

UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA GONIOMETRIE EN PRESENCE DE TRAJETS MULTIPLES

R. FOKA, C. LE CHAFFOTEC, J.L. NICOLAS

THOMSON-SINTRA A.S.M. 1, Av. ARISTIDE BRIAND - 94117 ARCUEIL CEDEX FRANCE

Cet article présente une méthode de goniométrie bande étroite, appliquée à une antenne linéaire équirépartie et basée sur une approximation Toeplitz (TAM) de la matrice de covariance. On propose un algorithme haute résolution conçu pour un bruit arbitraire et un environnement multitrajets. Il est ainsi adapté aux domaines du sonar passif, du radar et des communications.

On fournit des résultats de simulations comparant TAM et MUSIC dans des cas de faibles rapports signal à bruit et en présence de trajets multiples.

In this paper, the Toeplitz Approximation Method (TAM) of stochastic system identification is applied to the linear equal spaced array narrowband source direction finding problem. The proposed algorithm provides high resolution direction finding capability and is designed for an arbitrary noise, multipath signal environment. As such, it extends capability in fields such as passive sonar, radar and communications. A comparative simulation between TAM and the MUSIC method, using spatial smoothing, is presented which is based on low signal-noise-ratio (SNR) data and a multipath environment.



I. INTRODUCTION

On a récemment développé des méthodes de goniométrie basées sur le calcul des éléments propres de la matrice de corrélation des signaux reçus sur l'antenne. On peut citer l'algorithme "MUSIC" de Schmidt {1} et la méthode de Bienvenu et Kopp {2} ainsi que d'Owsley {3} qui généralisent l'utilisation du vecteur propre lié à la plus petite valeur propre. Ces méthodes sont utilisables en présence de bruit blanc spatialement ou de covariance connue.

On propose ici un nouvel algorithme basé sur une approximation Toeplitz de la matrice de covariance. Dans le cas où les sources sont décorréliées, la matrice de covariance est de Toeplitz, ce qui n'est plus vrai dans les cas de trajets multiples qui peuvent être assimilés à des sources corrélées. On peut cependant imposer une structure Toeplitz au moyen d'un lissage spatial qui décorrèle les divers trajets. Dans l'approche TAM, les données spatiales peuvent être modélisées comme la sortie d'un filtre ARMA dont les pôles, correspondant aux directions recherchées, sont situés sur le cercle unité. On estime une représentation d'espace d'état à partir d'une approximation d'ordre faible de la matrice de covariance. L'algorithme utilisé pour obtenir cette approximation d'ordre faible, basé sur une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice des données, est peu sensible aux perturbations. Il devrait donc se signaler par sa robustesse au bruit.

Dans cet article, après une brève formulation mathématique du problème, on décrit la méthode TAM et on présente des résultats de simulations.

II. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Considérons une antenne linéaire de L capteurs équirépartis. Elle reçoit p ondes planes à des angles $\{\theta_k, k=1, p\}$. La propagation est supposée homogène et les signaux à bande étroite. Le signal reçu sur le capteur i peut s'écrire :

$$(1) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^p a_k(t) x$$

$$\exp\{-j[(i-1)2\pi(d/\lambda_0)\sin\theta_k - \omega_0 t]\} + n_i(t)$$

où d est l'espace entre capteurs, λ_0 la longueur d'onde, $n_i(t)$ le bruit additif. Le bruit est un processus gaussien centré, décorrélié de capteur à capteur, indépendant du signal et de variance σ^2 . Posons :

$$Y(t) = \{y_1(t), \dots, y_L(t)\}^t$$

$$S(t) = \{a_1(t)e^{j\omega_0 t}, \dots, a_L(t)e^{j\omega_0 t}\}^t$$

$$D = \{D_{\theta_1}, \dots, D_{\theta_p}\}$$

$$D_{\theta_k} = \{1, e^{-j\tau_k}, \dots, e^{-j(i-1)\tau_k}\}^t$$

$$\tau_k = 2\pi(d/\lambda_0) \sin\theta_k$$

$$N(t) = \{n_1(t), \dots, n_L(t)\}^t$$

D'après (1), on a $Y(t) = DS(t) + N(t)$.

La matrice de covariance spatiale s'écrit donc :

$$R = E\{Y(t)Y^+(t)\} = DR_S D^+ + \sigma^2 I$$

où + représente la transconjugaison.

III. METHODES DES ELEMENTS PROPRES

Ces méthodes utilisent les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de covariance R. Par exemple, la méthode MUSIC {1} exploite les vecteurs propres de l'espace bruit. Les vecteurs propres de la matrice de covariance correspondant aux (L-P) plus petites valeurs propres sont orthogonales à tous les vecteurs direction des sources. Ce qui s'écrit :

$$D_{\theta_m}^+ U_i = 0 \quad i = p+1, L; \quad m = 1, P.$$

D_{θ_m} est le vecteur de la m^{ième} source.

U_i est le i^{ème} vecteur propre de l'espace bruit.

Les méthodes conventionnelles basées sur les éléments propres sont applicables quand la matrice R_S est régulière. Mais lorsque deux trajets sont cohérents, R_S

est singulière et la méthode précédente devient inadaptée. T.J.SHAN {4} a récemment proposé l'utilisation d'un lissage spatial qui permet d'utiliser la méthode des vecteurs propres quelle que soit la cohérence des trajets. Ce lissage est effectué sur L-b+1 sous-antennes de b capteur à partir d'une antenne de L capteurs. Cette méthode a malheureusement une résolution moindre car elle traite des antennes de tailles réduites.

Nous proposons dans cet article, une nouvelle technique de lissage spatial, qui ne réduit pas la taille effective de l'antenne, et qui laisse donc espérer une meilleure résolution. Nous proposons aussi une modélisation d'espace d'état qui permettra d'estimer les directions des bruiteurs.

IV - LA METHODE TAM - Formulation d'espace d'état

On suppose que les signaux reçus sur l'antenne à un instant t sont la sortie d'un modèle ARMA, dont les pôles sont situés sur le cercle unité. Le signal non bruité $x_k(t)$ reçu sur le capteur k est un processus de Markov du pième ordre, il peut être prédit par la donnée de $\{x_{k-1}(t), \dots, x_{k-p}(t)\}$. La formulation d'espace d'état s'en déduit comme :

$$Z_{k+1} = F Z_k; \quad x_k = h Z_k$$

$$\text{où : } Z_1 = \{s_1(t), \dots, s_p(t)\}^t$$

$$F = \text{diag} (e^{-j\tau_1}, \dots, e^{-j\tau_p})$$

$$h = \{1, \dots, 1\}$$

Notons deux choses :

- on omet de mentionner le temps dans le modèle d'état car on modélise seulement l'aspect spatial.

- le choix de la représentation d'état n'est pas unique, mais les valeurs propres de F seront toujours les $\exp\{-j\tau_i\}$ $i = 1, \dots, p$

$$\text{Soit } X = \{x_1, x_2, \dots, x_L\}^t$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$X = \{h, hF, \dots, hF^{L-1}\}^t Z_1 = \Theta Z_1$$

$$\text{D'où } R_X = \Theta E\{Z_1 Z_1^+\} \Theta^+$$

En théorie des systèmes, Θ est appelée la matrice d'observabilité, et si les τ_i sont distincts, les p colonnes de Θ sont indépendantes. Si les p trajets sont décorrélés, $E\{Z_1 Z_1^+\}$ est diagonale et strictement

définie positive, et R_X a pour rang p. Cependant, quand les trajets sont cohérents, $E\{Z_1 Z_1^+\}$ est singulière et R_X sera de rang inférieur à p.

En fait, R_X ne sera plus de Toeplitz et le processus spatial X ne sera plus stationnaire. Ainsi la cohérence des trajets détruit à la fois la propriété Toeplitz et la propriété "de rang p" de R_X . Si R_X n'est pas de Toeplitz, la matrice de covariance R du signal observé n'est pas non plus de Toeplitz. Si nous utilisons une moyenne temporelle pour estimer R_X , asymptotiquement, l'estimateur

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) X^+(t)$$

ne sera de Toeplitz que si les trajets sont décorrélés.

Moyennage spatial

Si nous utilisons des moyennes spatiales au lieu de moyennes temporelles, nous obtenons asymptotiquement une matrice C de rang p. Posons :

$$c(m) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i x_{i+m}^*$$

$$\text{On a } c(m) = h F^m P h^+$$

$$\text{où } P = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_i Z_i^+$$

On forme ensuite la nouvelle matrice de covariance Toeplitz :

$$C = \begin{pmatrix} C(0) & C(-1) & C(-2) & \dots \\ C(1) & C(0) & C(-1) & \\ C(2) & C(1) & C(0) & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$$C = \begin{pmatrix} h \\ hF \\ hF^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \times \{Ph^+, F^{-1}Ph^+, \dots\} = \Theta P \Theta^+$$

Même si $E\{Z_i Z_i^+\}$ est singulière, P est toujours de rang plein. Il en est de même pour Θ . On en déduit que C est de rang p.

Estimation

Il existe dans la littérature de nombreux estimateurs de matrices de covariance. On peut citer l'estimateur non biaisé :

$$\frac{1}{(L-m)} \sum_{i=0}^{L-m-1} x_i x_{i+m} \quad m = 0, \dots, L-1$$

Cependant, cet estimateur n'est pas adapté aux antennes réelles, où L est relativement faible et où on est loin des caractéristiques asymptotiques. On suggère donc un moyennage à la fois spatial et temporel.

$$\hat{C}(m) = \frac{1}{T(L-m)} \sum_{t=1}^T \sum_{h=0}^{L-m-1} xh(t) xh+m(t)$$

où T est le nombre d'échantillons temporels.

La méthode TAM (Toeplitz approximation method)

L'objectif de la méthode TAM est de construire un estimateur de rang p de la matrice Rx à partir des composantes principales (valeurs singulières) de C, l'utilisation du modèle d'état permet ensuite d'estimer F.

Première étape

On met en oeuvre une décomposition en valeurs singulières (SVD) sur \hat{C} et on range les valeurs singulières $\{\sigma^k, k=1, \dots, L\}$ par ordre décroissant :

$$\hat{C} = U \Sigma V^+ = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{pmatrix}$$

où la matrice diagonale $p \times p$ Σ_1 contient les p plus grandes valeurs singulières. Une approximation de rang p de \hat{C} est $U_1 \Sigma_1 V_1^+$ et l'erreur d'approximation au sens de la norme spectrale est :

$$\|\hat{C} - U_1 \Sigma_1 V_1^+\|_E = \sigma_{p+1}$$

Deuxième étape

L'adaptation au modèle d'état n'est pas unique. Pour des raisons de stabilité numérique, on choisit

$$\Theta = U_1 \Sigma_1^{1/2}$$

Idealement, la matrice d'observabilité Θ devrait avoir la structure $\{h \ hF \ hF^2 \dots\}^t$ et satisfaire $\Theta F = \{hF \ hF^2 \dots\}^t = \Theta^+$. Cependant $U_1 \Sigma_1^{1/2}$ ne possède pas cette propriété. On procède donc à une estimation de F au sens des moindres carrés

$$F = (\{\Theta \Theta\}^{-1} \Theta^+ \Theta^+)$$

où \uparrow signifie que l'on décale d'une ligne vers le haut et que l'on ajoute une dernière ligne de zéros. On montre que l'erreur minimale au sens de la norme de Frobenius est de l'ordre de :

$$\|\Theta F - \Theta^+\|_F = O(\sigma_{p+1})$$

Les valeurs propres de F donnent les directions des trajets car :

$$F = \text{diag}(\dots, e^{-j\tau_i}, \dots)$$

avec $\tau_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin\theta_i$

Puisque $\hat{F} = \Theta F \Theta^{-1}$, le module de l'enveloppe peut être estimé par :

$$|a_i| = \|\{h^i \Theta\}\|^{1/2}$$

où h est la première ligne de la matrice d'observabilité Θ . On sait que l'estimateur de F ainsi obtenu est toujours stable.

Spectre spatial

L'énergie en fonction de l'angle est donnée par la formule :

$$P_{TAM}(\Theta) = \sum_{i=1}^P \frac{|a_i|}{1 - r_i \exp(-j(\tau - \tau_i))}$$

où les $|a_i|$ sont les amplitudes des sources r_i est le module de la ième valeur propre de F, τ_i correspond à la direction du ième trajet, τ correspond à l'angle visé.

Résultats de simulations

Critères de détection

L'application des méthodes des vecteurs propres et de décomposition en valeurs singulières nécessite la connaissance du nombre de sources.

A la lumière d'essais réalisés sur signaux synthétiques, il apparaît que le critère de Rissanen donne d'assez bons résultats : plus de 80 % des réponses sont exactes dès que $T > 15 L$, où T est le nombre d'échantillons et L le nombre de capteurs. On peut lui préférer un critère de "saut" qui n'est pas sensible à T. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres rangées en ordre décroissant, le critère de saut est

$$\lambda_p / \lambda_{p+1} > x \quad 2 < x < 2,5 \text{ suivant les essais.}$$

Dans 90 % des essais effectués, le saut entre les P premières valeurs propres et les L-p plus petits est net.

Tests sur signaux synthétique

Dans les essais effectués sur signaux synthétiques, il apparaît que "TAM" fournit d'aussi bons résultats que la méthode des valeurs propres. Elle paraît robuste à une mauvaise modélisation du milieu. En particulier, quand le bruit est isotrope non décorrélé "TAM" continue de donner de bons résultats tandis que "MUSIC" donne des résultats erronés (cf. fig.1).

Tests sur signaux réels

On a testé "TAM" et "MUSIC" sur des signaux réels reçus par une antenne linéaire verticale de 6 hydrophones. On reçoit un signal de forme plus ou moins rectangulaire qui représente les ondes incidentes et réfléchies à la surface, suivi d'un signal retardé et atténué qui correspond au trajet réfléchi-fond. Alors que "MUSIC" est inefficace dans ce cas, "TAM" fournit les bons sites d'arrivées des rayons (cf. fig.2). On rappelle que "TAM" fournit directement les valeurs des angles sans que l'on aie besoin de tracer la répartition spatiale d'énergie comme dans le cas de "MUSIC". On mesure donc les bons angles, même si la figure 2 ne fait pas apparaître de pic.

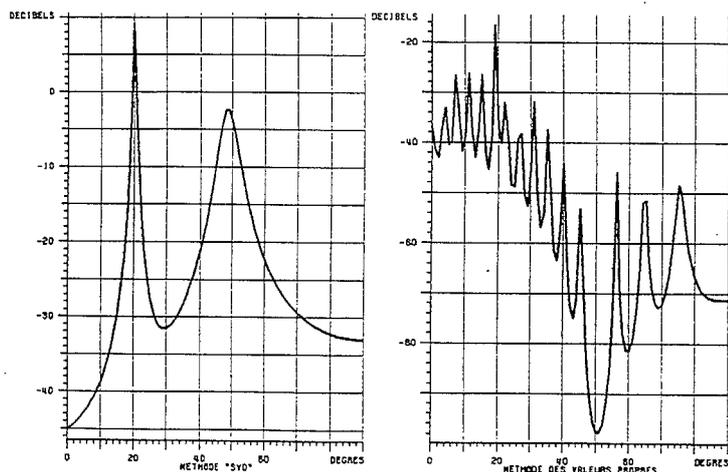


Figure 1 : Comparaison des méthodes TAM et MUSIC en présence de bruit isotrope non décorrélé

Nombre d'hydrophones (L)	32	Directions d'incidence des sources	20° 50°
Amplitude des sources	1		
Amplitude du bruit	1		
Echantillonnage (T)	40		
Nombre de sources (P)	2		

Références

- {1} R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", Proc. RDAC Spectral Estimation Workshop, pp.243-258, 1979.
- {2} G. Bienvenu and L. Kopp, "Source Power Estimation Method Associated with High Resolution Bearing Estimation", Proc. IEEE ICASSP 1983, Atlanta, GA, pp.153-156, 1981.
- {3} N.L.Owsley, "Spectral Signal Set Extraction", Aspects of Signal Processing, Part II, G. Tacconi (ed.) D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1977.
- {4} T.J.Shan, M. Wax, and T. Kailath, "Eigenstructure Methods for Direction-of-Arrival of Coherent Sources", Stanford University report, ICASSP Workshop II, 1984.

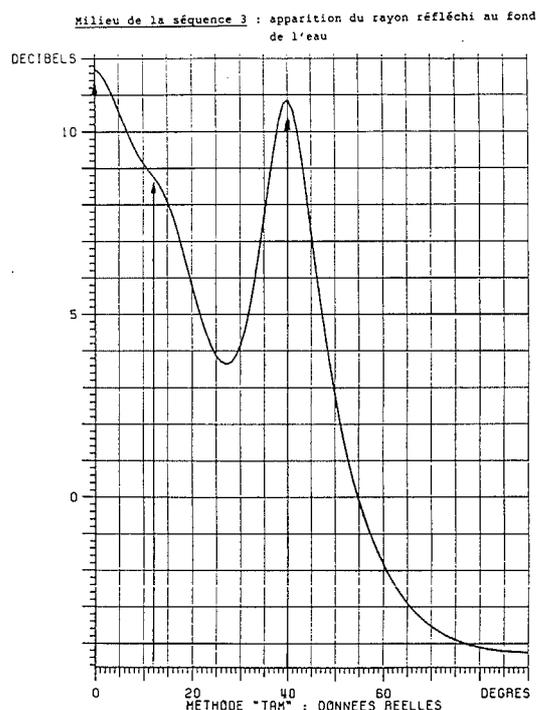


Figure 2 : Mesure de sites sur signaux réels