



APPLICATION DES ALGORITHMES D'IDENTIFICATION DES CHAINES DE MARKOV CACHEES EN COMMUNICATIONS NUMERIQUES

R.VALLET, H.KOREZLIOGLU, A.KHOUKHI

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
Département Système et Communications
46 Rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

ABSTRACT.

RESUME

Le problème d'identification des paramètres d'un canal à phase aléatoire et à bruit additif est étudié. Deux algorithmes sont considérés: Le premier, un algorithme global se basant sur la technique Forward-Backward introduite par Baum et Welsh [3] et généralisée par Liporace [4] et qui à partir d'un bloc de données estime de façon itérative les paramètres du canal en utilisant la transformation de réestimation [3]. Cette approche a été appliquée avec succès à la reconnaissance de la parole [5], et à l'écologie [6]. Le deuxième est un algorithme récursif consistant en l'évaluation de la moyenne temporelle conditionnellement à l'observation, ceci revient à remplacer, dans le premier algorithme, le lissage par le filtrage.

The parameter identification problem for a channel with phase jitter and additive noise is studied. Two types of algorithms are considered.

The first is an off line algorithm based on Forward-Backward technic, introduced by Baum-Welsh [3] and extended by Liporace [4]. It estimates iteratively the parameters of the channel by means of the reestimation transformation in terms of a block of data. This approach was successfully applied to speech recognition [5] and to ecology [6].

The second is a recursive algorithm consisting of the evaluation of the time average conditionnaly on the observation. This amounts to replacing in the first algorithm smoothing by filtering, which makes recursive the reestimation transformation in the Forward-Backward algorithm.

INTRODUCTION:

Dans cet article, nous développons une méthode d'estimation itérative des paramètres d'un système non-linéaire, non contrôlé, excité par des entrées non directement observables. Ce système est modélisé par une chaîne de MARKOV cachée. Une application particulière est la modélisation d'une chaîne de transmission numérique comportant un canal à phase aléatoire et à bruit additif blanc gaussien.

Simultanément à la détection des symboles d'information, par un algorithme de lissage ou de filtrage non-linéaire, il est nécessaire d'estimer les paramètres du modèle considéré. Cette identification du modèle peut s'effectuer de façon itérative dans une phase d'apprentissage ou récursivement au cours de la transmission pour suivre les variations lentes des paramètres du modèle.

Un système de transmission, comme tout système dynamique, possède une représentation d'état. Un système de transmission sur fréquence porteuse est représenté par son équivalent en bande de base. Lorsque la valeur de la fréquence porteuse est grande par rapport à la largeur de bande du signal modulé, la décomposition est unique. Mais l'observation est une fonction non linéaire des variations de phase apportées par le canal de transmission. Pour une modulation numérique à sauts de phase, un algorithme de maximisation de la fonction de vraisemblance conjointe de la phase et des données a été proposé par O.MACCHI [1]. Un algorithme de filtrage non-linéaire a été proposé dans [2] lorsque les paramètres du modèle sont connus de l'observateur.

L'estimation des paramètres du modèle peut être effectuée par un algorithme de KALMAN étendu si on linéarise l'équation d'observation autour de la valeur de la phase estimée à l'instant précédent. La phase de l'observation est alors un paramètre du modèle. Cette approche n'est possible que pour de bons rapports signaux à bruit (>15dB) et des variations lentes de la phase.

Dans cet article, nous présentons deux algorithmes d'identification des paramètres d'une chaîne de MARKOV cachée. En première partie, nous présentons l'algorithme FORWARD-BACKWARD proposé par BAUM et WELCH [3] et par LIPORACE [4]. On effectue une estimation des paramètres du modèle au sens du Maximum d'entropie de KULLBACK à partir d'une observation de durée finie et d'un algorithme itératif. En deuxième partie, nous présentons un algorithme récursif de type "gradient stochastique", basé sur la forme filtre de l'estimateur de l'état du modèle.

MODELISATION DE LA MODULATION:

Nous considérons un modèle d'états à temps discret et à valeurs discrètes.

Etat: $X_n = \{a_n, \theta_n\}$

Observation: Y_n pour $n \in [1, N]$

Equation d'états:

$$a_n = 2u_n - 1 \quad \text{et} \quad \theta_n = \theta_{n-1} + d\theta_n + \Delta\theta \quad (1)$$

Equation d'observation:

$$Y_n = a_n A e^{j\theta_n} + b_n \quad (2)$$

pour $n=1, \dots, N$

u_n est un symbole produit par la source, a_n est un symbole utilisé par l'émetteur (ex: $u_n = 0$ ou 1 et $a_n = -1$ ou $+1$).

θ_n est une suite de variables aléatoires telle que: la densité de probabilité de θ_0 soit: $P(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}$, i.e. θ_0 équiréparti sur $[0, 2\pi]$

La densité conditionnelle $p(\theta_n | \theta_{n-1})$ correspond à $N(\theta_{n-1} + \Delta\theta, \sigma_\theta^2)$ si on néglige la masse en dehors de $[-\pi, \pi]$.

θ_n pour $n=1, \dots, N$ est une marche aléatoire sur le cercle unité. Les incréments $d\theta_n$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $\Delta\theta$. $\Delta\theta$ représente l'effet d'une dérive de fréquence.

a_n est le symbole utilisé par l'émetteur (par exemple: $+ - 1$).

A est une constante réelle positive telle que $A^2 = 2E_b$ ou E_b est l'énergie par bit du signal transmis.

b_n est une suite de variables aléatoires à valeurs complexes de variance $2N_0$.

$b_n = b_{cn} + j b_{sn}$; $E(b_{cn}^2) = E(b_{sn}^2) = N_0$ et $E(b_{cn} b_{sn}) = 0$.

Le vecteur de paramètres à estimer est donc défini par:

$$\Lambda = \{A, N_0, \sigma_\theta^2, \Delta\theta\} \quad (3)$$

ALGORITHME DE LISSAGE NON-LINEAIRE:

Un modèle général d'estimation des paramètres d'une chaîne de Markov a été décrit dans [4].

Dans ce qui suit, nous supposons que θ_n est convenablement quantifié pour les besoins du calcul.

La densité de probabilité conditionnelle de $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ étant donné $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ s'écrit:

$$L \left[Y_1^N | \theta_1^N, \Lambda \right] = \prod_{n=1}^N P \left\{ Y_n | \theta_n, \Lambda \right\} \quad (4)$$

où $P(\cdot)$ désigne la densité de probabilité de Y_1^N conditionnellement à θ_n .

La probabilité d'une suite $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, en fonction du vecteur de paramètres Λ est définie par:



$$P\{\theta_1, \dots, \theta_N | \Lambda\} = P\{\theta_0\} \prod_{n=1}^N P\{\theta_n | \theta_{n-1}, \Lambda\} \quad (5)$$

La densité de probabilité de l'observation $\{Y_1, \dots, Y_N\}$ s'exprime par:

$$L\{Y_1^N | \Lambda\} = \sum_{\theta_0^M} L\{Y_1^N | \theta_1^N, \Lambda\} P\{\theta_1^N\} \quad (6)$$

ou en reportant (4) et (5) dans (6) :

$$L\{Y_1^N | \Lambda\} = \sum_{\theta_0^M} P\{\theta_0\} \prod_{n=1}^N P\{\theta_n | \theta_{n-1}, \Lambda\} P\{Y_n | \theta_n, \Lambda\} \quad (7)$$

$\sum_{\theta_0^M}$ représente la sommation sur tous les chemins possibles $\{\theta_0, \dots, \theta_1, \dots, \theta_N\}$ soit $N+1^M$ chemins différents si la phase θ_i est quantifiée sur M valeurs.

La fonction de vraisemblance de la phase θ_n à un instant n , compte tenu de l'observation Y_1^N avec $1 \leq n \leq N$, i.e. la loi jointe de Y_1^N et de θ_n peut s'exprimer à partir de deux fonctions calculées de façon récursive, l'une $\alpha\{\theta_n | \Lambda\}$ dans le sens direct (forward) et l'autre $\beta\{\theta_n | \Lambda\}$ dans le sens rétrograde (backward).

$$L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\} = \alpha\{\theta_n | \Lambda\} \beta\{\theta_n | \Lambda\} \quad (8)$$

Cette fonction de vraisemblance peut ainsi être calculée pour une valeur initiale du vecteur de paramètres Λ . Pour estimer la valeur du vecteur de paramètres Λ , il est possible d'utiliser un algorithme de réestimation du vecteur Λ qui maximise, par rapport à Λ la vraisemblance $L\{Y_1^N | \Lambda\}$

ALGORITHME DE REESTIMATION:

Nous utiliserons la méthode proposée par LIPORACE [4] qui est basée sur l'utilisation de la fonction d'information de KULLBACK, qui définit une "distance" entre deux vecteurs de paramètres Λ et Λ' .

Cette fonction d'entropie est définie par:

$$Q\{\Lambda, \Lambda'\} = \sum_{\theta_1^N} \left[L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda\} \text{Log}_e \left[\frac{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\}}{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda\}} \right] \right] \quad (9)$$

L'utilisation de cette fonction auxiliaire repose sur les propriétés suivantes:

- 1) si $Q\{\Lambda, \Lambda'\} > Q\{\Lambda, \Lambda\}$ alors $L\{Y_1^N | \Lambda'\} > L\{Y_1^N | \Lambda\}$
- 2) si $P\{Y_n | \theta_n, \Lambda\}$ est symétrique élliptique, Y_n est une somme de variables aléatoires Gaussiennes, $Q\{\Lambda, \Lambda'\}$ possède un maximum unique, qui est de plus un point critique.
- 3) La valeur Λ du paramètre est un point critique de la fonction de vraisemblance si et seulement si il est un point fixe de la transformation de réestimation.

$$\nabla_{\Lambda} \left[L\{Y_1^N | \Lambda\} \right] = \nabla_{\Lambda'} \left[Q\{\Lambda, \Lambda'\} \right] |_{\Lambda' = \Lambda} \quad (10)$$

L'algorithme de réestimation des paramètres utilise l'information mutuelle entre les deux modèles Λ et Λ' . On cherche Λ' tel que $Q\{\Lambda, \Lambda'\}$ soit maximale ou ce qui est équivalent que sa dérivée en Λ' soit nulle. En utilisant la définition du modèle donné par les relations (2),(3) et (8), la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda\} = \quad (11)$$

$$P\{\theta_0\} \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp \left[-\frac{(\theta_n - \theta_{n-1} - \Delta\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} \right] \cdot \frac{1}{2\pi N_0} \exp \left[-\frac{|Y_n - a_n A e^{j\theta_n}|^2}{2N_0} \right]$$

Le vecteur de paramètres Λ est défini par:

$$\Lambda^T = \left[\sigma_\theta^2, \Delta\theta, A, N_0 \right] \quad (12)$$

et le vecteur Λ' par:

$$\Lambda'^T = \left[\sigma_\theta'^2, \Delta\theta', A', N_0' \right] \quad (13)$$

La suite des symboles $\{a_1, \dots, a_N\}$ est estimée lorsque l'algorithme considéré a convergé.

Pour simplifier les expressions obtenues, on peut considérer que l'observateur connaît la suite des symboles $\{a_1, \dots, a_N\}$, l'algorithme est alors utilisé dans une période d'apprentissage.

Le logarithme de l'expression (18) est facile à obtenir et en dérivant l'expression ainsi obtenue par rapport à chacune des composantes du vecteur Λ' on obtient les relations suivantes montrées en ANNEXE B:

$$A' = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} \text{Re} \left\{ Y_n e^{-j\theta_n} \right\} L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\}}{L\{Y_1^N | \Lambda\}} \quad (14)$$

$$N_0' = \frac{\frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} |Y_n - A' e^{j\theta_n}|^2 L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\}}{L\{Y_1^N | \Lambda\}} \quad (15)$$

L'estimation du paramètre caractérisant la variance des variations de la phase de la porteuse s'exprime par:

$$\sigma_\theta'^2 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} \sum_{\theta_{n-1}} \frac{(\theta_n - \theta_{n-1} - \Delta\theta')^2 L\{Y_1^N, \theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda\}}{\sum_{\theta_{n-1}, \theta_n} L\{Y_1^N, \theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda\}}}{\quad} \quad (16)$$

et la dérive de fréquence $\Delta\theta'$ s'exprime par:

$$\Delta\theta' = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} \sum_{\theta_{n-1}} \frac{(\theta_n - \theta_{n-1}) L\{Y_1^N, \theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda\}}{\sum_{\theta_{n-1}, \theta_n} L\{Y_1^N, \theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda\}}}{\quad} \quad (17)$$

Le dénominateur est commun à l'ensemble des quatre expressions précédentes.

Les relations (14) à (17) permettent de déterminer un vecteur de paramètres Λ' tel que $Q\{\Lambda, \Lambda'\} > Q\{\Lambda, \Lambda\}$ donc que

$$L\{Y_1^N | \Lambda'\} > L\{Y_1^N | \Lambda\}$$

Les simulations effectuées, pour vérifier la validité de l'algorithme proposé, ont montré la robustesse de la méthode. Pour un vecteur initial

$$\Lambda_0 := (A_0=0.5, N_{00}=0.1, \sigma_{\theta 0}^2=2.)$$

un vecteur réel

$$\Lambda := (A=1.414, N_0=1., \sigma_\theta^2=1.)$$

Figure 2, 2 et 3

ESTIMATION RECURSIVE:

Nous utilisons le filtre non-linéaire défini par la relation (A-5). A partir de la relation (B-5) et des relations équivalentes sur les autres composantes du vecteur de paramètres, on peut inférer un algorithme récursif d'estimation des paramètres. Pour l'estimation de l'amplitude, l'équivalent récursif de la relation (B-5) est:

$$A_n = A_{n-1} - \frac{1}{n} \left[A_{n-1} - \sum_{\theta_n} \text{Re} \left\{ A_n Y_n e^{-j\theta_n} \right\} \alpha\{\theta_n | \Lambda_{n-1}\} \right]$$

$\alpha(\theta_n | \Lambda_{n-1})$ est la probabilité conditionnelle de θ_n étant donné la suite d'observations Y_1^n qui s'exprime récursivement par la relation (A-5).

La relation récursive d'estimation de la variance du bruit s'exprime par:

$$N_n = N_{n-1} - \frac{1}{2n} \left[N_{n-1} - \sum_{\theta_n} |Y_n - A_{n-1} e^{j\theta_n}|^2 \alpha\{\theta_n | \Lambda_{n-1}\} \right]$$

L'estimation de la variance de la gigue de la phase est définie par:

$$\sigma_{\theta n}^2 = \sigma_{\theta n-1}^2 - \frac{1}{n} \left[\sigma_{\theta n-1}^2 - \sum_{\theta_{n-1}, \theta_n} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 \alpha\{\theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda_{n-1}\} \right]$$

La connaissance de la probabilité conditionnelle $\alpha\{\theta_{n-1}, \theta_n | \Lambda_{n-1}\}$ permet d'estimer à chaque instant n la phase $\hat{\theta}_n$ qui maximise cette probabilité et de détecter la suite des symboles transmis [2].

Pour poursuivre les paramètres d'un canal lentement variable, l'algorithme récursif proposé peut être transformé en type "gradient" si l'on remplace le coefficient d'adaptation variable $\frac{1}{n}$ par un pas fixe μ . Nous avons testé cet algorithme avec les mêmes vecteurs de paramètres que l'algorithme itératif et avec un pas d'adaptation $\mu=0.05$. Nous avons observé une bonne estimation

pour un nombre voisin de 60 échantillons (fig 4). Nous avons pu remarquer que l'on n'observait pas de phénomène de convergence (à court terme) pour une valeur initiale très petite de la variance de la gigue de phase $\sigma_{\theta,0}^2 = 0.01$. Ce problème nous semble lié à la présence de sauts de cycles.

La complexité des algorithmes proposés s'exprime en nombres d'opérations pour L échantillons observés. L'algorithme itératif nécessite $2M^2L$ opérations et $2ML$ mots mémoires par itération. L'algorithme récursif nécessite M^2L opérations et M mots mémoires.

CONCLUSION:

L'estimation des paramètres d'une chaîne de transmission est effectuée par des algorithmes d'identification de chaînes de Markov cachées itératifs ou récursifs. Ces algorithmes permettent, simultanément, d'identifier les paramètres du canal de transmission et de détecter les symboles d'information transmis. La complexité des algorithmes proposés est compensée par leurs efficacités en ce sens qu'ils permettent une identification dans un environnement très bruité ($S/B=0dB...$). Les propriétés statistiques de la gigue de phase sont estimées et utilisées pour la détection des données.

ANNEXE 1: RELATIONS DE FILTRAGE DIRECTES ET RETROGRADES:

Pour un instant n quelconque, on a les relations suivantes:

$$L\{Y_1^N|\Lambda\} = \sum_{\theta_n} P\{Y_1^N, \theta_n|\Lambda\} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

et

$$L\{Y_1^n, Y_{n+1}^N, \theta_n|\Lambda\} = L\{Y_1^n, \theta_n|\Lambda\} \cdot L\{Y_{n+1}^N | Y_1^n, \theta_n, \Lambda\} \quad (A-1)$$

Par suite des propriétés Markoviennes de la suite θ_n , la loi de Y_{n+1}^N sachant θ_n est indépendante de Y_1^n , d'où une décomposition intéressante de la fonction de vraisemblance conjointe de (Y_1^N, θ_n) :

$$L\{Y_1^N, \theta_n|\Lambda\} = \alpha\{\theta_n|\Lambda\} \cdot \beta\{\theta_n|\Lambda\} \quad (A-2)$$

Les deux fonctions de vraisemblances directes et rétrogrades s'expriment par:

$$\alpha\{\theta_n|\Lambda\} = P\{Y_1^n, \theta_n|\Lambda\} \quad (A-3)$$

$$\beta\{\theta_n|\Lambda\} = P\{Y_{n+1}^N | \theta_n, \Lambda\} \quad (A-4)$$

Pour calculer la vraisemblance de toutes les variables θ_n pour $n=1, \dots, N$, il faut calculer les deux fonctions forward et backward de façon récursive en remarquant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha\{\theta_n|\Lambda\} &= \sum_{\theta_{n-1}} P\{Y_1^n, \theta_n, \theta_{n-1}|\Lambda\} \\ &= \sum_{\theta_{n-1}} P\{Y_1^{n-1}, \theta_{n-1}|\Lambda\} P\{Y_n, \theta_n | Y_1^{n-1}, \theta_{n-1}, \Lambda\} \\ &= \sum_{\theta_{n-1}} P\{Y_1^{n-1}, \theta_{n-1}|\Lambda\} P\{Y_n, \theta_n | \theta_{n-1}, \Lambda\} \end{aligned}$$

et si b_n et θ_n sont indépendants on obtient:

$$\alpha\{\theta_n|\Lambda\} = \sum_{\theta_{n-1}} P\{Y_1^{n-1}, \theta_{n-1}|\Lambda\} P\{Y_n | \theta_n, \Lambda\} P\{\theta_n | \theta_{n-1}, \Lambda\} \quad (A-5)$$

La relation (A-5) est utilisée dans les algorithmes de filtrage non-linéaires [2].

La relation de récurrence backward s'établit de la même façon en notant que:

$$\begin{aligned} \beta\{\theta_n|\Lambda\} &= P\{Y_{n+1}^N | \theta_n, \Lambda\} \\ &= \sum_{\theta_{n+1}} P\{Y_{n+1}, Y_{n+2}^N, \theta_{n+1} | \theta_n, \Lambda\} \\ &= \sum_{\theta_{n+1}} P\{Y_{n+2}^N | \theta_n, \theta_{n+1}, \Lambda\} \cdot P\{Y_{n+1}, \theta_{n+1} | \theta_n, \Lambda\} \end{aligned}$$

et si b_n et θ_n sont indépendants:

$$\beta\{\theta_n|\Lambda\} = \sum_{\theta_{n+1}} P\{Y_{n+2}^N | \theta_{n+1}, \Lambda\} \cdot P\{Y_{n+1} | \theta_{n+1}, \Lambda\} P\{\theta_{n+1} | \theta_n, \Lambda\}$$

Soit la relation récursive sur le filtre retrograde:

$$\beta\{\theta_n|\Lambda\} = \sum_{\theta_{n+1}} \beta\{\theta_{n+1}|\Lambda\} P\{Y_{n+1} | \theta_{n+1}, \Lambda\} P\{\theta_{n+1} | \theta_n, \Lambda\} \quad (A-6)$$

La valeur initiale à l'instant N peut être choisie de façon arbitraire, par exemple $\beta\{\theta_N|\Lambda\} = 1$

A partir de la relation (A-2), on peut après normalisation exprimer la probabilité à posteriori de la variable θ_n par :

$$P\{\theta_n | Y_1^N, \Lambda\} = \frac{\alpha\{\theta_n|\Lambda\} \cdot \beta\{\theta_n|\Lambda\}}{L\{Y_1^N|\Lambda\}} \quad (A-7)$$

Les relations (A-5) et (A-6) forment les relations de base du lissage linéaire. Le filtre non-linéaire comprend seulement la relation FORWARD (A-5).

ANNEXE 2: RELATIONS DE REESTIMATION DES PARAMETRES:

L'algorithme de réestimation est obtenu en dérivant la relation (11) par rapport au vecteur de paramètres Λ' .

$$\frac{\partial \log_e \{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\}\}}{\partial \Lambda'} = \sum_{n=1}^N \frac{\text{Re} \{e^{-j\theta} [Y_n - A' e^{j\theta_n}]\}}{2N'\sigma_0} \quad (B-1)$$

$$\frac{\partial \log_e \{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\}\}}{\partial N'\sigma_0} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{-1}{N'\sigma_0} + \frac{|Y_n - A' e^{j\theta_n}|^2}{2N'\sigma_0^2} \right] \quad (B-2)$$

$$\frac{\partial \log_e \{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\}\}}{\partial \sigma_0^2} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{-1}{2\sigma_0^2} + \frac{[\theta_n - \theta_{n-1} - \Delta'\theta]^2}{2\sigma_0^4} \right] \quad (B-3)$$

$$\frac{\partial \log_e \{L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\}\}}{\partial \Delta'\theta} = \sum_{n=1}^N \frac{\Delta'\theta [\theta_n - \theta_{n-1} - \Delta'\theta]}{\sigma_0^2} \quad (B-4)$$

En reportant la relation (B-1) dans (9), on obtient:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n'} \left[L\{Y_1^N, \theta_1^N | \Lambda'\} \frac{\text{Re} \{e^{-j\theta} [Y_n - A' e^{j\theta_n}]\}}{2N'\sigma_0} \right]$$

et en développant l'expression précédente:

$$A' = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} \text{Re} \{Y_n e^{-j\theta_n}\} L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\}}{L\{Y_1^N | \Lambda\}} \quad (B-5)$$

en notant que la loi de θ_n conditionnellement à l'observation Y_1^N peut s'exprimer à partir de la fonction de vraisemblance par:

$$P\{\theta_n | Y_1^N, \Lambda\} = \frac{L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\}}{\sum_{\theta_n} L\{Y_1^N, \theta_n | \Lambda\}}$$

A' correspond à une estimation empirique de la moyenne de l'observation Y_n qui peut s'écrire:

$$A' = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{\theta_n} \text{Re} \{Y_n e^{-j\theta_n}\} P\{\theta_n | Y_1^N, \Lambda\}$$

Des calculs équivalents permettent d'exprimer les estimations des autres paramètres. Les relations obtenues sont indiquées dans le corps de cet article.



REFERENCES:

- [1] O.MACCHI and L.L.SHARF: "A Dynamic Programming Algorithm For Phase Estimation And Data Decoding On Random Phase Channels", IEEE Transactions on Information Theory, VOL.T-27, pp581-595, September 1981.
- [2] H.KOREZLIOGLU et R.VALLET: "Filtrage non-linéaire appliqué aux communications numériques dans un canal à phase aléatoire", 10-ième Colloque GRETSI, NICE MAI 1985.
- [3] L.E.BAUM. "An Inequality And Associated Maximisation Technic in Statistical Estimation for Probability Functions of Markov Process". Inequality Vol III p1-8, 1972.
- [4] L.A.LIPORACE. "Maximum Likelihood Estimation for Multivariate Observations of Markov Sources". IEEE Transactions On Information Theory, Vol-IT-28, No-5, September 1982.
- [5] L.R.RABINER, S.E.LEVINSON and M.SONDHI. "On The Application of Vector Quantization and Hidden Markov Models to Speaker Independent Isolated Words Recognition". Bell System Technical Journal, Vol-62, p1075-1105, April 1983.
- [6] L.E.BAUM and J.A.EAGON. "An Inequality with Application to Statistical prediction for Fonction of Markov Processes and to a Model for Ecology". Bull. Amer.Math.Soc. &3, p360-363 1967.
- [7] H.KOREZLIOGLU et G.MAZZIOTTO. "Estimation réursive en transmission numérique". 9-ième Colloque GRETSI, Nice Mai 1983.

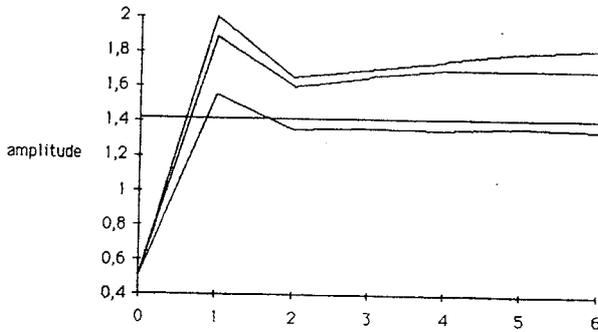


Figure 1: Amplitude A, Algorithme itératif.

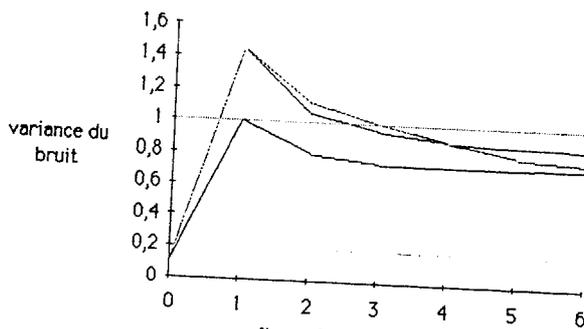


figure 2: variance du bruit, algorithme itératif.

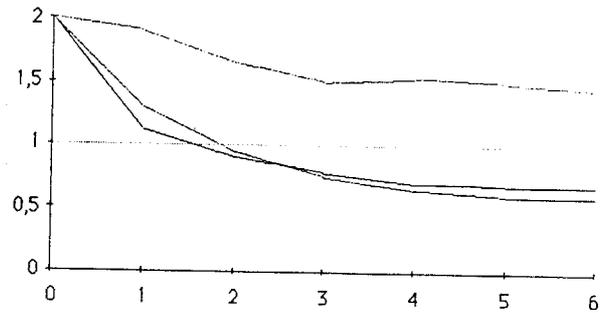


Figure 3: Variance de la gigue de phase.

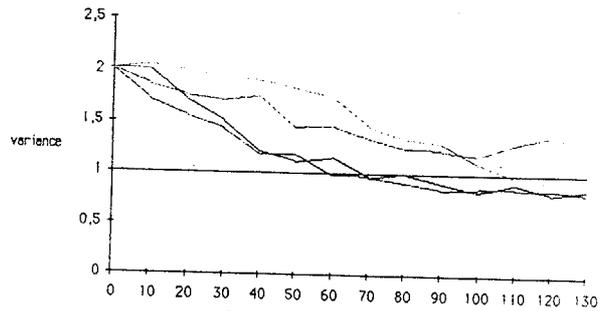


Figure 4: Variance de la gigue de la phase, algorithme réursive.