

OBSEVABILITE ET OPTIMISATION DE MANOEUVRES EN AZIMETRIE

A. OUSTRI , G. FAVIER

CNRS/LASSY 41 bd Napoléon 3 - 06041 Nice Cedex

RESUME

Cet article est consacré à l'étude du problème de l'observabilité dans le cadre de la poursuite azimétrique. Nous présentons une étude comparative de quatre tests d'observabilité et nous montrons comment l'observabilité de l'ensemble but/observateur influence la qualité du filtrage non linéaire (filtre de Kalman étendu). Cette étude nous conduit à un concept d'observabilité dynamique à partir duquel nous proposons une méthode originale d'optimisation des manoeuvres du lanceur en vue d'améliorer la qualité de l'estimation des caractéristiques cinématiques du but.

ABSTRACT

This paper is concerned with the study of observability in the case of the bearing only tracking problem. We present a comparative study of four observability tests and we show how the observability of the own ship/target system influences the non linear filter quality. This study leads us to a concept of dynamical observability from which we propose an original method to optimize the own ship maneuvers in order to improve the quality of the estimates of the target dynamical characteristics.

- INTRODUCTION -

Le problème dit d'azimétrie consiste à déterminer avec le plus de précision possible les caractéristiques cinématiques d'un mobile (but) supposé non coopératif (mobile manoeuvrant) à partir d'une mesure bruitée d'azimut (angle formé par le nord géographique et la ligne de visée but-observateur) effectuée par un observateur (lanceur), la position de ce dernier étant bien entendu supposée connue. Les équations qui régissent la dynamique de l'ensemble but/observateur associées à l'équation de mesure constituent un modèle d'état non linéaire et une solution au problème d'azimétrie est fournie par le filtrage non linéaire. De par la géométrie du problème, l'observabilité joue un rôle fondamental pour assurer une bonne qualité de poursuite.

Après avoir rappelé les principaux résultats relatifs à l'observabilité des systèmes linéaires (S.L) nous présentons deux tests d'observabilité pour les systèmes non linéaires (S.N.L), basés sur l'utilisation de la matrice Jacobienne de l'application d'observabilité [ KOU-ELLIOT-TARN, 8 ], [ HWANG-MOHLER,10]. Ces tests sont ensuite appliqués au problème de l'azimétrie et les liens avec les tests de [ NARDONE-AIDALA, 7 ] basés sur une équation différentielle du troisième ordre sont mis en évidence. Les calculs sont explicités pour trois types de représentation : modèles polaire, polaire mixte, polaire modifié.

Dans un deuxième temps ces tests d'observabilité sont mis en oeuvre sur un exemple simulé pour montrer comment l'observabilité de l'ensemble but/observateur influence la qualité du filtrage non linéaire (Filtre de Kalman Etendu) en vue de la reconstruction de la cinématique du but.

Puis le problème de l'optimisation des manoeuvres de l'observateur est traité de manière à améliorer la qualité de la poursuite. Une nouvelle stratégie de manoeuvre basée sur la maximisation de l'Intégrale intervenant dans le test de [NARDONE-AIDALA, 7] est proposée. Des résultats de simulation sont montrés pour illustrer cette stratégie de manoeuvre.

- MODELISATION -

La modélisation jouant un rôle important dans le problème de l'azimétrie, nous rappelons brièvement les composantes des différents vecteurs d'état retenus dans notre étude - voir tableau 1 - ( sous l'hypothèse d'un mouvement rectiligne uniforme de la part du but ).

Définition des variables :

- o o o
- $z, \dot{z}, \ddot{z}$  : dérivées successives de l'azimut
- o
- $D, \dot{D}$  : Distance et sa dérivée
- $V_b, K_b, V_L, K_L$  : Vitesses et caps du but et du lanceur
- $X_b, Y_b, X_L, Y_L$  : positions du but et du lanceur sur les axes X et Y
- o o o
- $X_b, Y_b, X_L, Y_L$  : Vitesses du but et du lanceur sur les axes X et Y
- $\gamma_x, \gamma_y$  : Accélérations du lanceur sur les axes X et Y
- $X_r, Y_r, V_r, V_x, V_y$  : Positions et vitesses relatives sur les axes X et Y

MODELE	Expressions du vecteur d'état	Partie dynamique	Equation discrète de mesure
Polaire (1)	$z, D, V_b, K_b$	N.L	$z(k) = x_1(k) + W(k)$
Polaire mixte (2)	$z, D, V_x, V_y$	N.L	
Polaire modifié (3)	$z, \dot{z}, \ddot{z}, \dot{D}$	N.L	
Cartésien n°1 (4)	$X_r, Y_r, X_b, Y_b$	L	$z(k) = \text{Arctg} \frac{x_1(k)}{x_2(k)} + W(k)$
Cartésien n°2	$X_r, Y_r, \dot{X}_r, \dot{Y}_r$	L	

= Tableau 1 =

W(k) étant le bruit de mesure .

La modélisation de la poursuite azimétrique fait intervenir des équations d'état non linéaires au niveau de la dynamique ou de la mesure, et par suite la seule connaissance de la mesure d'azimut ne permet pas de déterminer de manière unique l'état du système si aucune manoeuvre du lanceur n'est effectuée, comme le montre la règle bien connue des "quatre azimuts" [BOZZO-BARBAGELATA 5,6]. Ceci est dû à un problème d'observabilité.



**- OBSERVABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES -**

Soit le système (S) décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[t, x(t)] \\ z(t) = h[t, x(t)] \end{cases} \quad (1)$$

où f et h sont définies par :

$$f: [t_0, t_1] \times \Omega \rightarrow E^n \quad h: [t_0, t_1] \times \Omega \rightarrow E^m$$

avec  $( [t_0, t_1] \times \Omega ) \subseteq ( E^n \times E^m )$

avec pour condition initiale  $x(t_0) \in \Omega_0 \subset \Omega$ ,  $\Omega_0$  ensemble des états initiaux.

L'unicité de la solution étant liée à la propriété de bijection de l'application d'observabilité, il est alors possible de définir l'observabilité de la manière suivante :

**Définition :**

Le système (S) est complètement observable dans  $\Omega_0$ , ensemble des états initiaux, sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ , s'il existe une bijection entre  $\Omega_0$  et l'ensemble des sorties observées  $z(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .

Nous rappelons que dans le cas des systèmes linéaires l'observabilité peut être testée à partir des critères suivants :

- Critère de définie-positivité du Grammien
- Critère différentiel obtenu après avoir dérivé (n-1) fois la variable de mesure et vérifié si la "matrice d'observabilité résultante est de rang n ( n étant l'ordre du vecteur d'état ).
- Critère de nullité de la pseudo-mesure.

Dans le cas des S.N.L. le problème de l'observabilité est beaucoup plus difficile à étudier que pour les S.L. Dans ce qui suit nous considérons tout d'abord une classe de S.N.L. renfermant les modèles caractéristiques du problème d'azimétrie et pouvant être linéarisés très simplement. Cette classe de systèmes est caractérisée par une équation de dynamique linéaire et une équation de mesure non linéaire, c'est à dire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = h[x(t)] \end{cases} \quad (2)$$

**Hypothèses sur la fonction h[.] :**

- La fonction  $h[x(t)]$  est telle que :

$$h[x(t)] = h \begin{bmatrix} C_1 x(t) \\ -1 \\ C_2 x(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h[z(t)] = \begin{bmatrix} G_1[z(t)] \\ -1 \\ G_2[z(t)] \end{bmatrix} \quad (3)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux vecteurs lignes à 1 et 2 coefficients constants.

$G_1[.]$  et  $G_2[.]$  sont deux fonctions non linéaires

Nous pouvons alors obtenir l'équation de pseudo-mesure linéaire suivante :

$$\dot{z}(t) = M(t)x(t_0) \quad (4)$$

où  $z(t)$  est une "pseudo-mesure" telle que :

$$z(t) = [G_1[z(t)]C_2 - G_2[z(t)]C_1] \int_{t_0}^t e^{(t-\delta)A} Bu(\delta) d\delta \quad (5)$$

$$M(t) = [G_2[z(t)]C_1 - G_1[z(t)]C_2] \cdot e^{(t-t_0)A} \quad (6)$$

A partir de ce pseudo-système linéaire il est possible d'établir les conditions d'observabilité en appliquant le critère de nullité ou le critère différentiel. Cette linéarisation s'applique au modèle cartésien  $n^{\circ}2$  et permet d'établir les tests d'observabilité suivants :

- test de l'équation différentielle du troisième ordre

$$DNA = 2.z(t).z(t) - 3.z(t) + 4.z(t) \neq 0 \quad (7)$$

- test de l'intégrale d'observabilité

$$z(t) = \int_{t_0}^t (t-\delta) \left\{ \gamma_x(\delta) \cdot \cos[z(t)] - \gamma_y(\delta) \cdot \sin[z(t)] \right\} d\delta \neq 0 \quad (8)$$

Nous retrouvons ainsi les conditions d'observabilité explicitées par NARDONE-AIDALA [7].

**Nota :**

La condition sur la présence d'une accélération du lanceur est nécessaire pour assurer l'observabilité de l'ensemble but/lanceur mais n'est pas suffisante.

**- Critères d'observabilité de S.N.L issus du comportement de la matrice Jacobienne -**

Ces critères, basés sur l'existence de fonctions inverses, ont été étudiés par KOU-ELLIOT-TARN [ 8 ] (dont les travaux découlent des résultats obtenus par FUSISAWA-KUH [9] ) et par HWANG-MOHLER [10] .

L'information permettant de déterminer l'état initial du système est contenue dans la mesure. En exprimant les dérivées successives de z en fonction de celles de h nous pouvons définir le "vecteur et l'application d'observabilité" Z et H qui en résultent ;

$$Z(t_0) = H(t_0, x_0) \quad (9)$$

$$Z^T = [ z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)} ] \quad (10)$$

$$H[.,.] = [ H_1, H_2, \dots, H_n ] \quad (11)$$

Le but du problème est de montrer que "l'application d'observabilité" H est une bijection entre l'ensemble des états initiaux et l'ensemble des sorties mesurées, permettant ainsi d'assurer l'unicité du vecteur d'état. Définissant la matrice Jacobienne de  $H[.,.]$  :

$$J(x(t_0)) = \frac{dH[.,.]}{d\delta} \Big|_{\delta=x(t_0)} \quad (12)$$

Nous pouvons, à partir de conditions imposées sur la matrice J, donner le critère d'observabilité suivant ( qui établit une condition suffisante mais non nécessaire ).

**Théorème de Kou-Elliot-Tarn**

Soit l'application  $H : E^n \rightarrow E^n$

où  $H \in \mathcal{D}$  (ensemble des fonctions différentiables), avec pour matrice Jacobienne J.

S'il existe une constante  $\epsilon > 0$  telle que les valeurs absolues des mineurs principaux de  $J(x)$  satisfassent pour tout  $x \in E^n$

$$\left| \Delta_1 \right| \geq \epsilon, \quad \left| \frac{\Delta}{\Delta_1} \right| \geq \epsilon, \quad \dots, \quad \left| \frac{\Delta}{\Delta_{n-1}} \right| \geq \epsilon$$

alors H est une bijection de  $E^n$  sur  $E^n$ .

Nous pouvons aussi citer les travaux de HWANG-MOHLER [10] qui dépendent d'une manière analogue du comportement de la matrice Jacobienne issue de l'application d'observabilité. Cette matrice est notamment simplifiée par l'apport de la connaissance des dérivées successives de la mesure z(t). Dans le cas où le déterminant est non nul il existe alors au moins une solution vis à vis de l'état ( l'unicité de cette solution n'est pas assurée ) et l'on peut dire que le système est localement observable autour du point étudié ( HERMANN-KRENER [11] ), l'unicité de la solution étant quant à elle assurée par l'analyse des expressions littérales de l'état du système obtenues en fonction des dérivées successives de la mesure.

**- Application au problème de l'azimétrie -**

Nous avons résumé dans le tableau suivant le déterminant des matrices Jacobiennes obtenues pour trois types de modèles ( OUSTRI [12] ) .

Modèle	Polaire	Polaire mixte	Polaire modifié
det J	D1 =	D2 =	D3 =
KET	DNA --3.V	DNA --3	DNA.D
det J	D b	D	
HM			

J : matrice Jacobiennne correspondant à la KET méthode de KOU-ELLIOT-TARN

J : matrice Jacobiennne correspondant à la HM méthode de HWANG-MOHLER

Par suite, Le système est localement observable si la condition de NARDONE-AIDALA est vérifiée (i.e si DNA ≠ 0) ce qui valide par une approche non linéaire les résultats de ces auteurs. Nous pouvons néanmoins constater des différences notoires dans l'expression des déterminants correspondant à chacun des modèles, ce qui s'explique par le fait que les variables d'état intervenant dans ces modèles sont de nature différente. Ainsi lorsque DNA est non nul ( i.e le système est localement observable ) le déterminant D3 sera le plus grand numériquement du fait que la distance apparaît de façon multiplicative alors qu'elle intervient au dénominateur dans les déterminants D1 et D2 .Ceci laisse supposer que le modèle polaire modifié se com-portera plus favorablement lors de l'estimation des variables d'état, ce qui a été vérifié expérimentalement par SIFFREDI [2] à partir d'une étude comparative des filtres de Kalman étendus construits sur des modèles polaire, polaire mixte et polaire modifié. C'est pourquoi, compte-tenu des expressions des différents déterminants et des résultats de filtrage ( relatifs aux différents modèles ) fournis dans la littérature , nous pouvons parler de sensibilité de la modélisation vis à vis de l'observabilité .

**- PARTIE EXPERIMENTALE -**

Mise en oeuvre des tests d'observabilité

Dans une première étape nous faisons une comparaison numérique des quatre tests d'observabilité suivants :

- test de KOU-ELLIOT-TARN , noté TKET
- test de HWANG-MOHLER , noté THM
- tests de NARDONE-AIDALA : de l'équation différentielle (DNA) noté TDNA de l'intégrale noté TINA

Les essais sont effectués sur une trajectoire de référence simulée dont les caractéristiques cinématiques sont représentées sur l'ensemble des figures 1-a à 1-f. La mesure d'azimut est effectuée toutes les 2 secondes et l'écart type du bruit de mesure est égal à 0.3 degré.

Pour appliquer les tests THM et TDNA il est nécessaire de connaître la dérivée tierce de l'azimut qui est une variable très difficile à estimer dans un contexte stochastique. C'est pourquoi nous visualiserons l'ensemble des tests uniquement dans le cas déterministe et nous n'avons retenu que les THM et TKET issus des modèles cartésien n°1 ( fig 2-a , fig 2-b) et polaire modifié fig (2-d , fig 2-e). Nous avons également représenté le TDNA (fig 2-c) et le TINA (fig 2-f). Pour ce dernier test l'intégration est faite sur une fenêtre de 50 itérations pour se placer dans un contexte d'observabilité locale. A partir de l'analyse des figures 2a-2f nous pouvons conclure que tous les tests ont détecté la présence d'une accélération du lanceur (le système est alors localement observable) . D'autre part, nous pouvons noter que le TDNA a permis de détecter l'évolution du but et ce test peut donc être utilisé comme détecteur de rupture de modèle. Nous devons signaler également les avantages du test TINA, à savoir sa simpli-

cité et son meilleur conditionnement numérique. C'est pourquoi nous avons retenu l'intégrale de NARDONE-AIDALA afin d'optimiser la trajectoire du lanceur dans le but d'améliorer le "degré d'observabilité" du système et par conséquent la qualité de l'estimation . Cette optimisation est basée sur l'hypothèse que le lanceur décrit des segments de droite parcourus à vitesse constante entrecoupés de manoeuvres apparaissant toutes les T minutes ( T = 10 mn pour les simulations). Nous déterminons à l'instant tk le cap lanceur, incrémenté de degré en degré, qui maximise l'intégrale d'observabilité décrite par l'équation (13) OUSTRI [12] .

$$IO = \int_{t_k}^{t_k+T} (t_k+T-\delta) \left\{ \dot{\psi}_x(\delta) \cdot \cos \hat{z}(t_k+T) - \dot{\psi}_y(\delta) \sin \hat{z}(t_k+T) \right\} d\delta \quad (13)$$

où  $\hat{z}(t_k+T)$  est l'azimut prédit à l'instant  $t_k+T$  à partir des mesures effectuées jusqu'à l'instant t.

$\dot{\psi}_x$  et  $\dot{\psi}_y$  sont les accélérations du lanceur prédites à partir des équations suivantes :

$$\dot{\psi}_x(t) = \frac{V}{L} K(t) \sin K(t) + \frac{V(t)}{L} K \cos K(t) \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_y(t) = \frac{V}{L} K(t) \cos K(t) - \frac{V(t)}{L} K \sin K(t) \quad (15)$$

nous avons simplifié l'étude en prenant :

$$\frac{V}{L} = \text{cste} = 0 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad \frac{K}{L} = \text{cste} = 1.5 \text{ degrés/s}$$

**- Mise en oeuvre du critère d'optimisation -**

Le but de l'essai étant de montrer l'amélioration de l'estimation des caractéristiques cinématiques du but apportée par l'optimisation de la trajectoire du lanceur, nous conserverons pendant les 5 premières minutes la trajectoire but/lanceur de référence avant d'optimiser la manoeuvre du lanceur .

Nous proposons deux scénarios de simulation ; le premier de référence (fig 3-a), le second optimisé par le critère de l'intégrale d'observabilité (fig 4-a). Nous voyons sur la simulation de référence la divergence du filtre cartésien (fig 3-b) et du filtre polaire modifié (fig 3-c). Cette divergence est due au faible degré d'observabilité du scénario de référence .Par contre, après optimisation, le système but/lanceur présente un meilleur degré d'observabilité, ce qui permet la convergence des estimés des variables d'état à l'aide des deux types de filtres (fig 4-b , 4-c) et ce, pour des conditions initiales identiques à celles du scénario de référence .Nous montrons ainsi par cet essai l'influence de l'observabilité sur la qualité du filtrage .

CONCLUSION

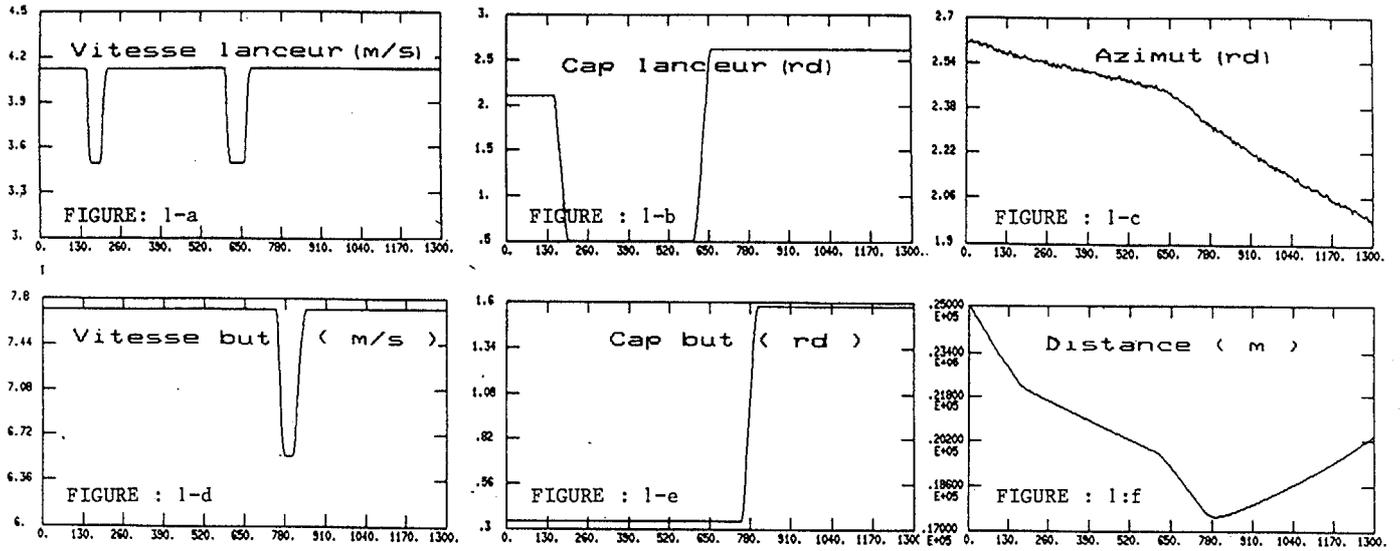
Différents tests d'observabilité de systèmes non linéaires ont été appliqués au problème d'azimétrie. Les critères d'observabilité de Nardone-Aidala ont pu ainsi être retrouvés à partir d'une approche non-linéaire. La notion d'observabilité a ensuite été utilisée pour optimiser la trajectoire du lanceur.

BIBLIOGRAPHIE :

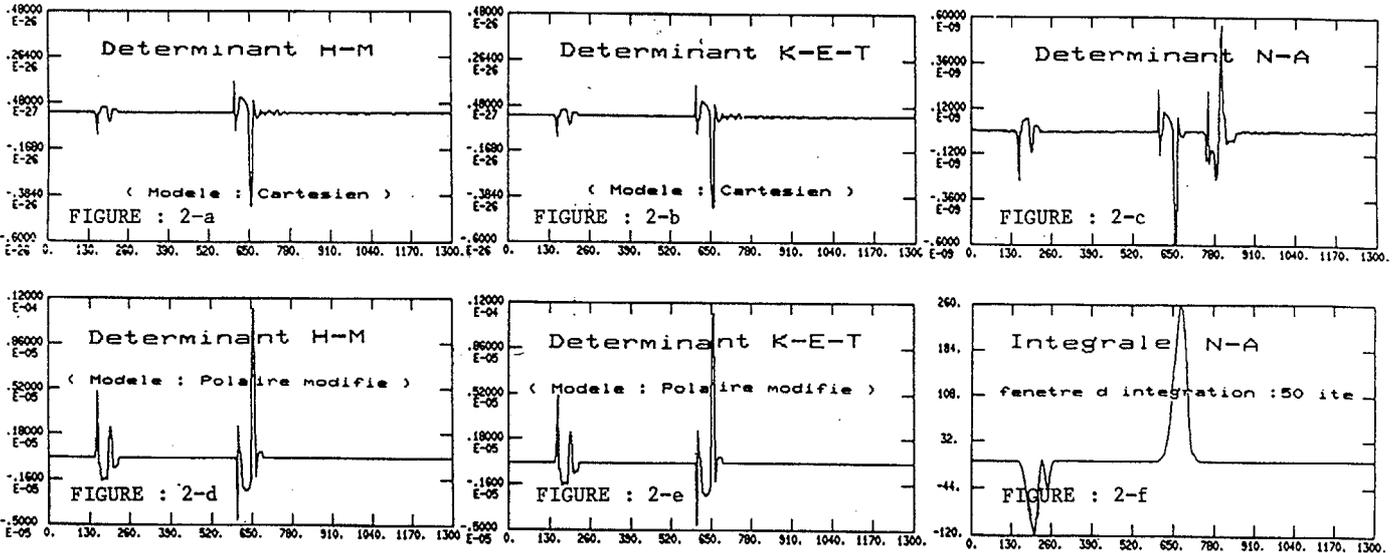
[1] A. GUILBERT, C. BOZZO 7ème GRETSI Nice, 79  
 [2] E. SIFFREDI Thèse -Marseille Janv 1982.  
 [3] AIDALA-HAMMEL IEEE vol AC-28 n°3 March 83  
 [4] B. BARBAGELATA Thèse -Marseille 1974.  
 [5] B. BARBAGELATA ,C. BOZZO 5ème GRETSI, 75.  
 [6] C. BOZZO "Le filtrage optimal et ses applications au problème de la poursuite " tome 3 Edit Lavoisier 1983 .  
 [7] NARDONE-AIDALA IEEE Vol AES-17 n°2 Mar 83  
 [8] S.R KOU, D.L ELLIOT, T.J TARN Journal of control 22, p 89-99 1973.  
 [9] T. FUJISAWA, E.S KUH IEEE 18 N°5 pp 501-506. sept 1971  
 [10] C.S HWANG , R.R MOHLER 23 rd C.D.C LAS VEGAS December 1984.  
 [11] R. HERMAN and A.J KRENER IEEE Vol AC-22 Oct 77  
 [12] A. OUSTRI Thèse -NICE décembre 1986



TRAJECTOIRE DE REFERENCE : CARACTÉRISTIQUES CINÉMATIQUES



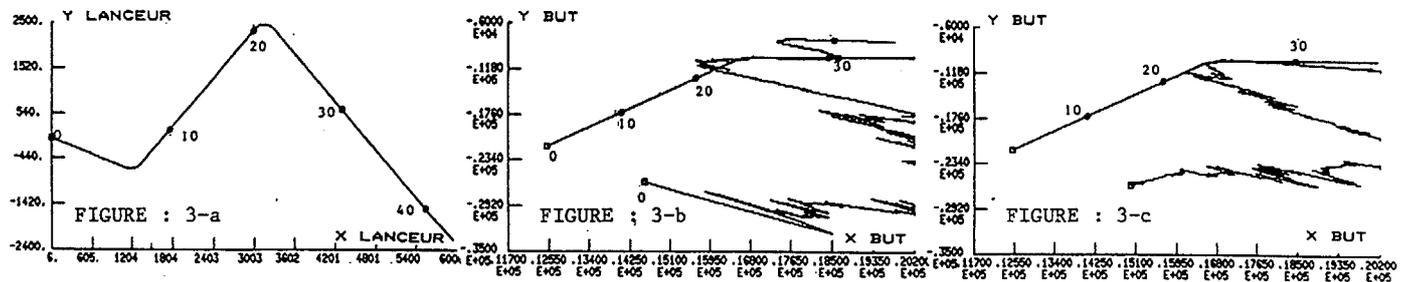
TESTS D'OBSERVABILITE CORRESPONDANT À LA TRAJECTOIRE DE REFERENCE



TRAJECTOIRE X-Y DE REFERENCE

FILTRE CARTESIEN

FILTRE POLAIRE MODIFIE



TRAJECTOIRE X-Y OPTIMISÉE

FILTRE CARTESIEN

FILTRE POLAIRE MODIFIE

