

CRITERE D'OBSERVABILITE EN TRAJECTOGRAPHIE
 PAR MESURE D'ANGLES POUR DES CIBLES EN MOUVEMENT
 NON RECTILIGNE UNIFORME

PILLON Denis -THOMSON-SINTRA ASM 06800 CAGNES/MER
 JAUFFRET Claude -GERDSM LE BRUSC-83140 SIX FOURS

Chemin des Travaux -BP 53
 06801 CAGNES-SUR-MER CEDEX

On présente un critère (CNS) permettant d'obtenir des conditions d'observabilité d'un système linéaire. On applique ce critère au problème de la trajectographie passive par mesure d'angle seul. Pour le cas classique où la cible est en mouvement rectiligne uniforme, ce critère permet d'obtenir très rapidement des résultats connus. On traite en plus des cas de trajectographie plus complexe.

We introduce a new observability criterion for linear systems. This criterion is applied to bearings-only T.M.A. problem. In the case of constant velocity motions, previously obtained results are rapidly achieved. More sophisticated trajectories are also considered.

1- INTRODUCTION

Trajectographier un mobile à l'aide d'un senseur purement passif et mesurant uniquement des grandeurs angulaires est un problème ancien ; déjà, en 1809, Gauss détermina la trajectoire képlérienne de l'astéroïde Cères à l'aide de 3 ou 5 visées successives d'une lunette astronomique [9]. Aujourd'hui, ce sont plus les utilisateurs de sonars passifs, d'auto-directeurs IR (Infra-Rouge) qui sont concernés par les problèmes de TPA (Trajectographie Passive par mesure d'Angles).

Néanmoins, une question fondamentale, qu'avait déjà en son temps abordé le jeune Gauss [7], c'est celle de l'observabilité, c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution dans le cas idéal sans perturbation. Il est bien sûr souhaitable d'avoir une réponse rigoureuse sous forme par exemple de condition nécessaire et suffisante (CNS) à cette question ne serait-ce que pour construire un estimateur. Mais de plus pour la TPA, l'observabilité dépend de la commande, c'est-à-dire la manoeuvre (ou mouvement) effectuée par le senseur. Les critères d'observabilité explicités ici, définissent entre autre les trajectoires du senseur permettant l'estimation de la cinématique d'une source, cinématique définie par un modèle d'un certain ordre 0, 1 ou 2.

2- RAPPEL SUR L'OBSERVABILITE

2.1- Notion d'observabilité et notations

Dans les applications qui suivent, on se débrouillera pour mettre sous forme de systèmes linéaires à temps continu les problèmes non-linéaires de TPA étudiés. On notera classiquement :

$$\begin{cases} \textcircled{1a} & \dot{x}(t) = A(t) x(t) + G(t) u(t) \\ \textcircled{1b} & y(t) = C(t) x(t) \end{cases}$$

On suppose ici la commande $u(t)$ et la sortie $y(t)$ de ce système déterministe parfaitement connues sur un certain intervalle $[t_0, t_1]$.

On cherche alors à connaître $x(t_0)$, l'état à l'instant initial (arbitraire). On dira le système observable (sur t_0, t_1) si $x(t_0)$ est déterminé par la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$ (sur ce même intervalle).

Si l'on intègre $\textcircled{1a}$ on obtient :

$$\textcircled{2} \quad x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) u(\tau) d\tau$$

où Φ est la matrice de transition associée à $A(t)$; en reportant dans $\textcircled{1b}$ on obtient :

$$\textcircled{3} \quad y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) u(\tau) d\tau = C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

Notons :

$$\textcircled{4} \quad r(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) u(\tau) d\tau, \text{ "commande intégrée"}$$

$$\textcircled{5a} \quad z(t) = y(t) - C(t) r(t)$$

$$\textcircled{5b} \quad = C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

2.2- CNS d'observabilité utilisée

Supposons le système linéaire non stationnaire $\textcircled{1}$ continu. Alors, il est observable si et seulement si

$$\textcircled{6} \quad \{\exists t \in [t_0, t_1] \text{ tel que } \forall x(t_0) \neq 0, z(t) \neq 0\}.$$

Autrement dit, le système est observable dès que la "sortie" (modifiée par la commande, terme $r(t)$) est non nulle. Cette propriété ancienne se trouve redémontrée par exemple dans [4], [6].



Une autre CNS classique d'observabilité est celle du Grammien dont le déterminant doit être non-nul [6]. Cette CNS est inemployable car l'intégration n'est pas analytiquement possible ici en TPA. Le NUSC utilise dans [1] et [2] une CNS basée sur la différentiation à l'ordre $n-1$ (n , dimension du vecteur d'état) des différentes matrices de ①. Ce critère, découlant du critère ⑥ est difficile à démontrer ([5] [4]) et demande de plus l'infinie dérivabilité des fonctions. En outre, il est lourd d'emploi.

2.3- Observabilité en non-linéaire

Les critères d'observabilité existant en non-linéaire sont difficiles à mettre en oeuvre car ils font appel à un formalisme mathématique de haut niveau [5]. En conséquence, ils n'ont pas, à notre connaissance, été utilisés dans des problèmes pratiques de trajectographie passive. L'ingénieur se contente d'une condition locale basée sur l'analogie d'un grammien comme c'est le cas dans [10] pour un problème pourtant simple (mesure de retard différentiel entre deux capteurs omnidirectionnels en 2D). L'introduction de courbure des rayons en TPA-sonar (comme légitimement le préconise [3]) rend le système non-linéaire et non traitable aisément.

2.4- Observabilité et information de Fisher

Intuitivement, on sent bien que si un minorant de la variance (par exemple la borne de Cramer-Rao) à une valeur infinie, alors cela équivaut à dire que le système à une infinité de solution, c'est-à-dire est inobservable. Ceci est rigoureusement vrai si le système est linéaire et si le bruit (gaussien) porte uniquement sur l'équation de mesure, la matrice de Fisher étant alors l'analogie du grammien d'observabilité. Cette situation entraîne parfois des abus de langage. Un système est ou n'est pas observable et pourtant certains auteurs parlent de système plus observable que d'autres. Il faut à notre sens entendre par là que la borne est plus ou moins grande (en terme de déterminant de la matrice de Fisher par exemple).

3- APPLICATION DU CRITERE D'OBSERVABILITE A DIFFERENTS CAS DE TPA

3.1- Cas triviaux

La solution de ces cas, bien qu'évidente, permet de comprendre, sur des cas simples, le mécanisme formel employé.

3.1.1- Localisation 2D

On considère une source ponctuelle fixe dont on mesure l'azimut à partir d'un senseur soumis aux commandes $u_x(t)$ et $u_y(t)$. Les coordonnées cartésiennes relatives (\dot{X} et \dot{Y}) suivent l'équation d'évolution la avec

$x(t) = [X(t), Y(t)]^T$, $\Phi(t_0, t) = I$, $G(t) = -I$
La mesure d'azimut $\beta(t)$ est donnée par

$$\textcircled{7} \quad \beta(t) = \text{Arctg} \left[\frac{X(t)}{Y(t)} \right]$$

L'équation de mesure de ce système déterministe est définie par :

$$C(t) = [\cos \beta(t), -\sin \beta(t)] \text{ et } y(t) = 0 \quad \forall t$$

Si l'on applique notre critère ⑤a, il faut que :

$$\textcircled{8} \quad C(t)z(t) \neq 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^t [\cos \beta(\tau) u_x(\tau) d\tau - \sin \beta(\tau) u_y(\tau) d\tau] \neq 0$$

Il est clair que si l'on ne pratique pas de commande ($u(t) = 0$) le système reste inobservable (ce qui est par ailleurs évident, les deux points étant fixes. Si maintenant, on pratique un mouvement du 1^{er} ordre (rectiligne uniforme : MRU) on a :

$$u_x(t) = v_x \cdot t \text{ et } u_y = v_y \cdot t$$

Alors $\text{tg} [\beta(t)] \neq v_x/v_y$. On obtient une condition sur $\beta(t)$ qui est $\beta \neq 0$. Si maintenant on utilise ⑤b, on obtient de façon identique en fonction des conditions initiales : $\text{tg} \beta(t) \neq X(0)/Y(0)$. Ainsi la condition peut s'écrire :

$$v_x/v_y \neq \alpha [X(0)/Y(0)]$$

La trajectoire (droite) ne doit pas passer par la position de la source et c'est la seule trajectoire rectiligne entraînant la non observabilité.

3.1.2- Triangulation en 2D

Considérons que la source suit MRU. On mesure à partir de deux antennes fixes distantes de L deux azimuts (cf. schéma 1) β_1 et β_2 . Le système est défini par :

$$x(t) = [X(t), Y(t), \dot{X}, \dot{Y}]^T, \text{ coordonnées absolues de la source}$$

$$\textcircled{9} \quad \Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} I & (t-\tau)I \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } u(t) \equiv 0 \text{ (capteurs fixes)}$$

Les deux angles mesurés sont donnés par :

$$\textcircled{10} \quad \begin{cases} \cos \beta_1(t) X(t) - \sin \beta_1(t) Y(t) = 0 \\ \cos \beta_2(t) (X(t)-L) - \sin \beta_2(t) Y(t) = 0 \end{cases}$$

ou

$$C(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta_1(t), -\sin \beta_1(t), 0, 0 \\ \cos \beta_2(t), -\sin \beta_2(t), 0, 0 \\ 0 \\ L \cos \beta_2(t) \end{bmatrix}$$

$y(t) = z(t)$ doit être non nul. C'est le cas pour $\beta_2(t) \neq \pm\pi/2$, autrement dit, la source ne doit pas être sur l'axe des x . Ici aussi la solution est évidente mais c'est une CNS que l'on a obtenue.

3.2- Cas déjà traités

Ces cas classiques (toujours en MRU) en 2D [1] et 3D [2] ont été traités par le NUSC mais avec une démonstration beaucoup plus longue.

3.2.1- TPA en 3D

Prenons comme vecteur d'état :

$$[X(t), Y(t), Z(t), \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]$$

3 coordonnées relatives de la source par rapport à l'antenne et la vitesse de la source. Les matrices de transition Φ et de commande G est du même type qu'au § 3.1.2.

Les mesures sont définies par (cf. schéma 2) :

$$\textcircled{11} \quad \begin{cases} \beta(t) = \text{Arctg} [X(t)/Y(t)] \\ \varphi(t) = \text{Arctg} [Z(t)/\sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}] \end{cases}$$

ou, sous forme linéaire :

$$C(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta(t) & -\sin \beta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta(t) \sin \varphi(t) & \cos \beta(t) \sin \varphi(t) & -\cos \varphi(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si l'on applique (5a), on trouve :

$$\begin{vmatrix} r_x(t) \cos \beta(t) - r_y(t) \sin \beta(t) \\ r_x(t) \sin \beta(t) \sin \varphi(t) + r_y(t) \cos \beta(t) \sin \varphi(t) - r_z(t) \cos \varphi(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

avec $r(t) = [r_x(t), r_y(t), r_z(t)]^T$ le terme dû à l'intégration de la commande (4). Pour qu'il y ait observabilité, il faut qu'il y ait manoeuvre selon un axe quelconque ($u \neq 0$). Mais ceci n'est pas suffisant : la commande doit vérifier l'inégalité (12). De telles trajectoires ambiguës (i.e. avec manoeuvre et toutefois ne rendant pas le problème observable) sont des cas pathologiques facile à représenter en 2D (Schéma 3a).

Un autre exemple est donné par le schéma 3b. On considère pour simplifier que la source est sur l'axe des x et que l'on va droit à sa poursuite en ne se permettant que des accélérations. Autrement dit, $\beta = \pi/2 = \text{cst}$ et $u_y = 0$. En appliquant (12), on constate qu'il y a toujours inobservabilité.

On peut aussi l'écrire sous forme d'une condition de proportionnalité (voir § 3.1.1). Comme $y(t) = 0$ on a comme condition d'inobservabilité (d'après (5a) + (5b)) $C(t) r(t) = C(t) \Phi(t, t_0) X(t_0) = 0 \quad \forall t$

On peut démontrer alors la proportion (cf. [4]) :

$$r(t) \equiv \alpha(t) \Phi(t, t_0) X(t_0) \quad \alpha(t) \neq 0$$

Si on l'applique au cas de TPA 3D on trouve :

$$\begin{vmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{vmatrix} \equiv \alpha(t) \begin{vmatrix} X(t_0) + (t-t_0) \dot{X} \\ Y(t_0) + (t-t_0) \dot{Y} \\ Z(t_0) + (t-t_0) \dot{Z} \end{vmatrix}$$

C'est aussi une condition trouvée par le NUSC dans [2].

3.2.1- TPA 3D avec condition sur l'immersion

Un autre cas particulier abordé par le NUSC est le cas où l'immersion relative (altitude) est une constante non nulle ($\dot{Z} = 0$). Le vecteur d'état est alors :

$$[X(t), Y(t), Z, \dot{X}, \dot{Y}]$$

Le terme r_z n'existant plus, les conditions sont :

$$\left| \begin{array}{l} r_x(t) \cos \beta(t) - \sin \beta(t) r_y(t) \equiv 0 \\ \text{ou} \\ r_x(t) \sin \beta(t) + \cos \beta(t) r_y(t) \equiv 0 \text{ avec } \varphi(t) \neq 0 \end{array} \right.$$

Ce système est vérifié quelle que soit la commande r_x et r_y non nulle dans le plan. Il n'y a pas de trajectoire dite ambiguë.

Si maintenant l'immersion $Z \neq 0$ est connue, le vecteur d'état est $[X(t), Y(t), \dot{X}, \dot{Y}]$ et la mesure $y(t) = [0, \cos \varphi(t), Z]$. Sans commande cette mesure est non nulle sauf si le bruiteur est dans le même plan vertical que la trajectoire de l'antenne. Il n'y a qu'une trajectoire rectiligne entraînant l'inobservabilité.

3.3- Cas nouveau

Si la cible n'est pas en MRU comme dans tous les cas classiques précédents et si bien sûr elle suit toujours un modèle indéterministe, on peut se demander si l'antenne peut se contenter de suivre un MRU pour qu'il y ait observabilité en TPA. Plus précisément, on traite le cas de la TPA 3D avec mouvement uniformément accéléré (MUA).

Le vecteur d'état est défini par : $x(t) = [X(t), Y(t), Z(t), \dot{X}(t), \dot{Y}(t), \dot{Z}(t), a_x, a_y, a_z]$ coordonnées et vitesses relatives et accélération source ($\neq 0$).

La matrice de transition devient [8] :

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} I & (t-\tau)I & (t-\tau)^2/2 I \\ 0 & I & (t-\tau)I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}$$

Les commandes imprimées à l'antenne agissent sur la composante d'ordre le plus élevé (l'accélération). Les critères sont alors du même type en 3.2.1. Seule la forme de r change. Si il n'y a pas de commande, r est nul et le système est inobservable. Il faut donc que l'antenne suive un mouvement ici aussi d'un ordre supérieur à celui du modèle de trajectoire de la cible, c'est-à-dire ici non MAU. De plus, il y a là aussi une infinité de trajectoires pathologiques ambiguës. On pourrait généraliser ce cas avec des modèles avec un coefficient d'évolution de type Singer [8]. Ce cas est celui que l'on rencontre en missile aérien [11] ou en sonar TPA 2D si l'on veut approximer des manoeuvres en arc de cercle d'un bâtiment par une équation linéaire.

4- CONCLUSION

Pour les cas sans contrainte (pas d'immersion figée) on a montré que le système est inobservable si l'antenne suit un mouvement d'un ordre inférieur ou égal à celui de la cinématique de la source. En localisation (cible fixe), le senseur ne doit pas être fixe ; si la source est en MRU, le senseur ne doit pas suivre un MRU et de même pour le MAU. De plus, il existe des trajectoires ambiguës, c'est-à-dire avec commande non nulle et ne rendant pas le système observable.

Si l'on ajoute des contraintes, comme une immersion relative constante ..., alors celles-ci interviennent de la même façon que des mesures additionnelles ("pseudo-mesures") : les trajectoires ambiguës disparaissent et même, l'ordre requis pour la trajectoire de l'antenne peut être égal à celui du mouvement de la source. Il existe bien sûr d'autres exemples du même type quand il y a apport de la vitesse en TPA 2D, de la fréquence ...

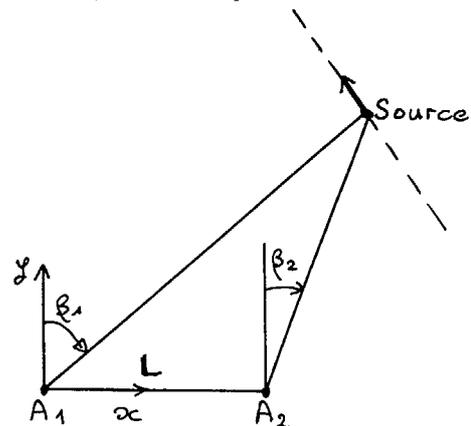


Fig1: triangulation en 2D (Antenne Fixe)



REFERENCES

- [1] NARDONE, AIDALA "Observability criteria for bearing only target motion analysis" IEEE AES-17 N° 2. Mars 81 pp. 162-166
- [2] HAMMEL, AIDALA "Observability requirements for the three-dimensional tracking via angle measurements" IEEE AES-21 N° 2. March 85 pp. 200-207
- [3] MATZE Comment on "Observability requirements for three dimensional tracking via angle measurements" IEEE AES-22 N° 4. July 86 pp. 465-466
- [4] PILLON "Observabilité en trajectographie passive" GERDSM-DCN Toulon N° 49341 ET/LD 14.01.86
- [5] R. HERMANN, AJ KRENER "Non linear controllability and observability" IEEE AC-22 N° 5 October 77 pp. 728-740
- [6] I. ROITENBERG "Théorie du contrôle automatique" MIR 74
- [7] SORENSON "Least Square Estimation : from Gauss to Kalman" IEEE Spectrum July 70 pp. 63-68
- [8] R. SINGER "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets" IEEE AES-6 N° 4 July 70 pp. 473-483
- [9] CHANG, TABACZYNSKI "Application of state estimation to target tracking" IEEE AC-29 N° 2 February 84 pp. 98-109
- [10] BAR-SHALOM, ARNOLD, ESTRADA, MUCCI "Target Parameter estimation using measurement acquired with small numbers of sensors" IEEE OE-8 N° 3 July 83 pp. 163-172
- [11] SONG, SPEYER "A stochastic analysis of a modified gain extended Kalman filter with applications to estimation with bearing only measurements" IEEE AC-30 N° 10 October 85 pp. 940-949

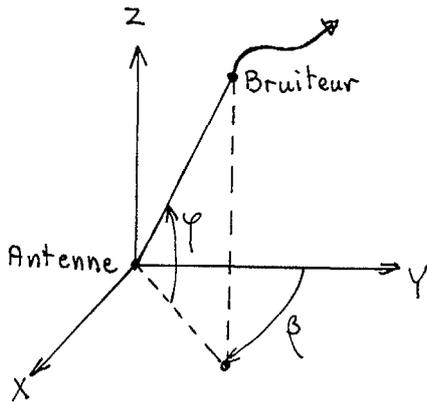


Fig 2: Repère angulaire relatif

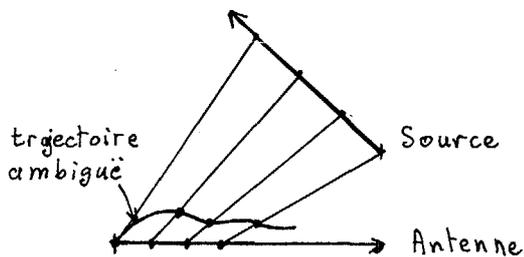


Fig 3.a

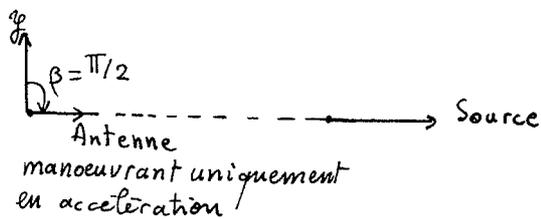


Fig 3.b

Fig 3: Exemples de trajectoire ambiguë en 2D