

ESTIMATION DES PARAMETRES DE SINUSOIDES EXPONENTIELLEMENT AMORTIES ET BRUTEES PAR PREDICTION FUTURE ET PASSEE
SEPARATION DES PARAMETRES LIES AU BRUIT

B. LUMEAU*, R. LEVERNIER* et H. CLERGEOT**

*L2S C.N.R.S.-E.S.E., Plateau du Moulon, 91190 Gif sur Yvette

**LESIR E.N.S.T., 61 Av. du Pr. Wilson, 94230 Cachan

RESUME - Nous présentons dans ce travail une méthode d'estimation des paramètres de sinusoides exponentiellement amorties et bruitées (le bruit étant supposé blanc) par minimisation sous contraintes de l'erreur de prédiction future et passée. Les contraintes sont déterminées de façon à, d'une part imposer une forme symétrique au vecteur de prédiction et, d'autre part forcer les racines associées au prédicteur et liées au bruit à se trouver sur le cercle unité. Ceci permet de garder le même nombre de paramètres indépendants que pour la méthode associée à la minimisation de l'erreur de prédiction future (ou passée) et de discriminer aisément les racines signal et les racines bruit.

SUMMARY - We present in this work a method for estimating the parameters of exponentially damped sinusoids in noise (the noise being assumed white) by the minimization under constraints of the forward-backward prediction. The constraints are determined in order, on the one hand to impose a symmetric form at the prediction vector, and on the other to force the roots, associated to the predictor and linked to the noise, to be on the unit circle. This allows to keep the same independent number of parameters for the method associated with the minimization of the forward (or backward) prediction error and to easily discriminate the signal roots and the noise roots.

I. INTRODUCTION

Les principales méthodes pratiques permettant l'estimation des paramètres de sinusoides exponentiellement amorties (signaux sources) dans un bruit blanc sont basées sur la prédiction linéaire [1,2] et la recherche des zéros associés au prédicteur. Kumaresan et Tufts [3] ont montré qu'en utilisant un modèle surdimensionné on pouvait améliorer l'estimation et qu'en utilisant une contrainte de norme minimale pour le prédicteur on forçait les racines bruits vers l'intérieur du cercle unité : d'où l'idée d'utiliser la prédiction passée (ou rétrograde) pour mieux les séparer des racines signaux.

D'un autre côté nous savons que, dans le cas de sinusoides non amorties, la prédiction future-passée (ou progressive-rétrograde) permet d'augmenter les performances du prédicteur [4]. L'inconvénient d'une telle approche, dans le cas d'exponentielles amorties, va être de doubler l'espace source : d'où le fait qu'elle n'a pas été utilisée jusqu'ici. En fait, en exploitant correctement les propriétés de la matrice progressive-rétrograde, on peut imposer entre les signaux sources et leurs images une relation qui permet d'éviter une augmentation du nombre de paramètres indépendants.

Ainsi, dans la première partie nous envisageons les propriétés de la matrice de covariance progressive-rétrograde (ou directe-inverse) associée aux données; nous montrons que la dimension du "sous-espace source" sous tendu par cette matrice centrohermitienne est le double de celui de la matrice progressive (ou rétrograde). Dans la deuxième partie nous montrons que pour toute matrice centrohermitienne, y compris en présence de valeurs propres d'ordre de multiplicité supérieur à un, il est toujours possible de trouver une base de vecteurs propres possédant la propriété de symétrie hermitienne. Dès lors, nous explicitons le type de contrainte tel que le polynôme en z associé au prédicteur soit toujours autoréproque. Dans une troisième partie nous montrons que sous la contrainte de norme minimale les racines en z liées au bruit sont sur le cercle unité.

discret peut-être caractérisé par la somme de fréquences pures amorties exponentiellement, dont nous devons estimer les paramètres, et d'un bruit blanc complexe de variance $\sigma^2 [1]$:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p \eta_i z_i^n + \omega(n) = y(n) + \omega(n), \quad 1 \leq n \leq N \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} \eta_i = \zeta_i \exp(j \theta_i), \\ z_i = \exp(\delta_i + 2\pi j \nu_i), \end{cases} \quad (2)$$

où δ_i est le décrement logarithmique de la composante i (amortissement) et ν_i la fréquence de cette même composante.

Considérons M données non bruitées que nous qualifions de progressives (ou futures) au sens de la prédiction linéaire et que nous noterons sous forme vectorielle :

$$\underline{y}_f(n) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-M+1)]^T$$

ce qui, d'après (1), nous conduit à :

$$\underline{y}_f(n) = \sum_{i=1}^p \eta_i z_i^n \begin{bmatrix} 1 \\ z_i^{-1} \\ z_i^{-2} \\ \vdots \\ z_i^{-M+1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p g_i(n) \underline{s}_{f,i} \quad (3)$$

Nous constatons que pour tout n $\underline{y}_f(n)$ appartient au sous-espace E_p engendré par tous les vecteurs $\underline{s}_{f,i}$ ($1 \leq i \leq p$). Ce sous-espace constitue le "sous-espace source". Le vecteur $\underline{s}_{f,i}$ sera appelé vecteur source i. La dimension de ce sous-espace est égale à p si les z_i sont différents et si $M \geq p$.

L'espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs $\{\underline{y}_f(n), n=1 \text{ à } N-M+1\}$ est aussi l'espace propre de la matrice :

II. PROPRIETES DE LA MATRICE PROGRESSIVE-RETROGRADE

2.1. Modèle de base : matrice progressive

Nous supposons que le signal observé $x(n)$ en temps



$$\hat{\Gamma}_{f,y} = \frac{1}{N-2M} \sum_{n=M-1}^{N-M+1} \underline{y}_f(n) \underline{y}_f^+(n), \quad \begin{cases} N-M+1 \geq p, \\ M \geq p. \end{cases} \quad (4)$$

Si nous désignons par \underline{a} un vecteur propre associé à une valeur propre nulle de $\hat{\Gamma}_{f,y}$, ce vecteur propre est tel que :

$$\underline{s}_{f,i}^+ \underline{a} = \sum_{l=0}^{M-1} a(l) z_i^{-l} = 0 \quad \forall i \in \{1, p\} \quad (5)$$

où

$$z_i = \exp(\delta_i + 2\pi j v_i).$$

Par suite, z_i est zéro du polynôme.

$$a(z) = \sum_{l=0}^{M-1} a(l) z^{-l}. \quad (6)$$

Ainsi, si l'espace des observations est de rang p , il coïncide avec l'espace source et tout vecteur \underline{a} qui lui est orthogonal permet alors l'identification des "sources" par la recherche des zéros de $a(z)$. L'intérêt de la matrice de covariance $\hat{\Gamma}_{f,y}$ est qu'elle va permettre l'identification de l'espace source à partir des observations bruitées $\underline{x}_f(n)$:

$$\underline{x}_f(n) = [\underline{x}(n), \underline{x}(n-1), \dots, \underline{x}(n-M+1)]^T.$$

En effet, en posant :

$$\hat{\Gamma}_{f,x} = \frac{1}{N-2M} \sum_{n=M-1}^{N-M+1} \underline{x}_f(n) \underline{x}_f^+(n) \quad (7)$$

et du fait que $\underline{x}_f(n)$ est, d'après (1), la somme de $\underline{y}_f(n)$ et d'un bruit blanc $\underline{w}_f(n)$ décorrélié avec $\underline{y}_f(n)$ nous avons :

$$\Gamma_x = E[\hat{\Gamma}_{f,x}] = \Gamma_y + \sigma^2 I. \quad (8)$$

Par suite les vecteurs propres de Γ_x sont les mêmes que ceux de Γ_y les valeurs propres étant décalées de σ^2 .

2.2. Matrice progressive-rétrograde non bruitée : propriétés élémentaires

Le vecteur rétrograde $\underline{y}_r(n)$ associé au vecteur $\underline{y}_f(n)$ est obtenu en inversant et en conjuguant les composantes de ce dernier :

$$\underline{y}_r(n) = J \underline{y}_f^*(n), \quad (9)$$

où J est la matrice de commutation de Jordan.

De ce fait, la matrice de covariance rétrograde s'écrit:

$$\hat{\Gamma}_{r,y} = \frac{1}{N-2M} \sum_{n=M-1}^{N-M+1} \underline{y}_r(n) \underline{y}_r^+(n). \quad (10)$$

D'après (9) et (10) il vient :

$$\hat{\Gamma}_{r,y} = J [\hat{\Gamma}_{f,y}]^* J. \quad (11)$$

Par suite, si \underline{v}_i est vecteur propre de $\hat{\Gamma}_{f,y}$, λ_i étant la valeur propre associée, on montre facilement que :

$$\hat{\Gamma}_{r,y} J \underline{v}_i^* = \lambda_i J \underline{v}_i^*. \quad (12)$$

Ainsi, $J \underline{v}_i^*$ est vecteur propre de $\hat{\Gamma}_{r,y}$ avec pour valeur propre associée λ_i .

Dans ces conditions, nous définirons la matrice progressive-rétrograde par la relation :

$$\hat{\Gamma}_y = [\hat{\Gamma}_{f,y} + \hat{\Gamma}_{r,y}] / 2. \quad (13)$$

Il est facile de vérifier que cette matrice est une matrice centro-hermitienne, c'est à dire que :

$$J \hat{\Gamma}_y J = \hat{\Gamma}_y^* \quad (14)$$

et que si \underline{v}_j est vecteur propre de $\hat{\Gamma}_y$, $J \underline{v}_j^*$ est aussi vecteur propre relatif à la même valeur propre.

Ces propriétés sont naturellement tout aussi valables pour la matrice $\hat{\Gamma}_x$ progressive-rétrograde.

2.3. Matrice progressive-rétrograde non bruitée : dimension du sous-espace source

D'après (13) et (14) la matrice de covariance progressive-rétrograde peut se mettre sous la forme :

$$\hat{\Gamma}_y = \sum_{i=1}^p \lambda_i [\underline{v}_i \underline{v}_i^+ + J \underline{v}_i^* \underline{v}_i^{*+} J] / 2. \quad (15)$$

Cette relation montre que l'ensemble des vecteurs complexes $\{\underline{v}_i \text{ et } J \underline{v}_i^*\}$ forme une famille de vecteurs génératrice d'un nouveau sous-espace source. Si cet ensemble est libre, il est de dimension $2p$. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que cet espace est bien de dimension $2p$ pour $M \geq 2p$, hypothèse qui sera retenue pour toute la suite.

III. BASE A SYMETRIE HERMITIENNE - POLYNOME AUTORECIPROQUE ET CONTRAINTES ASSOCIES AU PREDICTEUR

3.1. Base à symétrie hermitienne

Nous avons vu au paragraphe 2.2 que si \underline{v}_j est vecteur propre d'une matrice centrohermitienne, $J \underline{v}_j^*$ est également vecteur propre relatif à la même valeur propre. Montrons que l'on peut construire une base de vecteurs propres ayant tous la propriété de symétrie hermitienne, c'est à dire tels que $J \underline{u}^* = \underline{u}$. Dans le cas général où une valeur propre, λ , peut être dégénérée d'ordre q , le raisonnement se fait par récurrence.

a) Initialisation

Soit \underline{u}_1 un vecteur du sous espace propre E_q relatif à

λ . Formons les deux vecteurs

$$\begin{cases} \underline{u}_1' = \underline{u}_1 + J \underline{u}_1^* \\ \underline{u}_2' = j(\underline{u}_1 - J \underline{u}_1^*) \end{cases} \quad (16)$$

On vérifie qu'ils ont l'un et l'autre la propriété de symétrie hermitienne.

Si $J \underline{u}_1^*$ est colinéaire à \underline{u}_1 , \underline{u}_1' et \underline{u}_2' lui sont également colinéaires. L'un au moins est non nul et peut être pris comme premier vecteur de la base à symétrie hermitienne.

Si $J \underline{u}_1^*$ et \underline{u}_1 sont indépendants, \underline{u}_1' et \underline{u}_2' le sont également. On vérifie que les deux vecteurs

$$\begin{cases} \underline{u}_1' \\ \underline{u}_2' = \underline{u}_2 - \frac{1}{\|\underline{u}_1'\|^2} \underline{u}_1' \underline{u}_1'^+ \underline{u}_2' \end{cases} \quad (17)$$

gardent la symétrie hermitienne et sont orthogonaux : ils peuvent être choisis comme premiers vecteurs de la base.

b) Récurrance

Supposons que l'on ait trouvé $i < q$ vecteurs de E_q orthogonaux et à symétrie hermitienne. Il existe alors un vecteur de E_q , soit \underline{u}_{i+1} , orthogonal à l'espace vectoriel engendré par les i premiers vecteurs. Les i premiers vecteurs ayant la symétrie hermitienne, on vérifie que l'orthogonalité de \underline{u}_{i+1} à ces vecteurs entraîne celle de $J \underline{u}_{i+1}^*$.

On peut alors appliquer la même méthode que ci-dessus pour construire, par somme et différence de \underline{u}_{i+1} et $J \underline{u}_{i+1}^*$, un ou deux vecteurs à symétrie hermitienne orthogonaux aux i premiers.

La récurrence est donc bien assurée de i à $i+1$ ou $i+2$ et se poursuit jusqu'à l'ordre q .

3.2. Contraintes sur le prédicteur

On impose au prédicteur l'orthogonalité à l'espace signal (engendré par les vecteurs propres $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{2p}$ relatifs aux $2p$ plus grandes valeurs propres), une norme minimale, et une condition de normalisation qui généralise la forme habituelle du vecteur de prédiction :

$$\underline{a}^+ \underline{e} = 1, \quad (18)$$

où \underline{e} est un vecteur donné. On retrouverait la condition $a_0 = 1$ en choisissant $\underline{e}^T = (1, 0, \dots, 0)$. En plus de (18) les conditions sont donc :

$$\begin{cases} \underline{a}^+ \underline{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2p, \\ \underline{a}^+ \underline{a} \text{ minimal.} \end{cases} \quad (19)$$

La solution se calcule sans difficulté et peut se mettre sous la forme (à une constante multiplicative près) :

$$\begin{cases} \underline{a} = P_b \underline{e}, \\ P_b = \sum_{i=2p+1}^M \underline{v}_i \underline{v}_i^+ \end{cases} \quad (20)$$

où les vecteurs propres \underline{v}_i de l'espace bruit sont supposés normés (P_b est le projecteur sur le sous espace bruit).

3.3. Condition pour obtenir un polynôme autoréciproque

Au vecteur \underline{a} on associe le polynôme

$$a(z) = \sum_{l=0}^{M-1} a(l) z^{-l}. \quad (21)$$

Si le vecteur \underline{a} a la symétrie hermitienne le polynôme satisfait la relation

$$a(z) = k z^{M-1} a^*\left(\frac{1}{z}\right), \quad |k| = 1, \quad (22)$$

il est donc autoréciproque : si z_0 est racine alors $(z_0^*)^{-1}$ est aussi racine de $a(z)$.

Or précisément les "images" des zéros z_i obtenus en utilisant la prédiction rétrograde sont donnés par $(z_i^*)^{-1}$. Si l'on sait imposer au vecteur \underline{a} d'avoir la symétrie hermitienne on impose donc une liaison entre les estimées des zéros et de leurs images et on retrouve seulement $(M-1)$ paramètres complexes indépendants.

Dans (20), en supposant que l'on ait choisi pour les \underline{v}_i des vecteurs à symétrie hermitienne, on vérifie que la matrice P_b est centrohermitienne. Dans ces conditions pour que \underline{a} ait la symétrie hermitienne il suffit que \underline{e} possède cette propriété.

3.4 Choix de la contrainte de normalisation

Pour généraliser le prédicteur habituel correspondant à $\underline{e} = (1, 0, \dots, 0)^T$, le choix le plus naturel pour assurer la symétrie paraît être $\underline{e} = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$. En fait on trouve que ce choix entraîne une dépendance artificielle des performances vis à vis de la fréquence. D'après (20) on a aucune raison d'imposer cette forme particulière, on est conduit à utiliser le vecteur

$$\underline{e}(\Phi) = (e^{j\Phi}, 0, \dots, 0, e^{-j\Phi})^T. \quad (23)$$

Le vecteur \underline{a} est alors lui-même fonction de Φ et la minimisation de $\underline{a}^+ \underline{a}$ se fait également sur Φ .

Compte tenu de (20), à Φ donné

$$\underline{a}^+ \underline{a} = \underline{e}^+(\Phi) P_b \underline{e}(\Phi). \quad (24)$$

Soit, P_s désignant le projecteur sur l'espace signal et compte tenu du fait que $P_s + P_b$ est la matrice identité :

$$\begin{aligned} \underline{a}^+ \underline{a} &= \underline{e}^+(\Phi) \underline{e}(\Phi) - \underline{e}^+(\Phi) P_s \underline{e}(\Phi) \\ &= 2 - [P_s]_{11} - [P_s]_{MM} - 2 \text{ Réel}\{ [P_s]_{1M} e^{-2j\Phi} \} \end{aligned} \quad (25)$$

qui est minimum si $[P_s]_{1M} e^{2j\Phi}$ est réel positif. Ce minimum est donc obtenu pour :

$$2\Phi = \arg [P_s]_{1M} = \arg \left[\sum_{i=1}^{2p} \underline{v}_{iM}^* \underline{v}_{i1} \right]. \quad (26)$$

IV. POSITION DES RACINES LIEES AU BRUIT

Indépendamment du choix de Φ , les contraintes envisagées ci-dessus imposent la valeur de a_1 et a_M et les valeurs des $2p$ zéros associés aux sources et à leurs images. Montrons que dans ces conditions la minimisation de $\underline{a}^+ \underline{a}$ va forcer les zéros supplémentaires sur le cercle unité.

En mettant la constante a_{M-1} en facteur, le polynôme $a(z)$ est de la forme :

$$a(z) = \prod_{i=1}^{M-1} (z - z_i) \quad (27)$$

où les p premiers zéros correspondent aux sources et les p suivants à leurs images. Le polynôme $a(z)$ étant autoréciproque, les $M-2p-1$ zéros restants sont soit sur le cercle unité, soit associés par paire de même argument et de module inverse. Montrons, en faisant un raisonnement par l'absurde, qu'ils sont en fait tous sur le cercle unité.



Supposons en effet qu'il existe, après minimisation, une paire $r e^{j\phi}$, $r^{-1} e^{j\phi}$ avec $r \neq 1$. Le polynôme $a(z)$ se met sous la forme :

$$a(z) = \alpha(z) (z-r e^{j\phi}) (z-r^{-1} e^{j\phi})$$

$$= \alpha(z) z e^{j\phi} (z e^{-j\phi} + z^{-1} e^{j\phi} - r - r^{-1}). \quad (28)$$

Pour $z = e^{2\pi i \nu}$ on obtient :

$$\begin{cases} |a(z)| = |\alpha(z)| |2[\cos(2\pi\nu - \phi) - 1] - \mu| \\ \quad = |\alpha(z)| (4 \sin^2(4\pi\nu - 2\phi) + \mu), \\ \mu = r + r^{-1} - 2 \geq 0. \end{cases} \quad (29)$$

Or

$$\| \underline{a} \|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |a(z)|^2 d\nu, \quad z = e^{2\pi i \nu}, \quad (30)$$

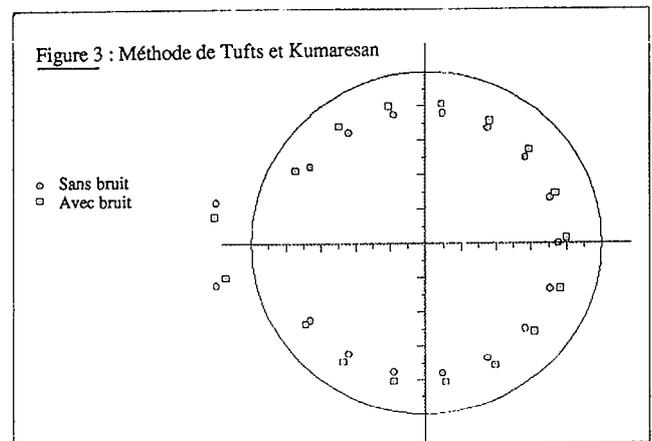
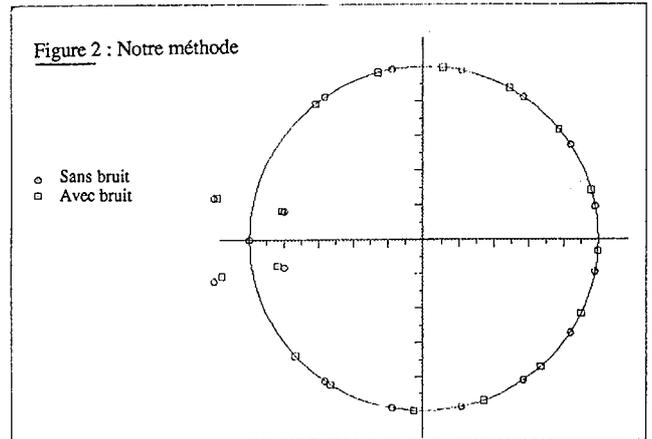
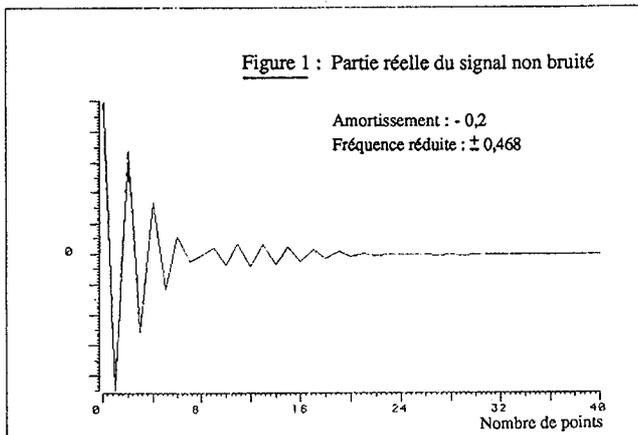
d'après (29) on obtiendrait toujours une valeur plus faible de l'intégrale pour $\mu = 0$, correspondant à $r = 1$. L'hypothèse que le minimum était atteint avec $r \neq 1$ est donc infirmée.

Les zéros associés au bruit sont donc tous sur le cercle unité, ce qui permet de les séparer aisément des zéros associés aux sources.

V. CONCLUSION

Les résultats de la méthode proposée sont comparés avec la méthode de Tufts Kumaresan. La figure 1 représente le signal utilisé, les figures 2 et 3 la position des zéros du polynôme $a(z)$ avec et sans bruit (le rapport signal à bruit étant de +10 dB) pour notre méthode et la méthode de Tufts et Kumaresan. D'après les premiers résultats de simulation la méthode "progressive-rétrograde" paraît plus intéressante dans le cas d'amortissement rapide. Des essais systématiques plus complets sont en cours.

Notons que la méthode pourrait être utilisée dans le cas d'exponentielles non amorties pour imposer à $a(z)$ une forme autoréciproque. L'utilisation de $\underline{a}(\Phi)$ généralise la méthode de Prony-Hildebrand [5], limitée au cas de signaux réels.



REFERENCES

[1] R. PRONY, "Essai expérimental analytique", Journal de l'Ecole Polytechnique, Vol. 1, Cahier 2, 1795, p.188-200.

[2] J. ULRICH and R.W. CLAYTON, "Time series modelling and maximum entropy", Physics Earth Planetary Interiors, Vol. 12, 1976, p.188-200.

[3] R. KUMARESAN and D.W. TUFTS, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise", I.E.E.E. A.S.S.P., Vol. 30, 1982, p.833-840.

[4] H. CLERGEOT, A. OUAMRI and S. TRESSSENS, "High resolution spectral methods for spatial discrimination of closely spaced correlated sources", Proceedings ICASSP 85, Tampa, Florida, 26-29 Mars 1985, p.560-563.

[5] F.B. HILDEBRAND, "Introduction to numerical Analysis", McGraw-Hill, New York, 1956.