

SYSTEMES DE MODULATION ET DEMODULATION MULTIDIMENSIONNELLE

P.A. LAURENT

THOMSON-CSF DTC Laboratoire Traitement du Signal

B.P 156, 92231 Gennevilliers CEDEX

Le présent exposé est consacré à la conception et à l'étude de systèmes de transmission où les symboles utilisés sont pris dans un espace à plus de deux dimensions (typiquement, 4 ou 8 dimensions). On montre en effet qu'il est possible de choisir, dans ces espaces, des constellations comportant un nombre de points égal à une puissance de deux, et disposés suivant l'arrangement le plus compact possible; ceci permet d'optimiser les performances en présence de bruit blanc Gaussien.

On envisage dans un premier temps une démodulation de type cohérent, puis on adapte le système pour le cas où le signal doit être à enveloppe constante et où seule une démodulation non cohérente peut être utilisée.

Enfin, on montre que l'emploi de codes correcteurs puissants (codes de Reed-Solomon) permet d'atteindre des performances comparables à celles de modulations binaires classiques, avec toutefois un rapport débit utile/bande environ quatre fois plus élevé.

I INTRODUCTION

Grâce aux progrès constants de la technologie, on assiste, à l'heure actuelle, à l'apparition de nouveaux concepts en matière de transmission de données.

Une approche classique consiste à concevoir un système de transmission de type binaire (transmettant donc des suites de 0 et de 1), associé à des dispositions destinées à se prémunir contre les inévitables erreurs de transmission (contrôles de parité divers, codes correcteurs genre BCH, Golay, ..., ou codes convolutifs).

Un pas décisif a été franchi par G. Ungerboeck [1] qui a montré qu'il était possible de réunir en un seul concept plus général la modulation d'une part et le codage d'autre part, ce qui permet d'améliorer la fiabilité des liaisons.

Cependant, si l'on se base sur les travaux de SHANNON, on s'aperçoit que la capacité d'un canal ne peut être atteinte que par l'utilisation de signaux pris dans un espace à nombre illimité de dimensions, la décision sur le signal reçu étant globale et non pas fragmentée en une multitude de décisions élémentaires. Malheureusement, la démonstration de cette propriété fondamentale ne conduit ni à la construction de signaux pouvant être utilisés dans les systèmes réels, ni à des méthodes de décision autres que la recherche du maximum de vraisemblance, par recherche exhaustive.

Le présent exposé a pour but de montrer que ces principes peuvent être mis en pratique de façon simple et performante, dans le cas de canaux de transmission à bande passante limitée. On considère en effet que le signal émis peut être représenté par un point dans un espace à N dimensions, l'ensemble des points possibles étant répartis à l'intérieur d'une hyper-sphère de rayon donné, et suivant la disposition la plus dense possible, analogue au pavage hexagonal du plan ou au réseau cubique à faces centrées dans l'espace à 3 dimensions [2].

This paper describes conception and performance evaluation of multidimensional data transmission systems. The signal space has typically four or eight dimensions. It is shown that it is possible to find packings containing a number of points which is a power of two, these points being very close to each other in a manner similar to the face-centered cubic lattice in three dimensions. This allows the best possible performance level in the presence of white Gaussian noise.

This paper first describes first systems with coherent demodulation. In a second part, the transmission scheme is adapted to the case of constant amplitude signalling and non coherent demodulation.

Finally, it is shown that the use of powerful error correcting codes (Reed-Solomon codes) is very efficient and allows a level of performances comparable to the classical binary systems with a ratio information rate/bandwidth almost four times higher.

On peut alors montrer [3] que cet ensemble de points présente des propriétés tout à fait analogues à celles de codes correcteurs, où la distance de HAMMING serait remplacée par une distance de nature purement géométrique, ce qui permet d'intégrer modulation et codage.

Enfin, le problème de la décision quant au symbole émis (ou 'démodulation') peut être ramené à une suite d'opérations simples tout en restant optimum, c'est-à-dire en atteignant les performances théoriques [4].

On s'intéresse ici à des ensembles comportant un nombre de points qui est exactement une puissance de deux, pour être parfaitement adapté aux types de données à transmettre: typiquement, on cherchera à transmettre en une seule fois des octets, voire des mots de 16 bits.

II CONSTRUCTION DE L'ESPACE DES SIGNAUX

2.1 Méthode générale

Une méthode de construction de l'espace des signaux possibles est basée sur la génération de points dans l'espace à N dimensions en partant d'un ensemble central de points définis par un code correcteur binaire à mots de N bits.

Soit alors un mot de code $C = \{c(1), c(2), \dots, c(N)\}$ où $c(i)$ vaut 0 ou 1. En transformant $c(i)$ en $2 \cdot c(i) - 1$, on obtient $s(i)$, i-ème coordonnée d'un point S dans l'espace à N dimensions.

Par exemple, pour $N=3$, le code BCH(3,2) (parité simple) comporte les mots de code $\{0,0,0\}$, $\{0,1,1\}$, $\{1,0,1\}$, et $\{1,1,0\}$ qui sont transformés en $\{-1,-1,-1\}$, $\{-1,+1,+1\}$, $\{+1,-1,+1\}$ et $\{+1,+1,-1\}$, coordonnées d'un tétraèdre dans l'espace à 3 dimensions, motif de base du système cubique faces centrées (CFC).

La génération des autres points de l'ensemble se fait par translation de ces points de départ au moyen d'un vecteur de la forme $4 \cdot Z$, où $Z = \{z(1), z(2), \dots, z(N)\}$ avec $z(i)$ entier



relatif. Dans l'espace à 3 dimensions, on génère ainsi le réseau CFC dans son ensemble (figure 1).

Un point important à déterminer, puisqu'il conditionnera l'efficacité du système, est le nombre de points situés à une distance R de l'origine, et qui correspondent donc à des signaux d'énergie $E=R^2$. Si l'on met les coordonnées $s(i)$ d'un point S sous la forme $s(i) = c(i).(1+4.x(i))$, cette énergie vaut

$$E = \sum_{i=1}^N (1+4.x(i))^2 = N + 8.K.(K \text{ entier})$$

Le nombre de signaux de même énergie est donc égal au produit du nombre de mots du code de départ par le nombre de combinaisons de N entiers de la forme ...-11, -7, -3, +1, +5, +9, ... dont la somme des carrés est égale à E.

2.2 Espace à 4 dimensions

On cherche à transmettre en une seule fois un octet d'information: les points représentatifs du signal doivent donc être au nombre de 256.

On prend alors comme code de départ le code de Reed-Müller (4,3) qui génère dans l'espace à 4 dimensions 4 vecteurs orthogonaux ainsi que leurs opposés (8 mots/vecteurs/points au total).

L'examen de toutes les possibilités montre que, pour $E \leq 36$, le nombre de points est exactement égal à 256. Ces points sont répartis suivant un motif appelé D4, réseau équivalent dans l'espace à 4 dimensions au réseau CFC dans 3 dimensions.

Le tableau 1 donne la liste des valeurs des $x(i)$ correspondant aux différentes possibilités, rangées dans l'ordre des valeurs absolues décroissantes. Le nombre total de possibilités de permutations des $x(i)$ est égal à 32, ce qui donne bien les 256 points recherchés.

2.3 Espace à 8 dimensions

Cette fois-ci, on cherche à transmettre à chaque symbole 16 bits d'information.

Le code binaire de départ choisi est le code Reed-Müller (8,4) qui génère 8 vecteurs orthogonaux et leurs opposés, soit 16 en tout.

L'ensemble de points générés suivant le principe exposé en 2.1 est connu sous le nom de réseau de Gosset, encore une fois le plus dense possible, mais ici dans l'espace à 8 dimensions.

Une propriété remarquable de ce réseau est que, lorsque l'énergie E est égale à une puissance de 2, le nombre de points ayant cette énergie est aussi une puissance de 2. Le tableau 2 est l'équivalent du tableau 1, mais en se limitant aux énergies égales à une puissance de 2.

Ici, on prendra $E=128$, ce qui donne $16.4096=65536$ points, correspondant à 16 bits par symbole.

III PROCESSUS DE DECISION

A la réception, il faut trouver, parmi tous les mots possibles de 8 ou 16 bits celui qui correspond au signal le plus vraisemblablement émis.

Pour ce faire, on tient compte de la méthode de construction de l'ensemble de points, ce qui permet de décrire l'algorithme de la façon suivante (voir aussi [4]):

Soient $R=(r(1), r(2), \dots, r(N))$ les composantes du signal reçu.

A- On commence par soustraire à R un vecteur de la forme 4.2 jusqu'à ce que tous les $r(i)$ soient tels que $-1 < r(i) < 3$.

B- Pour tous les $r(i)$ tels que $1 < r(i) < 3$, remplacer $r(i)$ par $2-r(i)$.

C- Chercher le point de départ ('mot de code') C_0 le plus proche du point ainsi obtenu.

D- Pour tous les indices i ou $r(i)$ a été modifié à l'étape B, changer $c(i)$ en $2-c(i)$: C_0 devient C_m .

E- Le signal S le plus proche de R est alors obtenu en additionnant C_m et 4.2, Z étant le vecteur calculé à l'étape A.

Dans la présente application, compte tenu du nombre limité de signaux distincts, il est possible de détecter des décisions erronées simplement, en examinant la valeur de l'énergie du signal S, résultat de la décision: s'il a une valeur hors limites, on détecte une erreur, ce qui permet d'effacer le symbole correspondant.

Dans le cas de la transmission de mots de 8 bits, on créera un effacement lorsque l'énergie de S sera supérieure à 36; pour des mots de 16 bits, ceci sera fait pour une énergie finale différente de 128.

IV SYSTEME DE TRANSMISSION COHERENT

4.1 Système de modulation (exemple)

On suppose que l'on désire transmettre du 9600 bits/s dans la bande téléphonique.

Ceci peut se faire en modulant à 1200 bauds et sur deux voies en quadrature deux sous-porteuses BF: les composantes $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ et $s(4)$ définissant l'amplitude, à l'instant d'échantillonnage, des signaux présents sur les voies en phase (I) et en quadrature (Q) de la première sous-porteuse, puis les voies I et Q de la deuxième. Les valeurs $s(i)$ sont les coordonnées de l'un des 256 points de l'ensemble à 4 dimensions décrit en 2.2.

On transmet alors 8 bits par symbole, ce qui correspond effectivement à un débit utile de 9600 bits/s.

On peut aussi choisir une modulation de quatre sous-porteuses au lieu de 2, modulées suivant le même principe que précédemment à une vitesse de 600 bauds, et en choisissant le point S de coordonnées $s(1), \dots, s(8)$ dans l'ensemble à 8 dimensions décrit en 2.3.

On transmet cette fois-ci 16 bits par symbole, ce qui correspond encore à 9600 bits/s.

4.2 Système de démodulation

La démodulation se fait après correction des imperfections de la transmission (égalisation) sur chacune de 2 ou 4 sous-porteuses, et de façon cohérente sur chacune d'entre elles.

Les signaux $r(i)$ mentionnés en 3.1 sont les amplitudes des 2 ou 4 voies I et Q à l'instant optimum d'échantillonnage, et sont affectés de bruit blanc gaussien.

4.3 Performances

On a tracé figure 2 les performances des deux systèmes (4 et 8 dimensions, avec, pour comparaison, celles d'un système purement binaire qui, dans la bande de fréquences allouées, ne peut transmettre qu'environ 2400 bits/s, soit un débit quatre fois moindre, et celle d'un système QASK (Quadrature Amplitude Shift Keying) à 9600 bits/s.

(Ces performances ont été obtenues par simulation).

Les courbes donnent la probabilité d'erreur maximale par BIT en fonction de E_b/N_0 , rapport signal/bruit énergétique par bit, seule quantité permettant de juger de l'efficacité d'un système de transmission.

Elles donnent aussi -et ceci est fondamental- la probabilité d'effacement, les effacements correspondant aux cas où l'on s'est aper-

qu que la décision était nécessairement erronée.

Même si l'on assimile les effacements à des erreurs, la modulation à 65536 états (1) a des performances améliorées de 2 dB par rapport au QASK, et celle à 256 états permet de gagner environ 3 dB supplémentaires.

La perte par rapport au PSK binaire traditionnel est de l'ordre de 5 dB au plus, ce qui est inférieur au rapport des débits utiles (9600/2400 soit 6 dB).

V SYSTEME DE TRANSMISSION NON COHERENT

5.1 Procédé de transmission (exemple)

On suppose ici que l'on doit transmettre sur voie radio, avec le meilleur rendement possible à l'émission. Ceci suppose donc que la transmission se fasse à enveloppe constante et que l'on utilise une modulation angulaire.

On a choisi ici une modulation de phase différentielle de rythme $1/T$ bauds. La modulation est faite de telle sorte qu'aux instants $4nT+1$, $4nT+2$, $4nT+3$ et $4nT+4$, la différence de phase mesurée par le récepteur, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(t-T)$ soit proportionnelle à $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ et $s(4)$, respectivement, les valeurs des $s(i)$ correspondant à l'un des 256 points dénombrés dans le paragraphe 2.2.

La vitesse de transmission est alors de 8 bits par période de $4T$, soit équivalente à celle d'un FSK 4 états de même largeur de bande.

Pour obtenir (par simulation) des résultats réalistes, on a mis en oeuvre une mise en forme du signal à l'émission avec une pondération de $\Delta\varphi(t)$ en cosinus surélevé, qui permet d'avoir un spectre étroit et l'absence (théorique) d'interférence entre échantillons successifs. L'excursion de phase est limitée de telle sorte que $\Delta\varphi(t)$ ne dépasse jamais 180 degrés en valeur absolue.

De même, côté réception, on a supposé la présence d'un filtre de Bessel d'ordre 8, et de bande égale à $\pm 1/T$, suivi d'un limiteur dur (un filtre de type Butterworth peut aussi être utilisé, mais il nécessite la présence d'un égaliseur pour compenser les distorsions de phase qu'il introduit).

5.2 Performances

La figure 3 permet de comparer les performances du système décrit ci-dessus à la version cohérente (voir 4.3).

La dégradation observée est de l'ordre de 4 dB, en ce qui concerne la probabilité d'erreur, et d'environ 2.5 dB pour la probabilité d'effacement: en d'autres termes, le système cohérent est mieux apte à détecter de fausses décisions que son homologue non cohérent.

VI UTILISATION DE CODES CORRECTEURS

Les procédés de transmission utilisés ici véhiculent non pas des bits d'information, mais plutôt des symboles de 8 ou 16 bits. D'autre part, on a vu dans les paragraphes précédents que le procédé de décision était apte à détecter des décisions erronées donc à générer des effacements.

Pour ces deux raisons, il est logique d'envisager une amélioration des performances par l'emploi de codes correcteurs d'erreurs et d'effacements travaillant sur des symboles de 1 ou 2 octets, tels les codes Reed-Solomon. En effet, à taux de redondance donné, ils ont un pouvoir correcteur bien supérieur à celui des codes BCH et autres, seuls utilisables pour une transmission de symboles binaires.

On a donc évalué les performances de la transmission de mots de 8 bits (système à 4 dimensions, versions cohérente et non cohérente), associée à l'utilisation d'un code Reed-Solomon (255,200,25) capable de corriger 25 erreurs sans effacement, 24 erreurs et 2 effacements, ..., 0 erreur et 50 effacements.

Malgré le faible taux de redondance nécessaire (20%), le gain en performances est considérable, comme on peut le voir sur la figure 3, en tiretés: pour une valeur de E_b/N_0 supérieure à 9 dB en cohérent (12 dB en non cohérent), la transmission se fait pratiquement sans erreur.

Pour schématiser, dans le cas du système cohérent, on peut transmettre sur une voie téléphonique indifféremment 2400 bits par seconde ou 9600 bits par seconde sans consommer davantage d'énergie par bit transmis.

Enfin, il faut signaler que l'emploi de codes en blocs n'est pas obligatoire. En effet, il faut savoir que la constellation de 256 points décrite plus haut peut être partitionnée en quatre sous-constellations imbriquées comportant 64 points chacune. On peut alors envisager d'utiliser les principes de combinaison modulation/codage exposés dans [1] pour améliorer les performances de la liaison.

VII CONCLUSION

Les modulations multi-dimensionnelles semblent représenter une alternative digne d'intérêt dans la gamme des possibilités de combinaisons de modulation et de codage nécessaires à la fiabilisation de la transmission d'informations de type numérique.

Comme on a pu le constater, leur mise en oeuvre ne nécessite que des puissances de calcul à la portée des microprocesseurs de traitement de signal actuellement disponibles, tout au moins pour les débits usuels.

En conclusion, bien que reposant sur des principes géométriques très simples, elles permettent une transmission à faible taux d'erreurs sur des canaux à bande étroite, et avec un excellent rendement.

- REFERENCES

- [1] G. UNGERBOECK, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", IEEE Trans. on Information Theory, VOL IT-28, N° 1, January 1982, pp. 55-67
- [2] N.J.A SLOANE, "The Packing of Spheres", Scientific American, January 1984, pp. 116-146
- [3] N.J.A SLOANE & J. LEECH, "Spheres Packing and Error Correction Codes", Can. Jour. of Math., Vol. XXIII, N° 4, 1971, pp. 718-745
- [4] J.H. CONWAY & N.J.A.SLOANE, "Soft Decoding Techniques for Codes and Lattices, including the Golay Code and the Leech Lattice", IEEE Trans. on Information Theory, VOL IT-32, N° 1, January 1986, pp. 41-49



x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	Nombre de Permutations des x(i)	E
1	1	1	1	1	4
-3	1	1	1	4	12
-3	-3	1	1	6	20
5	1	1	1	4	28
-3	-3	-3	1	4	28
5	-3	1	1	12	36
-3	-3	-3	-3	1	36

TABLEAU 1 x(i) pour l'espace à 4 dimensions

Valeurs des x(i)								Nombre de Permutations des x(i)		E
								Partiel	Total	
								V	V	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
-3	1	1	1	1	1	1	1	8	8	16
-3	-3	-3	1	1	1	1	1	56	64	32
5	-1	1	1	1	1	1	1	8		
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	1	8		64
5	-3	-3	-3	1	1	1	1	280		
5	5	-3	1	1	1	1	1	168		
-7	-3	1	1	1	1	1	1	56	512	
5	5	5	5	-3	-3	-3	1	280		128
5	5	5	5	5	5	1	1	56		
-7	5	-3	-3	-3	-3	-3	-3	56		
-7	5	5	-3	-3	-3	1	1	1680		
-7	5	5	5	1	1	1	1	280		
-7	-7	-3	-3	1	1	1	1	560		
-7	-7	5	1	1	1	1	1	168		
9	-3	-3	-3	-3	1	1	1	168		
9	5	-3	-3	1	1	1	1	840		
-11	1	1	1	1	1	1	1	8	4896	

TABLEAU 2 x(i) pour l'espace à 8 dimensions

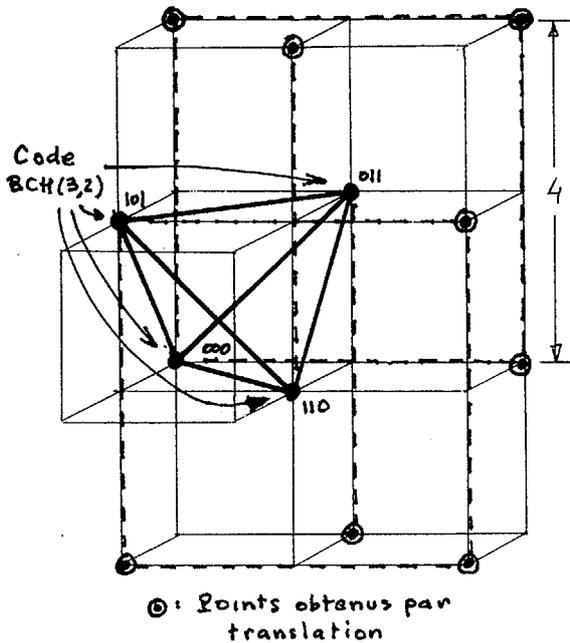


Figure 1. Réseau CFC

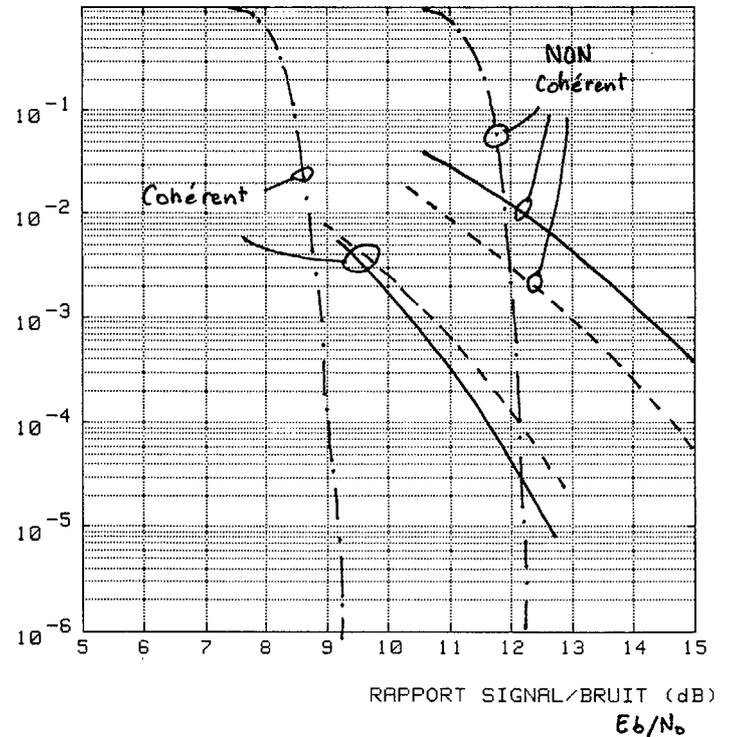
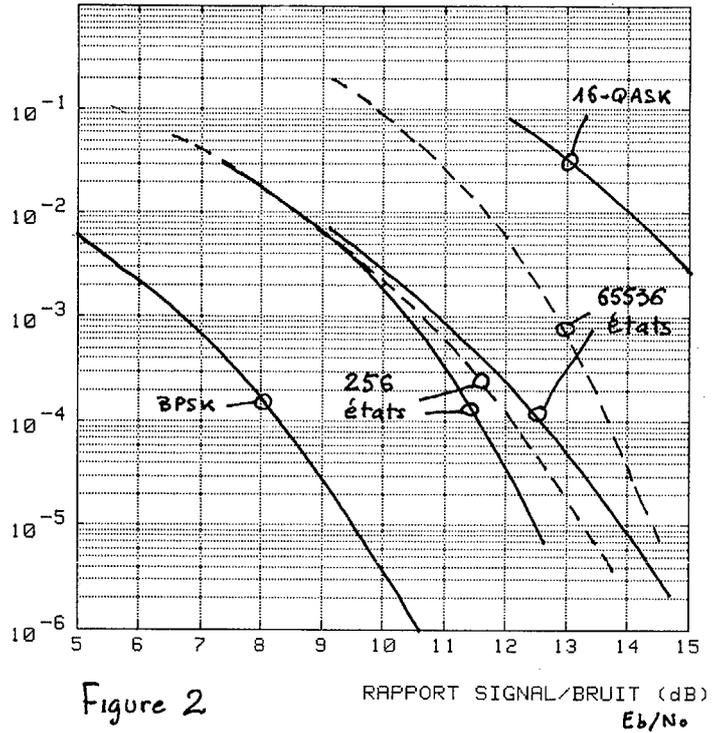


Figure 3