

# Influence de la fréquence d'échantillonnage sur les performances de l'algorithme L.M.S

Béatrice PHILIBERT - Wlodek KOFMAN

CEPHAG - ENSIEG

Domaine universitaire bp 46 - 38402 Saint Martin d'Hères (FRANCE )

## Résumé

Nous testons les performances d'un algorithme adaptatif L.M.S. utilisé pour identifier un canal de transmission. Nous nous intéressons aux effets du format des calculs (nb de bits) et de la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  des signaux sur le temps de convergence  $N_c$  et sur l'erreur quadratique résiduelle  $\epsilon_r^2$ . Deux simulations (réalisées sans bruit perturbateur) étudient les variations de  $N_c$  et  $\epsilon_r^2$  en fonction du format des calculs, de  $F_e$  et de la corrélation  $C$  du signal à l'entrée. Nous étudions aussi l'influence d'un bruit perturbateur sur les performances de l'algorithme L.M.S.

## Introduction

Dans cet article, nous étudions les limitations de l'algorithme L.M.S en fonction de la fréquence d'échantillonnage des signaux. Cet algorithme est appliqué à l'estimation de la réponse impulsionnelle d'un canal de transmission. Ses performances sont caractérisées par deux paramètres : le temps de convergence et l'erreur quadratique résiduelle mesurée après la convergence. Conjointement, deux formats de calculs sont étudiés :

- l'un utilise la précision maximale de l'ordinateur (virgule flottante),
- l'autre n'utilise que le nombre de bits nécessaire aux multiplications (d'où apparition d'un bruit de calcul supplémentaire).

### 1 Filtre adaptatif

La figure n° 1 présente le système adaptatif que nous étudions dans cet article. Ce système est un filtre classique du type L.M.S [1][2], dont nous rappellons brièvement les propriétés. Le système adaptatif cherche à estimer la réponse impulsionnelle  $\underline{W}$  d'un filtre linéaire inconnu par la méthode du gradient. La réponse  $\underline{W}$  est un vecteur de dimension  $N_w$  qui agit sur le signal  $\underline{X}$  :  $\underline{W} = [W_1, \dots, W_{N_w}]^T$   
 $\underline{X} = [X_1, \dots, X_{l-N_w+1}]^T$  (1)

La sortie du filtre  $\underline{W}$  à l'instant  $l$  est

$$Y(l) = \underline{W}^T(k) \underline{X} \text{ (où } k \text{ représente la } k^{\text{ième}} \text{ itération)} \quad (2)$$

L'erreur, qui représente la différence entre le signal  $Z(l)$  en sortie du système inconnu et la sortie  $Y(l)$ , est utilisée pour calculer le nouveau vecteur  $\underline{W}$ .

$$\epsilon(l) = Z(l) - Y(l) \text{ , } \underline{W}(k+1) = \underline{W}(k) + 2\mu\epsilon(l)\underline{X}(l) \quad (3)$$

## Summary

We test the performances of an L.M.S adaptive algorithm, designed for channel identification. We are interested in effects of sampling, quantization, fixed point computation and disturbance due to additive noise. We use two different models studying the effects of  $F_e$  (sampling rate),  $C$  (correlation of the input signal) and fixed point algorithm on the convergence rate and on the quadratic error  $\epsilon_r^2$ .

Cet algorithme est une solution sous-optimale du filtre de Wiener dans laquelle la dérivée de l'erreur quadratique moyenne a été remplacée par celle de l'erreur instantanée, la constante  $\mu$  ne dépend pas du temps.

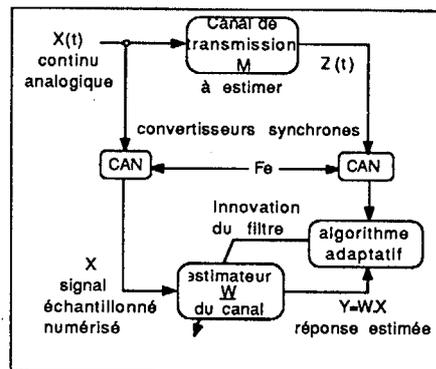


Figure n°1

La solution de Wiener est donnée par :

$$\underline{W}^* = \underline{R}^{-1} E\{Z(l)\underline{X}^T\} \quad (4)$$

et l'erreur quadratique moyenne minimale par

$$\epsilon^* = E\{Z(l)^2\} - E\{Z(l)\underline{X}\} \underline{W}^* \quad (5)$$

$\underline{R}$  est la matrice de corrélation en entrée

$$\underline{R} = E\{\underline{X}\underline{X}^T\} \quad (6)$$

Cette erreur représente la borne inférieure de l'erreur de tout système non optimal.

Il a été démontré que, pour que le système adaptatif converge, il faut que  $1/\lambda_{\max} > \mu > 0$ . L'enveloppe de l'erreur  $\epsilon(l)$  diminue avec une constante de temps  $T_p = 1/2\mu\lambda_p$  où les  $\lambda_p$  sont les valeurs propres de la matrice  $\underline{R}$ . En supposant que le signal  $\underline{X}$  a une puissance



normée,  $tr_{\underline{R}}=Nw$ , alors l'enveloppe globale qu'on appelle la courbe d'apprentissage a une constante de temps  $T_c=(Nw+1)/4\mu tr_{\underline{R}}$ . En pratique, on n'a pas toujours accès à  $\lambda_{max}$ , alors une condition suffisante à la convergence est :  $1/tr_{\underline{R}}>\mu>0$  .[2]

**2 Objectifs de l'étude**

En pratique, le système adaptatif sert très souvent à estimer ou à compenser la réponse d'un canal inconnu continu. Les signaux X et Z sont analogiques et continus, il est donc nécessaire de les échantillonner et de les numériser. Nous nous intéressons ici aux performances de l'algorithme LMS en fonction de la fréquence d'échantillonnage et de la corrélation du signal d'entrée. La quantification du signal et la réalisation pratique ont une influence sur ses performances, les calculs étant souvent faits en virgule fixe. Nous les étudions dans le cas d'une réalisation particulière d'un système d'identification et de compensation de milieu de transmission développé au CEPHAG [5].

Nous caractérisons les performances du système à partir de la courbe d'apprentissage  $\epsilon^2(k)$  qui est la moyenne glissante de l'erreur instantanée en fonction du temps. Nous calculons l'erreur quadratique résiduelle :  $\epsilon_r^2 = \sum \epsilon(k)/N$  pour les temps ( $k \gg 1$ ) très grands, lorsque le filtre a convergé et s'est stabilisé. La borne inférieure de cette erreur est donnée par la formule (5). En pratique cette erreur est toujours supérieure à  $\epsilon$  du fait de la taille limitée du vecteur  $\underline{W}$  (erreur de biais) et du bruit de calcul.

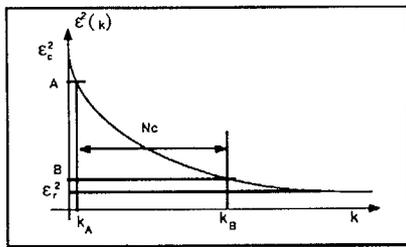


Figure n°2

Le deuxième paramètre étudié est le temps de convergence  $T_c$  qui est mesuré comme l'intervalle temporel entre 90% et 10% de  $\epsilon^2(k)$  (figure n° 2). Lorsque la fréquence d'échantillonnage varie, le nombre d'itérations par seconde varie de la même manière. Si on mesure le temps de convergence en secondes, ce phénomène de compression (prépondérant par rapport aux autres phénomènes existants) va masquer les faibles variations de  $T_c$ . Nous mesurons donc le nombre d'itérations  $N_c$ .

**3 Etude des effets de l'échantillonnage et de la corrélation**

Nous avons réalisé des expériences numériques pour simuler ces effets. Sur la figure n° 3 nous présentons le synoptique de la simulation. Un bruit à large bande  $B_L(t)$  (0-20kHz) est filtré par un filtre analogique passe bas H1. Celui-ci est de type Butterworth d'ordre

6, avec une fréquence de coupure de 2kHz. Le signal obtenu  $B_F(t)$  est alors échantillonné ( $F_1=4kHz$ ), numérisé sur 12 bits puis filtré à nouveau par un filtre numérique passe-bas H2. Le signal  $\underline{X}$  obtenu est envoyé simultanément vers le canal de transmission inconnu  $\underline{M}$  et l'estimateur  $\underline{W}$ . Pour le modèle du canal nous avons pris un filtre passe-bande (10-150Hz) type Butterworth. La simulation de la fréquence de l'échantillonnage est obtenue grâce aux interrupteurs synchrones 1 et 2 (figure n° 3). Ceux-ci permettent de ne conserver qu'un échantillon sur deux ou trois ... etc, pour le calcul de l'estimateur  $\underline{W}$ .

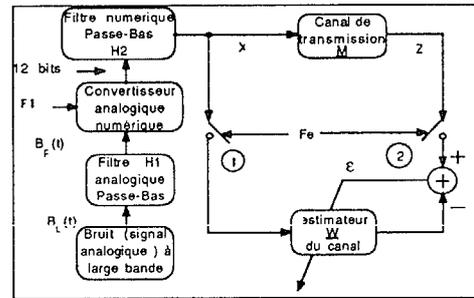


Figure n° 3

Une variation sur l'échantillonnage change en même temps le coefficient de corrélation entre deux échantillons successifs. Dans le tableau 1 nous regroupons les différents paramètres de la simulation.

H1	fc = 2000 Hz (fréquence de coupure)				
F1	F1 = 4000 Hz				
H2	fc = 150 Hz (fréquence de coupure)				
M	F1 = 10 Hz F2 = 150 Hz (fréquence de coupure)				
	Fe	400 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
C = f(Fe)		0,3	0,5	0,86	0,96
$\mu$ = entre $2^{-5}$ et $2^{-9}$					

Tableau 1

Pour que la durée de la réponse du filtre n'influe pas sur les résultats des expériences, nous l'avons fixée à 200 ms, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage utilisée. Ceci est important car une durée trop courte ou trop longue augmenterait l'erreur résiduelle [3]. La durée d'estimation étant fixée, il faut faire varier le nombre de poids  $Nw$  et  $F_e$  avec la relation :  $Nw/F_e=const.$

Dans notre simulation, l'estimation de la réponse du canal est donnée au bout de 8192 itérations, l'erreur instantanée et l'erreur  $\epsilon^2$  sont aussi montrées. L'erreur  $\epsilon^2$  a été calculée sur une moyenne de 100 échantillons. Elle tend vers une valeur limite  $\epsilon_r^2$ . La figure n° 5 présente la dépendance du nombre d'itérations  $N_c$ , de la fréquence d'échantillonnage et du facteur de convergence  $\mu$  de l'algorithme. On retrouve ici le résultat connu : plus le facteur de convergence est faible, plus le temps de convergence est grand. En effet, la correction de la réponse impulsionnelle du filtre est moins importante à chaque itération ; lorsqu'on diminue le facteur de convergence, il faudra un nombre plus grand d'itérations pour converger vers une solution stable. On voit aussi que le nombre d'itérations diminue avec

la fréquence d'échantillonnage. Cet effet est beaucoup plus important pour les  $\mu$  faibles. La figure montre aussi que, lorsque la fréquence d'échantillonnage s'approche de la limite de Shannon, le système commence à diverger.

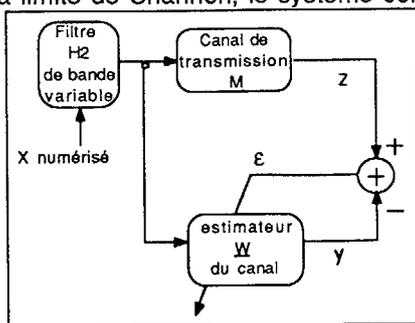


Figure n°6

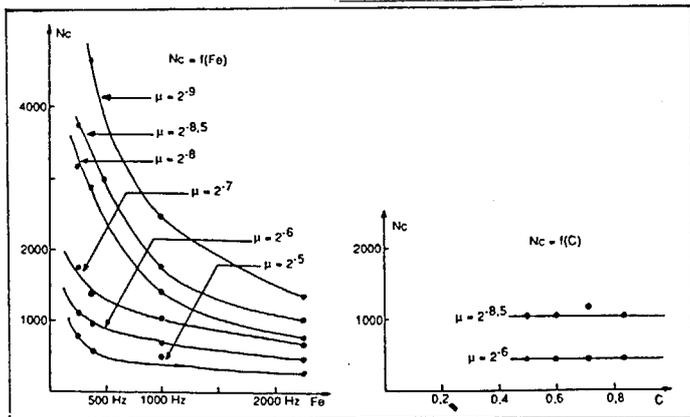


Figure n°5

Figure n°7

On peut voir dans le tableau 1 qu'en changeant  $F_e$  dans notre simulation nous changeons aussi la corrélation entre les échantillons. On peut se demander si l'échantillonnage est responsable de la diminution de  $N_c$  et quel est l'effet de la corrélation entre les échantillons du signal  $X$ . Nous avons donc mené la simulation qui est décrite sur la figure n° 6. Pour modifier le coefficient de corrélation des échantillons, on fait varier la bande passante du filtre  $H_2$ . La fréquence d'échantillonnage reste constante (2kHz) et le nombre de points sur lequel est faite l'estimation reste constant (400). Nous avons vérifié que l'erreur de biais est faible. La figure n° 7 montre que la corrélation entre les échantillons n'a pas d'influence sur le temps de convergence dans certaines limites. Ces résultats rejoignent l'étude théorique de l'algorithme LMS à 1 point de Bershad [4].

La variation de  $N_c$  en fonction de  $F_e$  ne s'explique pas seulement par une variation de  $C$ . En fait, en faisant varier  $F_e$ , on fait varier simultanément la corrélation à l'entrée et à la sortie du canal  $M$ . La corrélation du signal d'erreur augmente lorsque  $F_e$  augmente. Une fois la convergence amorcée, la correction du gain sera donc plus efficace à chaque itération, le gain  $W$  peut converger plus vite vers la bonne valeur. Cet effet est plus important lorsque  $\mu$  est faible. En effet, la correction étant faible, l'utilisation d'échantillons corrélés de  $\epsilon$  permet à l'algorithme de mieux utiliser l'information contenue dans  $\epsilon$ .

Pour de coefficients de corrélation proches de 1, les performances de l'algorithme se dégradent fortement. Sur la figure n° 8, nous montrons l'erreur résiduelle en fonction de  $F_e$ . Cette simulation a été faite sans ajouter de bruits perturbateurs sur les signaux. On peut voir sur la figure que l'erreur augmente de façon importante lorsque  $F_e$  diminue en s'approchant de la limite de Shannon.

4 Performances de l'algorithme en présence de bruit additif

Pour simuler les effets du bruit perturbateur, nous ajoutons au signal  $Z(t)$  un bruit gaussien  $B(t)$  à corrélation très étroite, indépendant de  $X(t)$  et de  $Z(t)$ . Le signal  $Z(t) + B(t)$  est alors utilisé dans la simulation décrite par la figure n° 3, pour deux rapport signal à bruit :  $[S/B] = 0$  dB et  $[S/B] = 3$  dB, avec  $[S/B] = P_x/P_b$  ( $P_x$  : puissance du signal et  $P_b$  : puissance du bruit). Cette simulation montre deux effets importants :

- a) une augmentation du temps de convergence lorsque le rapport  $[S/B]$  diminue ou lorsque la fréquence d'échantillonnage diminue (les deux effets sont cumulatifs).
- b) une augmentation de l'erreur résiduelle lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente. La simulation faite sans bruit additif conduit à une conclusion opposée. En effet, le bruit ajouté au signal a une corrélation très étroite, son influence augmente dans le coefficient d'innovation lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente. Par contre, si cette fréquence diminue (proche de Shannon), les échantillons de bruit sont moins corrélés entre eux, leur influence devient très faible dans le coefficient d'innovation et le taux d'erreur résiduelle diminue (On retrouve ce comportement sur la figure n° 8b).

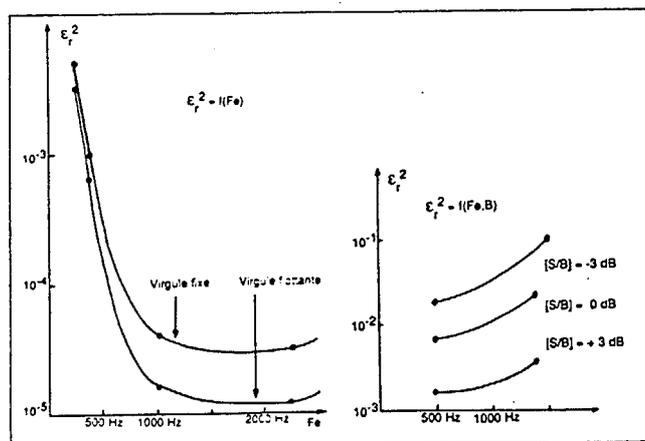


Figure n°8a

Figure n°8b

Lorsqu'on utilise cet algorithme dans un système temps réel, avec des signaux bruités, la fréquence d'échantillonnage choisie doit être le résultat d'un compromis sur les performances : faible temps de conver-

