue par application du critère DSC sur des fenêtres d'examen.

Après avoir préfiltré ces sous-images de façon à contrôler les variables ρ_ϕ et ρ_ψ et améliorer le rapport signal à bruit, un damier d'amplitude connue est ajouté à l'une des images et la soustraction est réalisée. Le comptage des changements de signe s'applique à la sous-image différence. Différentes valeurs du critère (c) sont alors déterminées, en fonction de décalages contrôlés (α et β) appliqués entre les fenêtres de mesure.

Le maximum de la surface critère est situé à l'endroit du décalage inter-images. Une autre manière de le détecter est de modéliser les données $c(\alpha, \beta)$ par une surface d'équation $\lambda(\alpha, \beta)$ ce qui permet d'extraire les paramètres essentiels de celle-ci ainsi que la position analytique du maximum.

4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

En angiographie numérisée, le recalage est une opération nécessaire pour éliminer les artéfacts dus aux bougés du patient lors d'une acquisition d'images prises aux rayons X [4].

Cette technique d'imagerie médicale a pour objet la mise en évidence du système vasculaire par

soustraction d'images; l'une est opacifiée par un produit de contraste injecté en voie intra-artérielle ou veineuse, et l'autre est acquise avant injection (masque).

Le critère DSC appliqué sur des images angiographiques numérisées permet de recalculer géométriquement le masque et l'image opacifiée, en fournissant une estimation des bougés du patient considérés comme une translation.

a) Influence du rapport signal/motif (SNR)

La figure (1) représente l'influence de l'amplitude du damier sur l'allure des surfaces théoriques $\lambda_V(\alpha, \beta)$, tandis que la figure (2), extraite de [1], représente des surfaces expérimentales comparables tirées de l'application du critère DSC sur des images d'angiographie numérisée.

b) Influence des bandes passantes (ρ)

Le rapport de la plus haute fréquence spatiale du signal à la fréquence du damier ($\rho=2\phi_s/\pi$) contrôle l'amplitude asymptotique des surfaces pour α et β croissants. Cet effet est visible sur les figures théoriques (3). Elles sont manifestement comparables aux résultats expérimentaux de la figure (4) où l'utilisation d'un filtrage dans le plan de Fourier permet d'accentuer l'effet d'une réduction de ϕ_s .

5. CONCLUSIONS

Le critère DSC des changements de signe s'explique à présent dans le cadre de la théorie du signal avec les hypothèses simplificatrices suivantes:

1. signal stationnaire,
2. bruits additifs non corrélés,
3. décalages spatiaux faibles.

Les relations tirées des développements précédents et validées par l'expérience, permettent de mieux appréhender l'influence de chaque paramètre sur l'allure des surfaces de ce critère: le filtrage passe-bas améliore la sensibilité du critère au droit du maximum et l'amplitude du motif doit être contrôlée par rapport à la puissance moyenne du signal et celle du bruit des images.

6. REFERENCES

- [1] A. VENOT J.F. LEBRUCHEC J.C. ROUCAYROL: A NEW CLASS OF SIMILARITY MEASURES FOR ROBUST IMAGE REGISTRATION, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 28, 1984
- [2] A. VENOT: METHODES DE COMPARAISON AUTOMATIQUE D'IMAGES Thèse d'Etat Université PARIS VI-UER COCHIN 1986.
- [3] SPECIAL ISSUE ON TIME DELAY ESTIMATION, IEEE trans. vol ASSP 29, part II, June 1981



[4] V. LECLERC: CRITERES DE SIMILARITE POUR LE RECALAGE D'IMAGES EN ANGIOGRAPHIE NUMERIQUE Rapport interne THOMSON-CGR Avril 1986

[5] A. BLANC-LAPIERRE: MODELES STATISTIQUES POUR L'ETUDE DE PHENOMENES DE FLUCTUATIONS Masson & Cie 1963

[6] A. PAPOULIS: PROBABILITY, RANDOM VARIABLES, and STOCHASTIC PROCESSES McGraw-Hill Kogakusha, 1965

[7] R.M MERSEREAU D.E. DUDGEON: TWO DIMENSIONAL DIGITAL FILTERING Proc of the IEEE, vol. 63, N° 4, April 1975

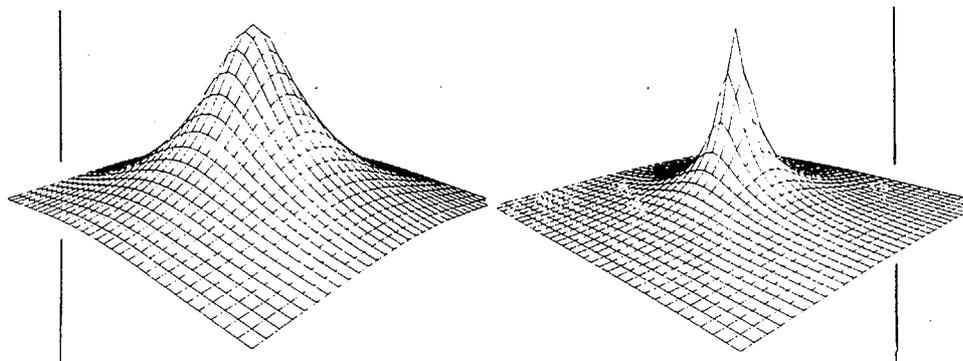


Fig. 1: Influence de SNR sur la forme de la surface théorique $\lambda(\alpha, \beta)$;
à gauche: SNR=100 à droite: SNR=1000

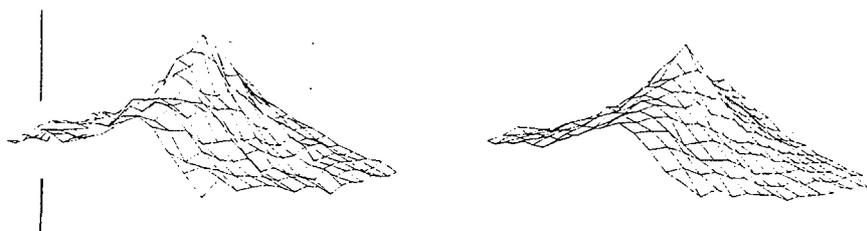


Fig. 2: Influence de SNR sur la forme des surfaces expérimentales $\lambda(\alpha, \beta)$;
à gauche: $q=3$ à droite: $q=1$

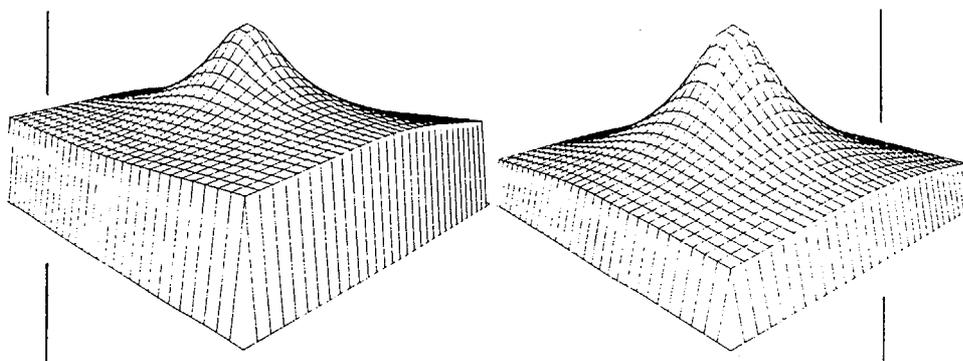


Fig. 3: Influence du rapport des largeurs de bande effectives ρ_s/ρ_n sur la forme des surfaces théoriques $\lambda(\alpha, \beta)$;
à gauche: $\rho=0.75$; à droite: $\rho=0.25$

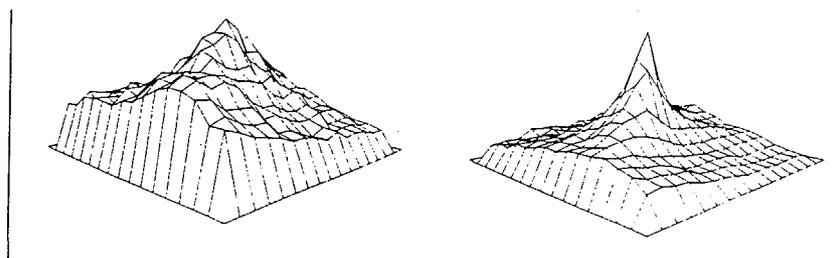


Fig. 4: Influence du filtrage (diminution de ρ) sur les surfaces expérimentales $\lambda(\alpha, \beta)$;
à gauche: critère DSC sur l'image originale; à droite: critère DSC sur l'image filtrée par un passe-bas.