

ETUDE EN SENSIBILITE DES FILTRES NUMERIQUES

E. LOFFLER - C. DARMOUNI

THOMSON INFORMATIQUE SERVICES - 104 rue Castagnary - 75015 PARIS

Au cours de ces dernières années, de nombreuses études furent consacrées à la recherche de structures de filtres numériques à faible nombre de multiplieurs et à registres mémoires de taille réduite. Aujourd'hui plusieurs structures dites 'à faible sensibilité' sont proposées, telles que les structures cascade, treillis, ou en échelle simulée. Le propos de cet article est la détermination de critères de comparaison de ces structures. Il est montré que l'analyse des propagations des erreurs de calcul, dues au caractère discret des variables, nous permet de dégager un principe de calcul systématique.

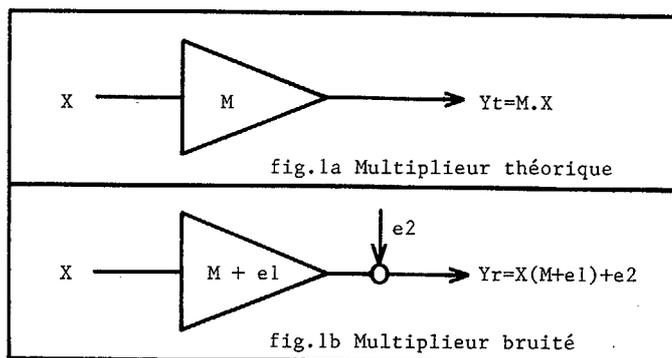
Recently, there has been a great deal of interest in the digital filter structures with low coefficient word length. At present, an important number of structures is presented like cascade, lattice and ladder structures. In this paper, it will be shown that the analysis of the finite word length effects allows to draw the rules of a systematic computation.

INTRODUCTION

Evaluer la sensibilité d'une structure revient à déterminer la variation d'une caractéristique (le plus souvent une réponse harmonique), en fonction de la réduction de la taille des registres mémoires. Les approches classiques consistent à évaluer statistiquement le nombre de bits minimal de codage pour une structure d'implémentation donnée. Ici, on ne cherchera pas à déterminer ce nombre de bits, mais à obtenir, pour chaque structure, des éléments de comparaison directement liés à celui-ci, ceci dans le but d'isoler la structure la moins sensible.

HYPOTHESES - MODELES DE CALCUL

Outre la quantification du signal d'entrée, on peut déceler, au niveau de chaque multiplieur, deux sources d'erreur. La première est due à la limitation du nombre de bits des multiplieurs, la seconde à celle des registres résultats. Ces deux erreurs entraînent qu'en fin de traitement, le signal présente une distorsion par rapport au signal théorique qui peut altérer le comportement du filtre au delà des tolérances permises. Les figures 1a et 1b schématisent un multiplieur théorique et son modèle quantifié.



on a :

$$\text{Max}(e1) = \frac{\text{LSBm}}{2} ; \quad \text{Max}(e2) = \frac{\text{LSBr}}{2}$$

avec

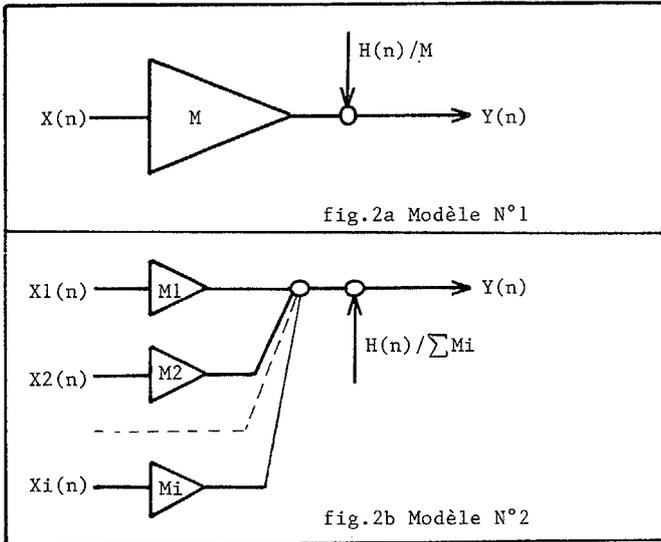
LSBm : LSB des registres multiplieurs
 LSBr : LSB des registres résultats

L'erreur relative maxi s'exprime alors :

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{M} \left(\frac{\text{LSBm}}{2} + \frac{\text{LSBr}}{X} \right) \quad (1)$$



L'expression (1) traduit la dépendance de l'erreur en sortie de multiplieur avec l'amplitude du signal d'entrée X. Les modèles équivalents retenus dans la suite de l'étude sont présentés aux figures 2a et 2b. Ils correspondent respectivement à des multiplieurs avec et sans accumulateur, et font intervenir une fonction d'erreur H(n) qui sera précisée ultérieurement.



EXPOSE DE LA METHODE DE CALCUL

Nous constatons, qu'une étude dynamique est nécessaire à la prévision du comportement global du filtre réel. Pour ce faire la démarche suivante a été retenue :

Chaque multiplieur est à l'origine d'une source d'erreur, qui peut être assimilée à une entrée parasite. La réponse impulsionnelle du filtre vis-à-vis de toutes ces entrées secondaires, nous renseigne complètement sur le comportement de celui-ci, moyennant les modèles des figures 2a ou 2b. Une transformation de Fourier met alors en évidence le gain dynamique du système bruité, et fait apparaître les "points chauds" de déformation (gain dynamique maxi). La comparaison des gains maximaux pour chaque structure peut être utilisée comme critère absolu de la sensibilité de ces dernières. Le synoptique figure 4 résume le principe énoncé.

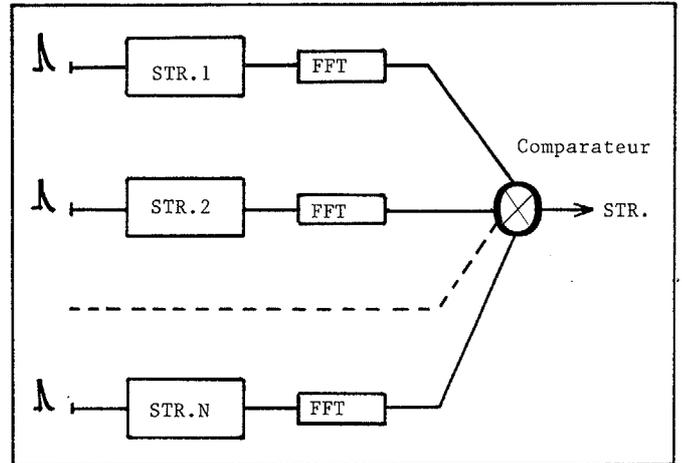


fig.4 Principe d'analyse

COMPORTEMENT D'UN FILTRE NUMERIQUE

La réduction de la taille des registres de calcul entraîne une déformation des caractéristiques du filtre, notamment de sa réponse harmonique, à laquelle nous nous intéressons ici. Après une étude du comportement de plusieurs types de filtre, codés sur des longueurs de registres variables, on constate que la fonction erreur E(w), présente des zones de déformation extrêmes, relatives à la fonction d'approximation employée (Butterworth, Tchebychev,...), et au type de structure d'implémentation (Treillis, cascade,...). La figure 3 nous montre une telle fonction, dans le cas d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à 500 hertz.

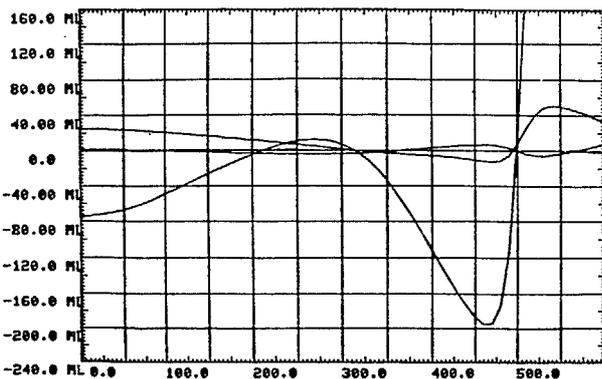


fig.3 fonction erreur

APPLICATION AUX STRUCTURES TREILLIS

La structure Treillis proposée par S.K. MITRA dans les années 70 était, à l'origine destinée à l'implémentation de filtres digitaux à faible nombre de multiplieurs. Elle servira d'exemple à nos calculs, et sera comparée aux autres structures treillis proposées par GRAY et MARKEL. La forme de ces structures est rappelée figure 5.

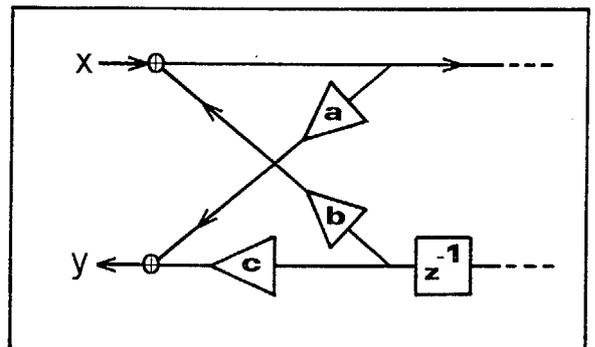
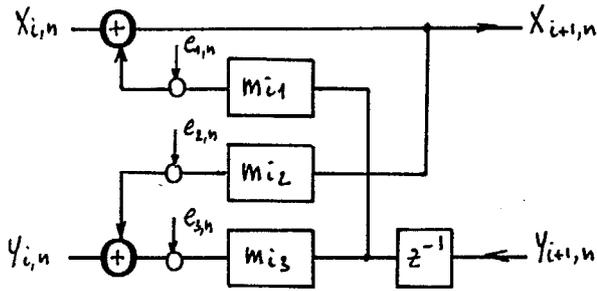


fig.5 Treillis type MITRA

a) Notations

- i : indice de cellule
- k : ordre du filtre
- n : indice de l'échantillon
- m_{ij} : coefficients du filtre
- $X_{i,n}$: vecteur d'entrée relatif à la cellule i
- $Y_{i,n}$: vecteur de sortie relatif à la cellule i
- $e_{j,n}$: vecteur erreur associé au coefficient j
- M_{ij} : matrice chaîne
- $E_{i,n}$: matrice erreur



b) matrice chaîne

$$\begin{cases} X_{i,n} = X_{i+1,n} - m_{i1} \cdot Y_{i+1,n} - e_{1,n-1} \\ Y_{i,n} = m_{i2} \cdot X_{i+1,n} + m_{i3} \cdot Y_{i+1,n-1} + e_{3,n-1} + e_{2,n} \end{cases}$$

qui s'écrit :

$$x_{in} = M_{i1} \cdot x_{i+1,n} + M_{i2} \cdot x_{i+1,n-1} + E_{in} \quad (2)$$

avec :

$$x_{in} = \begin{bmatrix} X_{in} \\ Y_{in} \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_{i2} & 0 \end{bmatrix}; M_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & -m_{i1} \\ 0 & m_{i3} \end{bmatrix}$$

$$E_{in} = \begin{bmatrix} -e_{1,n-1} \\ e_{2,n} + e_{3,n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

c) récurance

Les équations (2) introduisent le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_{1n} = M_{11} \cdot x_{2n} + M_{12} \cdot x_{2,n-1} + E_{1,n} \\ x_{2n} = M_{21} \cdot x_{3n} + M_{22} \cdot x_{3,n-1} + E_{2,n} \\ \dots \\ x_{kn} = M_{k1} \cdot x_{k+1,n} + M_{k2} \cdot x_{k+1,n-1} + E_{k,n} \end{cases} \quad (4)$$

L'équation recherchée $x_{1n} = F(x_{kn}, x_{n-1}, \dots)$ est linéaire par rapport à $x_{k,n}$ ($j=0, i$) et sera de la forme :

$$x_{1n} = A_{k1} \cdot x_{k+1,n} + A_{k2} \cdot x_{k+1,n-1} + \dots + B_{k,n}$$

à l'ordre 1:

$$A_{11} = M_{11} \quad ; \quad A_{12} = M_{12} \quad ; \quad B_{1n} = E_{1,n}$$

à l'ordre 2:

$$\begin{aligned} A_{21} &= A_{11} \cdot M_{21} \\ A_{22} &= A_{11} \cdot M_{22} + A_{12} \cdot M_{21} \\ A_{23} &= A_{12} \cdot M_{22} \\ B_{2n} &= B_{1n} + (A_{11} \cdot E_{2,n} + A_{12} \cdot E_{2,n-1}) \end{aligned}$$

à l'ordre k:

$$\begin{aligned} A_{k1} &= A_{k-1,1} \cdot M_{k1} \\ A_{kj} &= A_{k-1,j-1} \cdot M_{k2} + A_{k-1,j} \cdot M_{k1} \\ A_{k,k} &= A_{k-1,k} \cdot M_{k2} \\ B_{k,n} &= B_{k-1,n} + \sum_{i=2,k} A_{k-1,i} \cdot E_{k,n+1-i} \end{aligned}$$

d'où le bruit en sortie, en introduisant l'équation aux limites :

$$X_{k+1,n} = Y_{k+1,n} \quad (\forall n)$$

$$\begin{cases} X_{k+1,n} = (A_{k11} + A_{k12}) \cdot (X_{1n} - \sum_{j=2}^{k+1} (A_{kj1} + A_{kj2}) X_{k+1,n-j} - B_{kn1}) \\ Y_{1n} = \sum_{j=1}^{k+1} (A_{kj3} + A_{kj4}) \cdot X_{k+1,n-j+1} + B_{kn2} \end{cases}$$

e) résultats obtenus

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus à partir d'un filtre passe-bas de Tchebychev, travaillant à une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Ondulation bande passante : 0.5 dB
- Réjection hors bande : 25 dB
- Fréquence de coupure : 500 Hz
- Degré du filtre : 5

Un programme de synthèse de filtres en Treillis nous donne les valeurs des multiplieurs. La réponse fréquentielle Théorique de ce filtre est présentée figure 6. les figures 7 et 8 représentent respectivement, la réponse impulsionnelle du filtre bruité, et le gain dynamique associé.

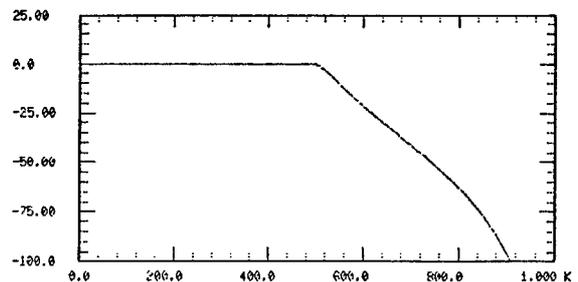


fig.6 réponse Théorique

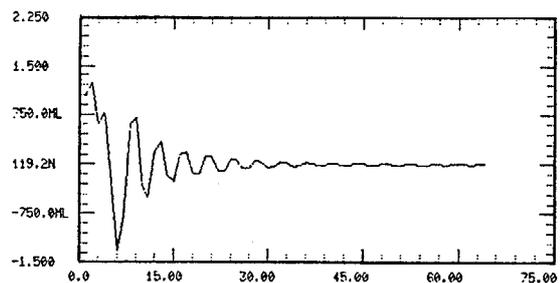


fig.7 réponse Impulsionnelle

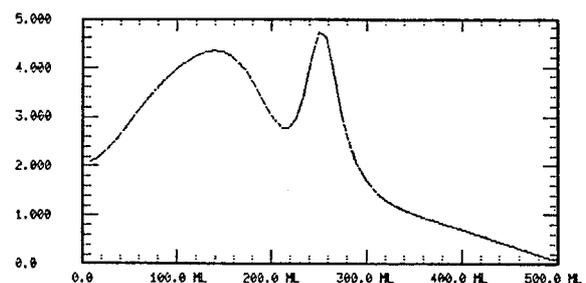


fig.8 Gain dynamique



PROGRAMME <AMBRE>

Le programme AMBRE a été réalisé à partir du principe précédemment énoncé. Intégré à la chaîne de logiciels de synthèse de filtres BANK LTS, il a pour but d'orienter tout concepteur vers la structure qui, tout en répondant aux contraintes de filtrage données, offre les meilleures caractéristiques de sensibilité. Un exemple vous est présenté ci-après, à partir du calcul d'un filtre coupe-bande, dont les caractéristiques sont :

Fréq. d'échantillonnage 10000 Hz
 Ondulation dans la bande ... 0.5 dB
 Réjection hors bande 25 dB
 Bande coupée 1700-1750 Hz

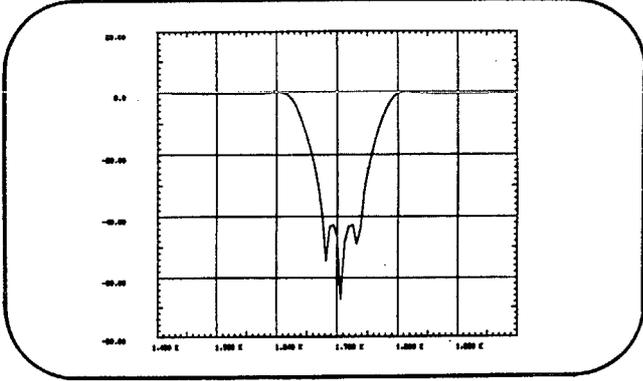
Les résultats de synthèse sont données par la BANK LTS :

```

U( 0) = -0.2878713E-04      M( 0) = -0.2774248E-03
K( 0) = -0.4782723E+00      U( 1) =  0.4938394E-04      M( 1) =  0.2521073E-03
K( 1) =  0.9972087E+00      U( 2) = -0.4523418E-02      M( 2) = -0.4612005E-01
K( 2) = -0.4670435E+00      U( 3) =  0.8483828E-02      M( 3) =  0.4566589E-01
K( 3) =  0.9957152E+00      U( 4) =  0.1294537E+00      M( 4) =  0.1403873E+01
K( 4) = -0.4656538E+00      U( 5) = -0.7889643E-01      M( 5) = -0.4571672E+00
K( 5) =  0.8274308E+00      U( 6) =  0.9106470E+00      M( 6) =  0.9106470E+00

      ECART TYPE SORTIE = ECART TYPE ENTREE * 0.981366838E+00
      ENTREE <RETURN> POUR CONTINUER
    
```

Valeurs des multiplieurs



Gain du filtre

FILTRAGE NUMERIQUE

- SYNTHESE I.I.R EN CASCADE OU TREILLIS CATI
- SYNTHESE I.I.R EN ECHELLE ESIR
- SYNTHESE I.I.R OPTIMISEE EN CASCADE SOPI
- SYNTHESE DE FILTRES F.I.R SIFR
- ANALYSE DE FILTRES QUELCONQUES ANFI
- ANALYSE EN SENSIBILITE SENS
- FIN DE LA SESSION FIN

CONTINUER :

BANK LTS: MENU PRINCIPAL

FREQUENCE D ECHANTILLONNAGE 10000.00
 COEFFICIENT AU NUMERATEUR 0.910647006E+00

NO	Z**0	Z**(-1)	Z**(-2)
1	0.100000000E+01	-0.935317069E+00	0.100000000E+01
2	0.100000000E+01	-0.911105324E+00	0.100000000E+01
3	0.100000000E+01	-0.959182357E+00	0.100000000E+01

NO	Z**0	Z**(-1)	Z**(-2)
1	0.100000000E+01	-0.873429547E+00	0.867665152E+00
2	0.100000000E+01	-0.849934322E+00	0.976030027E+00
3	0.100000000E+01	-0.995603710E+00	0.977048996E+00

Coefficients du filtre

GAINS DYNAMIQUES MAXI.

TREI1		37
TREI2		60
MITRA		6
CASC1		1
CASC2		1

TAPER <RETURN> POUR CONTINUER

BIBLIOGRAPHIE

- R.E CROCHIERE and A.V OPPENHEIM : Analysis of linear digital networks IEEE, vol.63, No.4 April 1975 .
- A.H. GRAY and J.D. MARKEL : Digital lattice and ladder filter synthesis, IEEE-T-AE, vol.21, december 73.
- S.K. MITRA : Cascaded lattice realization of digital filter , Circuit Theory vol.5, 1977.
- L.B. JACKSON : Onthe interaction of round-off noise and dynamic range in digital filters, BSTJ, vol.49, FEB 70.
- S.R. PARKER and P.E. GIRARD : Correlated noise due to roundoff in fixed point digital filters, IEEE T.O.C.A.S, vol.23, No.4, april 76.