

BUR LA NORME L₁ EN ANALYSE MULTI-IMPULSIONNELLE
ON THE L₁ NORM IN MULTI-PULSE ANALYSIS

A. OUAHABI A. HALILALI

Laboratoire "Electronique des systèmes". Institut de Physique.
U.S.T.H.B BP 9 DAR EL BEIDA ALGER ALGERIE.

Resumé

Cet article présente une revue des propriétés du critère de la moindre erreur absolue en analyse prédictive.

Des résultats préliminaires montrent qu'en analyse multi-impulsionnelle, où l'entrée du filtre AR est assimilée à un train d'impulsions, le critère l₁ semble supérieur au critère l₂.

Une telle analyse trouve des champs d'application en analyse-synthèse du signal de parole et en déconvolution de traces sismiques.

Abstract

The main properties of the least absolute error criterion used in linear prediction are summarized in this paper.

Preliminary results have shown that the l₁ criterion is particularly well adapted in multi-pulse analysis.

The method proposed here has a number of applications in fields such as speech processing and seismic prospecting.

I. INTRODUCTION

L'approximation linéaire d'un signal réel s(i) peut être définie par :

$$u^x(i) = a_j \sum_{j=1}^P a_j u_j(i) \quad (1)$$

où s(i) i=1,...,N représentent N observations du signal u_j j=1,...,P (P < N) sont des fonctions réelles données. a un vecteur de coefficients (ou paramètres) a_j j=1,...,P

Les paramètres optimaux qui approximent au mieux s(i) sont déterminés plus précisément en définissant un résiduel ou erreur :

$$e(i) = s(i) - u^x(i) = s(i) - \sum_{j=1}^P a_j u_j(i) \quad (2)$$

avec i variant de 1 à N

N et P sont respectivement appelés dimension et ordre du système.

En notation matricielle l'erreur d'approximation s'écrit :

$$e = s - Ua \quad (3)$$

où la matrice U est définie par :

$$u_{ij} = u_j(i)$$

Le critère généralement utilisé pour déterminer les a_j est celui des moindres carrés qui consiste à minimiser, sous hypothèses d'ergodisme et de stationnarité au moins au 2^{ème} ordre, la norme l₂ définie par :

$$\sum_{i=1}^N e^2(i) \quad (4)$$

Ce problème a suscité un grand intérêt, et diverses solutions ont été proposées depuis longtemps.

Ainsi, les méthodes "d'approximation" les plus attractives relèvent des techniques de prédiction linéaire.

Les techniques prédictives sont généralement utilisées pour estimer un signal à partir de son passé, réduire la redondance d'un signal ou modéliser un système par un filtre tout-pôle.

Le signal lui-même ou le système produisant le signal (cas du conduit vocal, par exemple) peut être décrit par une suite de paramètres déterminés par minimisation d'une erreur quadratique moyenne (norme l₂).

Dans ce cas, u_j(i) prend la forme spéciale s(i-j), de façon que (4) devienne :

$$l_2 = \sum_{i=1}^N (s(i) - \sum_{j=1}^P a_j s(i-j))^2 \quad (5)$$

De nombreux algorithmes rapides ont été développés. Parmi ceux qui ont prouvé leur efficacité, nous citerons les algorithmes de Durbin-Levinson, Burg [4].

Bien qu'elle connaisse un succès considérable, la prédiction linéaire utilisant un critère des moindres carrés s'est avérée insuffisante pour rendre compte des événements non prédictibles à partir du passé récent, et de l'information de phase.

Parallèlement, le résiduel de prédiction linéaire e qui devait être blanc dénué d'information demeure "intelligible" dans le cas des signaux de parole c.à.d. ayant des échantillons corrélés même pour des ordres élevés.

De plus, dans le cas de la production de la parole, la modélisation du conduit vocal



par une fonction de transfert tout-pôle ne semble pas être très réaliste alors qu'en fait la situation est bien plus complexe.

Afin d'améliorer cette modélisation, des techniques plus élaborées ont été introduites :

i) Ce fût d'abord le modèle ARMA (ou système pôles-zéros), [4], dont la résolution est très coûteuse en nombre d'opérations et en encombrement mémoire, vu que l'entrée du système est généralement inconnue.

Ce problème d'identification peut être simplifié sur le plan de la complexité de calcul en réduisant le degré d'optimisation, ce qui confère au modèle résultant des performances autres que celles promises.

ii) Une autre tentative visant à remédier à ces inconvénients fût proposée par Atal [1]: il s'agit de méthodes impulsives où l'effort de modélisation est partiellement reporté sur l'entrée. Celle-ci est représentée par un train d'impulsions dont les positions et amplitudes sont convenablement ajustées.

Ces méthodes se sont développées de façon considérable et ont suscité de nombreuses variantes [6].

Toutefois, les algorithmes proposés évitent la résolution d'équations non-linéaires qui estiment simultanément toutes les amplitudes et positions des impulsions; par conséquent, dans ce sens ils sont sous-optimaux.

iii) Dernièrement des méthodes, exploitant le fait que le modèle multi-impulsionnel est un ARMA ayant une partie MA "creuse", ont vu le jour [7], [5] et sont en cours d'amélioration dans le cas de signaux présentant des effets non-linéaires.

En vue d'améliorer les performances de la prédiction linéaire; nous proposons dans cette communication une autre alternative qui pose le problème du choix même du critère d'optimalité.

Ainsi, en section II, nous exposerons les principales propriétés du critère de la moindre erreur absolue (norme l_1) en analyse prédictive.

Ensuite, en section III, nous examinerons l'importance de la norme l_1 , lorsque l'entrée du système est un train d'impulsions.

Cette partie lie donc deux améliorations de la prédiction linéaire : le modèle multi-impulsionnel et le critère l_1 .

Dans cette section, des résultats préliminaires illustrent l'efficacité de l'analyse multi-impulsionnelle utilisant un critère l_1 , dans deux domaines d'application : l'analyse-synthèse du signal de parole et la déconvolution de traces sismiques.

II. PROPRIETES DU CRITERE L_1

Cette section résume les avantages et les limitations d'un critère longtemps délaissé à cause de la complexité de sa mise en oeuvre.

Les récents développements de la programmation linéaire [2],[3], ont montré que dans certains types de problèmes le critère l_1 , ou moindre erreur absolue peut s'avérer plus puissant que le critère l_2 ou moindres carrés.

Le critère l_1 , minimise :

$$\sum_{i=1}^N |e_i| \quad (6)$$

Cette expression est appelée norme l_1 , de l'erreur e définie par (3).

Dans le cas de la prédiction linéaire, cette norme s'écrit :

$$l_1 = \sum_{i=1}^N |s(i) - \sum_{j=1}^P a_j s(i-j)| \quad (7)$$

II.1 Robustesse de la norme l_1

La notion de robustesse peut être traduite en ces termes : quelques données erronées ne causent pas un préjudice important à la solution l_1 .

Il est bien connu, que le critère de l'erreur quadratique moyenne "pondère" les données de façon "uniforme"; cela entraîne qu'une seule mauvaise donnée (bruit impulsif) peut engendrer sur la solution l_2 un effet disproportionné.

Par contraste la solution l_1 tend à rejeter les quelques données erronées ce qui lui confère une meilleure représentativité.

-Exemple 1.

Pour illustrer la robustesse de la norme l_1 , prenons l'exemple classique où $p=1$ et $u_i(i)=1$ $i=1, \dots, N$. Dans ce cas, le signal est approximé par une constante a .

La norme l_1 s'écrit :

$$l_1 = \sum_{i=1}^N |s(i) - a| \quad (8)$$

La valeur optimale de a est la médiane des échantillons $s(i)$, c.à.d. une valeur a telle que le nombre d'échantillons inférieurs à a est égal au nombre d'échantillons $s(i)$ supérieurs à a . Si cela n'était pas le cas, (par exemple pour un nombre d'échantillons pair), il serait toujours possible de réduire la norme l_1 , en déplaçant a dans la direction du plus grand nombre d'échantillons.

Pour le même problème d'estimation mais avec la norme l_2 , la solution qui donne a est la moyenne arithmétique des échantillons $s(i)$.

Dans le cas où les observations $s(i)$ sont bruitées, ces erreurs affecteront la médiane et la moyenne de façon différente.

En effet, tant qu'un échantillon demeure du même côté de la médiane, la valeur de la médiane ne change pas; ceci n'est évidemment pas le cas de la moyenne.

La robustesse de la norme l_1 est incontestablement l'avantage le plus représentatif de la solution l_1 , par rapport à la solution l_2 .

II.2 Non-unicité de la solution l_1

D'après l'exemple 1, si le nombre N d'échantillons est pair, la valeur optimale de a se situe "quelques part" entre les deux échantillons centraux de $s(i)$.

Cet aspect négatif montre malheureusement que la solution l_1 , n'est pas toujours unique.

-Exemple 2.

De l'expression (3), le signal estimé ou plus précisément prédit s'écrit :

$$\hat{s}(i) = \sum_{j=1}^P a_j s(i-j) \quad i=1, \dots, N \quad (9)$$

En notation matricielle

$$\hat{s} = U a \quad (10)$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \dots \\ \hat{s}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s(1) & s(0) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & s(1) & s(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s(N-1) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & s(N-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & s(N-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (11)$$

Considérons les équations :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

La solution 1, peut être obtenue en résolvant $C_4^2 = 6$ systèmes de 2 inconnues et en sélectionnant la (ou les) solution(s) qui minimise(nt) la norme l_1 .

Le tableau I, qui donne toutes les solutions possibles ainsi que les erreurs l_1 , correspondantes, montre que le problème posé en (12) produit trois séries de coefficients de prédiction ayant une norme l_1 , minimale et égale à 2.

Equations	(a_1, a_2)	$\sum e_i $
(1),(2)	(-1,-1)	4
(1),(3)	(-1,0)	2
(1),(4)	(-1,0.5)	2
(2),(3)	(-0.66,-0.66)	2.66
(2),(4)	(0.5,0.5)	3.5
(3),(4)	(0.75,0.5)	2

Tableau I

Cet exemple illustre parfaitement la non-unicité de la solution l_1 .

II.3 Stabilité du filtre de prédiction

La stabilité du filtre de prédiction calculé à partir du critère l_1 , n'est pas toujours garantie. Toutefois, cet inconvénient peut être aplani par des algorithmes de résolution appropriés [8].

D'après (3) et (9), l'erreur de prédiction s'écrit :

$$e(i) = s(i) - \hat{s}(i) = s(i) - \sum_{j=1}^P a_j s(i-j) \quad (13)$$

Par transformée-en-z des deux membres de (13), nous obtenons le filtre autorégressif correspondant (en considérant $e(i)$ et $s(i)$ respectivement l'entrée et la sortie de ce filtre).

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^P a_j z^{-j}}$$

Il est bien connu que ce filtre est stable si et seulement si tous les pôles de $H(z)$ sont localisés à l'intérieur du cercle unité.

Exemple 3:

Considérons le signal :

$$s^T(i) = [-0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 3]$$

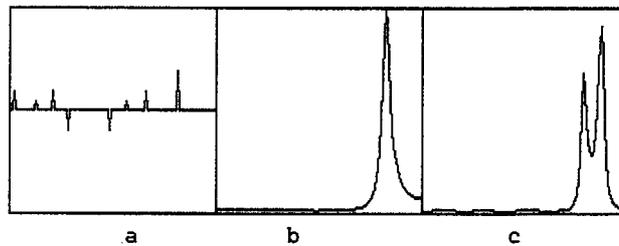
où $s(i) = 0$ pour $n < 0$ et $n > 4$

Pour un filtre de prédiction du premier ordre, (9) peut s'exprimer :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} a_1 \quad (15)$$

La solution 1, donne $a_1 = 1.33$, alors que la solution l_2 est $a_1 = 0.60$. Il est bien évident que la stabilité du filtre l_2 est toujours garantie par utilisation de l'algorithme de Burg par exemple.

II.4 Résolution spectrale



La figure 1 montre successivement:
 a- Un bruit impulsionnel (8 données)
 b- La densité spectrale de puissance, d'une solution l_2 (filtre d'ordre six), d'un signal composé de deux sinusoïdes ($f_1 = 0.10$ Hz; $f_2 = 0.11$ Hz) noyées dans le précédent bruit impulsionnel.
 c- La densité spectrale de puissance du même signal issue d'une solution l_1 .

Il est clair que la solution l_1 , présente une meilleure résolution spectrale due à sa robustesse (cf. II.1).

III. NORME l_1 ET METHODE IMPULSIONNELLE

Nous avons vu que le critère l_1 , est particulièrement adapté à une analyse prédictive en présence de bruit impulsionnel. Cette constatation, nous incite à préconiser l'adoption du critère l_1 , en analyse multi-impulsionnelle.

Le modèle multi-impulsionnelle introduit par Atal en 1982 [11], représente un signal $s(i)$ par

$$s(i) = \sum_{j=1}^P a_j s(i-j) + \sum_{k=1}^Q b_k \delta(i-i_k) + e(i) \quad (16)$$

où $\delta(i-i_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=i_k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

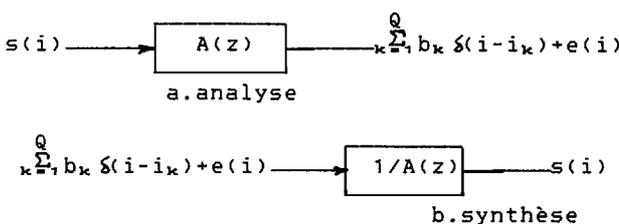


figure 2.

$$\text{où } A(z) = 1 - \sum_{j=1}^P a_j z^{-j}$$

Ce modèle initialement présenté dans le contexte de la parole, peut être étendu au cas de la déconvolution sismique.



III.1. Methode de minimisation

a. Détermination des coefficients a_1 : elle s'effectue par minimisation de la valeur absolue de l'erreur de prédiction c.à.d. $|e(i)|$.

Cette minimisation peut s'effectuer par l'algorithme du simplexe utilisé dans l'exemple 2, qui consiste à trouver les solutions vérifiant

$$s(i) - \sum_{j=1}^p a_j s(i-j) = 0 \quad (17)$$

Parmi les solutions possibles, il suffit de sélectionner celle qui présente la moindre erreur moyenne absolue.

Cet algorithme présente les inconvénients cités en II.2 et II.3 c.à.d. non-unicité et instabilité.

Yarlagada en 1985 [8], a présenté un algorithme rapide plus performant qui résout le problème de convergence: il s'agit de l'algorithme RSD modifié.

D'autres possibilités comparables à l'algorithme de Burg (utilisation des erreurs progressives et retrogrades) s'offrent à la norme l_1 , en vue d'assurer la stabilité du filtre de prédiction.

b. Détermination des impulsions: elle s'effectue par minimisation de l'erreur absolue moyenne sous contraintes:

$$|e(i)| < \epsilon(i) \quad \text{c.à.d.}$$

$$|s(i) - \sum_{j=1}^p a_j s(i-j) - \sum_{k=1}^q b_k \delta(i-i_k)| < \epsilon(i) \quad (18)$$

où $\epsilon(i)$ est un seuil choisi à priori.

Les positions i_k peuvent être ajustées à partir de l'observation du résiduel de prédiction.

Cette méthode simple ne nécessite pas un volume de calcul important et a l'avantage de "contrôler" le nombre d'impulsions c.à.d. que le seuil $\epsilon(i)$ constitue un critère d'arrêt.

III.2 Applications

a. Modélisation multi-impulsionnelle du signal de parole

-En analyse: la réestimation des coefficients AR, lorsque les impulsions sont connues entraîne une meilleure analyse spectrale puisque dans ce cas l'erreur moyenne est plus faible et blanche.

-En synthèse: ce modèle produit une qualité sonore pratiquement naturelle et évite les problèmes difficiles de la décision de voisement-non-voisement ainsi que l'estimation du fondamental.

b. Déconvolution de traces sismiques

Le traitement des signaux sismiques, dans le cadre de la prospection pétrolière, consiste à sonder le sous-sol par émission d'un signal (explosion) à phase minimale pour déterminer à partir du signal réfléchi (traces sismiques), les coefficients de réflexion et distances entre les différentes couches de l'écorce terrestre.

Un modèle simple de la structure terrestre est celui d'un train d'impulsions dont les amplitudes et retards correspondent respectivement aux coefficients de réflexion et distances entre couches.

D'où

$$s(i) = \left(\sum_{k=1}^q b_k \delta(i-i_k) \right) * h(i) \quad (19)$$

où

$s(i)$ représente le signal reçu
 $h(i)$ est la réponse impulsionnelle du filtre de prédiction déterminé par $\hat{S}(i) = s(i) * a_1$ relation équivalente à (9).

La détermination du train d'impulsions est un problème de déconvolution qui peut être résolu par méthode impulsionnelle utilisant un critère l_1 (figure 2).

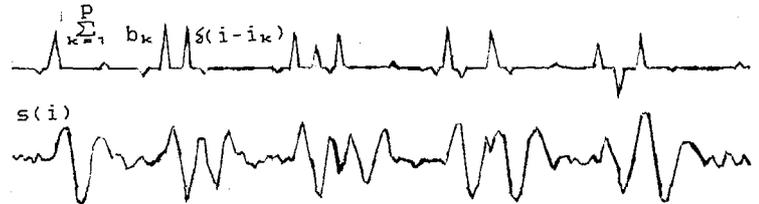


figure 3. Déconvolution sismique

L'intérêt de la norme l_1 réside dans le fait qu'elle préserve l'information de phase puisqu'elle s'applique directement sur les données et non pas sur les corrélations, comme c'est le cas pour la norme l_2 .

CONCLUSION

Ce travail préliminaire montre qu'il est intéressant de choisir le critère l_1 en analyse multi-impulsionnelle.

Ce choix est motivé par la robustesse de la solution l_1 et sa haute résolution spectrale, ainsi qu'à sa faculté de préserver l'information de phase.

Les limitations du critère l_1 , -non-unicité de la solution et instabilité du filtre de prédiction- peuvent se lever par un algorithme rapide utilisant les erreurs progressives et retrogrades.

La programmation linéaire offre de larges perspectives dans ce sens, et une étude exhaustive reste à faire, ainsi que les conditions d'application sur des signaux réels.

Bibliographie

- [1] B.S. Atal, J.R. Remde, "A new model of LPC...", Proc. IEEE-ICASSP, Paris 1982.
- [2] I. Barrodale, F.D.K. Roberts, "An improved algorithm for discrete l_1 approximation", SIAM J. Num. Anal., vol. 10 n°5, 1973.
- [3] J.F. Claerbout, F. Muir, "Robust modeling with erratic data", Geophysics vol. 38 n°5, 1973.
- [4] S.M. Kay, S.L. Marple, "Spectrum analysis-A modern perspective", Proc. IEEE-ASSP, vol. 69 n°11, 1981.
- [5] G. Feng, J.L. Lacoume, "Amélioration de l'estimation du spectre de parole par suppression d'impulsions dans le résidu", à paraître dans Trait. du Sign.
- [6] A. Ouahabi, "MP-LPC analysis of speech and seismic signals", Proc. I.C. Prob. stat. func. decis. inf. th. and rnd proc., Prague 1986.
- [7] A. Ouahabi, M. Charbi, "A new approach to ARMA model", Workshop Auto. and Sign. Proces., Rabat 1987.
- [8] R. Yarlagada and al, "Fast algorithms for l_1 deconvolution", IEEE trans. ASSP, vol. 33 n°1, 1985.