

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

CODAGE VECTORIEL POUR LA COMPRESSION PAR TRANSFORMATION UNITAIRE

A. AYOUN, G. GAILLAT, S. MULLER

S.A. MATRA, Avenue Louis Bréguet, VELIZY

RESUME

Les techniques de compression d'images par transformation unitaire (transformation COSINUS ou HADAMARD) sont reconnues parmi les plus performantes en compression intra-image. Cependant, elles ne sont pas utilisées de façon optimale si l'on attribue un nombre entier de bits au codage de chaque coefficient.

Le regroupement de plusieurs coefficients dans un même mot, que nous appelons "codage vectoriel" permet de choisir le nombre optimal de niveaux de quantification pour chaque coefficient.

Cette stratégie de codage améliore la fonction débit-distortion. En présence de bruit de transmission, une erreur sur un bit affecte plusieurs coefficients. L'avantage du codage vectoriel est alors moins net :

- ou l'erreur de reconstruction est plus grande,
- ou la réduction de débit est plus faible si l'on utilise un code protecteur d'erreur.

On établit le domaine d'intérêt du codage vectoriel en fonction de la probabilité d'erreur de bit en transmission. Des résultats sur images sont présentés, qui montrent l'avantage du codage vectoriel.

SUMMARY

Unitary transform (such as COSINE or HADAMARD) are well-known to be among the best intra-image compression techniques. However, allocating an integral number of bits to the coding of each coefficient results in a loss of optimality.

Grouping several coefficients into a single word-called vector coding- allows us to allocate the optimal number of quantization levels to each coefficient.

This coding strategy improves the Rate-Distortion function. In case of transmission noise, a single erroneous bit changes several coefficients. Therefore, the benefit of vector coding decreases with the error rate :

- either the reconstruction error is larger,
- or the use of an error protecting code reduces the compression ratio.

The domain of interest of vector coding with respect to bit error probability is established. Results on real images are presented showing that vector coding remains advantageous.



1 - PRINCIPES DE COMPRESSION PAR TRANSFORMÉE UNITAIRE

On rappelle ici les principes de base des méthodes de compression par transformée unitaire.

1.1 - Transformations unitaires

Soit un signal constitué de n échantillons réels :

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$$

Relativement à la norme euclidienne

$$\|\vec{X}\|^2 = E \langle \sum x_i^2 \rangle, \text{ on peut définir}$$

des transformations linéaires qui respectent cette norme. Ainsi, si le signal X est entaché d'une erreur e , le signal transformé $Y = f(X)$ a une erreur $f(e)$ de même norme. Autrement dit, une erreur sur le coefficient i a le même poids qu'une erreur sur un autre coefficient. D'autre part, pour certaines transformées (comme la transformée de Karhunen Loeve idéale, ou la transformée Cosinus), la décroissance des coefficients avec le rang est très rapide. Très peu de bits sont donc nécessaires au codage des derniers coefficients.

1.2 - Codage optimal de la transformée

1.2.1 - Allocation des bits

Si B est le nombre total de bits alloués au codage de tous les coefficients, la répartition optimale des bits est :

$$(1) b_i = \frac{B}{n} + \frac{1}{2} \log_2 \sigma_i^2 - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \log_2 \sigma_j^2$$

où b_i est le nombre de bits attribués au coefficient i

et n le nombre total de bits, en supposant que tous les coefficients ont même loi et pour variances : $\sigma_i^2 < 1$. b_i n'est pas nécessairement entier.

L'hypothèse que tous les coefficients ont même loi n'est pas très restrictive. En effet,

- si tous les x_i ont même loi et sont indépendants, alors les y_i tendent vers une loi gaussienne (convergence en loi),
- expérimentalement sur des images de télédétection et avec les transformées usuelles (cosinus, Hadamard), la loi de Laplace convient assez bien aux coefficients autres que le premier.

Soit $m_i = 2^{b_i}$ le nombre de niveaux de quantification. Il vaut mieux imposer que m_i soit entier plutôt que b_i . La figure 1 illustre l'écart par rapport à la courbe optimale en approchant respectivement m_i et b_i par leurs valeurs entières dans un cas particulier.

Cette distribution minimise l'erreur de reconstruction due à la quantification. Ceci est immédiat dans le cas d'une quantification uniforme.

1.2.2 - Placement des niveaux de quantification

Le quantificateur de Lloyd-Max répartit les niveaux de quantification de façon optimale au sens de l'erreur de reconstruction :

$$\xi^2 = \int |x - q(x)|^2 p(x) dx$$

où $q(x)$ est la valeur quantifiée de x et $p(x)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire x .

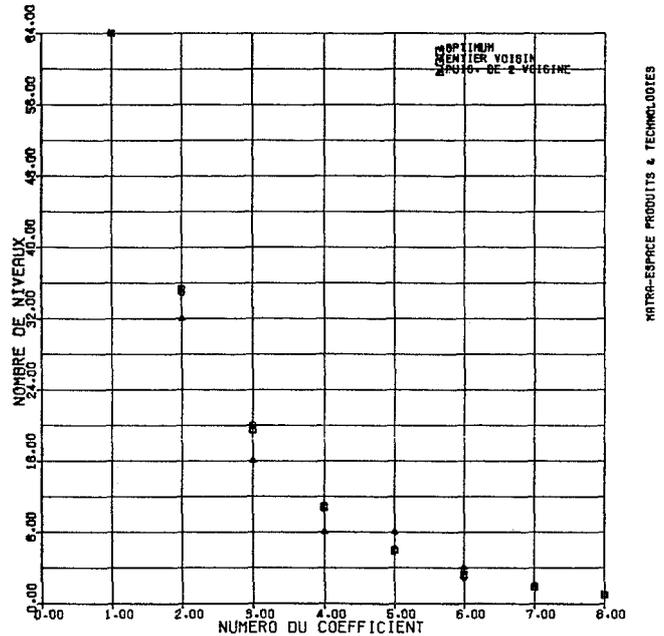


Figure 1 - Nombre de niveaux de quantification

Ce quantificateur est utilisé de deux façons :

- soit on évalue la densité de probabilité par l'histogramme. La recherche des niveaux optimaux peut être faite par un algorithme de clustering (<3>). Si le minimum obtenu est un maximum global, l'algorithme converge vers le quantificateur de Max.
- soit on ajuste un modèle paramétrique à la loi de x (par exemple un loi de Laplace de paramètre σ .) On dispose alors d'un quantificateur tabulé.

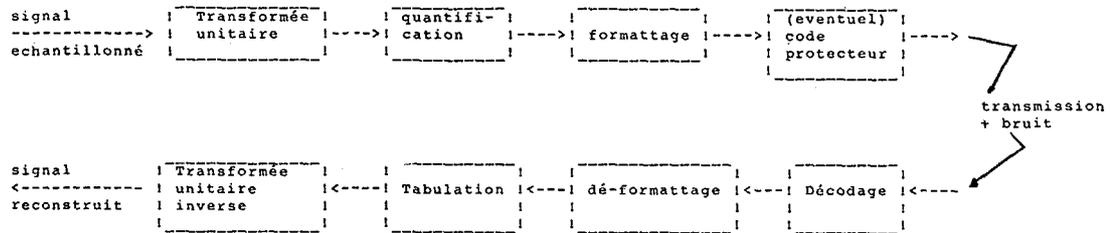
Dans la suite, par souci de simplification, on emploie une quantification uniforme sur l'intervalle $(-k\sigma, k\sigma)$. Dans le cas de signaux uniformes codés avec un quantificateur uniforme optimal, les niveaux sont régulièrement espacés entre le minimum et le maximum. L'erreur de quantification peut être alors assimilée à un bruit blanc, pourvu que le signal d'entrée varie de plus d'un pas de quantification entre deux instants successifs.

1.2.3 - Bruit de transmission

Le bruit de transmission dépend du canal de transmission et du type de modulation. Dans la suite de l'exposé, nous supposons que les erreurs sur chaque bit sont indépendantes et peuvent se produire avec la probabilité p . On ne considère donc pas le cas d'erreurs arrivant par rafales.

2 - PRINCIPE DU CODAGE ET EFFET DU BRUIT

2.1 - Schéma de la chaîne de transmission



2.2 - Critère et contraintes

Le canal de transmission limite le débit à Q bits/s. La compression doit permettre de transmettre le signal avec ce débit et avec la meilleure qualité possible.

Le critère de qualité peut être, par exemple, l'erreur quadratique moyenne de reconstruction. Des critères subjectifs de qualité sont également utilisés (par exemple, le nombre de blocs faux).

Les erreurs sont introduites lors de la quantification et lors de la transmission. Pour limiter l'effet du bruit de transmission, on peut avoir recours à des codes protecteurs d'erreur.

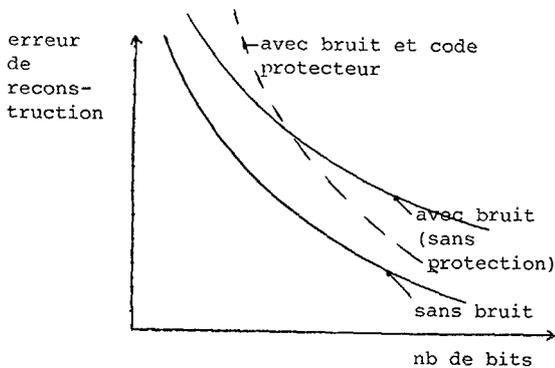


Fig. 2 - Allocation des bits au code protecteur

On obtient expérimentalement (ou analytiquement sur des modèles simplifiés) la courbe du nombre de bits en fonction de l'erreur de reconstruction R(D). Lorsque le nombre total de bits est suffisant, il est préférable d'en allouer une partie au code protecteur (fig.2).

2.3 - Principe du codage vectoriel

Les coefficients successifs x_i , sont codés comme des valeurs entières y_i telles que $0 \leq y_i < m_i$. Le regroupement des mots (y_1, \dots, y_n) sur un seul mot peut s'écrire :

$$Y = y_1 + m_1 (y_2 + m_2 (\dots (y_{n-1} + m_{n-1} y_n)))$$

La reconstruction consiste à prendre les restes successifs module m_i . n! choix de l'ordre des coefficients sont possibles. Le meilleur choix est celui qui minimise l'effet du bruit.

En pratique, on ne regroupe pas tous les mots ensemble mais en plusieurs sous-mots de 16 bits ou moins.

2.4 - Amplification du bruit par le codage vectoriel

L'erreur due au bruit se traduit par l'altération d'un bit du mot total. (Le cas de plus d'une erreur est peu probable). Suivant la position du bit un certain nombre de coefficients sont modifiés. L'influence de l'erreur dépend beaucoup des valeurs des m_i et du choix de l'ordre.

En effet, une erreur sur un seul bit entache généralement plusieurs coefficients. Un découplage a lieu si des m_i sont des puissances de 2.

On a pu constater expérimentalement qu'il vaudrait mieux prendre les coefficients dans l'ordre croissant des m_i .

Suivant la nature du bruit (par bouffées ou erreurs indépendantes) et la nature du codage du signal, on peut utiliser une grande variété de codes correcteurs d'erreurs.

Le taux d'erreurs de bits peut alors tomber de la valeur p à une valeur beaucoup plus faible. Mais dans ce cas les erreurs ne sont plus indépendantes.

Dans la suite de l'analyse, on supposera encore que les erreurs sur chaque bit sont indépendantes. Cette hypothèse permet de découpler complètement le problème de la quantification de celui du code correcteur d'erreur.

2.5 - Exemple

2.5.1 - Calcul de l'erreur quadratique

L'erreur quadratique totale se décompose en une erreur de quantification ξ_q et une erreur due au canal de transmission ξ_a . Un calcul théorique est possible si certaines hypothèses simplificatrices sont faites.

a) chaque coefficient x_i prend ses valeurs sur l'intervalle $[k\sigma_i, +k\sigma_i]$ et suit une loi uniforme. Dans ce cas l'erreur quadratique de quantification est pour ce coefficient :

$$(2) \quad \xi_q^2 = \left(\frac{2k\sigma_i}{m_i} \right)^2$$

La référence <6> indique ce que serait l'erreur de quantification pour une variable gaussienne dans le cas où m est une puissance de 2.



b) L'erreur due au bruit est plus complexe à calculer du fait du partage des bits entre les coefficients. Si chaque coefficient était codé sur un nombre entier de bits b_i l'erreur quadratique serait sur le coefficient i

$$\epsilon_a^2 = E(x)^2 = \sum_{x=-m/2}^{m/2} \left(\frac{2k\sigma x}{m} \right)^2 p(x)$$

où $p(x)$ est la probabilité que le mot d'erreur x apparaisse.

Si les probabilités d'erreur sur chaque bit sont indépendantes et égales à p , on a

$$p(x) = p^k \cdot (1-p)^{b-k} \quad \text{où } k \text{ est le nombre de bits à 1 du mot } x \text{ de longueur } b.$$

Pour les faibles taux d'erreurs et un petit nombre de bits, un calcul au premier ordre en p (un seul bit erroné) suffit :

$$\epsilon_a^2 = \left(\frac{2k\sigma}{m} \right)^2 \sum_{j=0}^{b-1} (2^j)^2 \cdot p$$

$$\epsilon_a^2 = \left(\frac{2k\sigma}{m} \right)^2 p \frac{4^b - 1}{3}$$

ou, si l'on remplace 2^b par m

$$(3) \quad \epsilon_a^2 = (2k)^2 \frac{p}{3}$$

indépendante du nombre de niveaux de quantification. L'erreur totale s'écrit alors :

$$\epsilon^2 = \epsilon_a^2 + \epsilon_q^2 = \sum \left(\frac{p}{3} + \frac{1}{2} \right) (2k\sigma_i)^2$$

Si l'on suppose que les niveaux sont répartis de façon optimale, on a :

$$m_i = 2^{B/n} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2}} \quad \text{où } B \text{ est le nombre total de bits}$$

et l'erreur de quantification est la même pour chaque coefficient

$$d'où \quad \epsilon^2 = n \left(\frac{2k}{2^{B/n}} \right)^2 \left(\prod_i \sigma_i \right)^2 + \frac{p}{3} E^2$$

où $E^2 = \sum (2k\sigma_i)^2$ est l'énergie totale du signal.

c) Si les bits sont partagés entre plusieurs coefficients, l'analyse théorique devient impraticable sans des hypothèses simplificatrices :

Nous faisons l'hypothèse, approximativement vérifiée expérimentalement (voir table 1) que lorsque plusieurs coefficients "partagent" un mot, une erreur sur un seul bit de ce mot modifie tous les coefficients et que la variance de l'erreur sur chaque coefficient vérifie.

$$(3') \quad \epsilon_a^2 = (2k\sigma)^2 \cdot \frac{n \cdot p}{3}$$

où n est le nombre de coefficient qui partagent un même mot. L'erreur due au bruit est donc amplifiée par un facteur n .

Le rapport entre l'erreur due au bruit et l'erreur de quantification est

$$\left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_q} \right)^2 = \frac{p}{3} \sum m_i^2$$

Avec $p = 10^{-5}$ et les coefficients m_i de la table 1,

on a $\left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_q} \right)^2 = 5.3 \cdot 10^{-3}$ au lieu de $1.3 \cdot 10^{-3}$

En réalité, la pénalité est un peu moins forte que le facteur n .

4 coefficients $m_1 = 19, m_2 = 11, m_3 = 6, m_4 = 3$					
Ordre des coefficients	pourcentage d'erreur sur le mot				erreur quadratique
	1	2	3	4	
DIRECT (m_1, m_2, m_3, m_4)	100	72	43	21	12.5
m_4, m_3, m_2, m_1	44	72	83	100	9.75

Table 1 - Influence du partage des bits entre plusieurs coefficients.

2.5.2 - Sensibilité au choix des niveaux de quantification

L'avantage dû au choix des valeurs optimales m_i au lieu des puissances de 2 voisines peut être évalué sur l'exemple considéré.

Choisissons les valeurs approchées

$$m'_1 = 16, m'_2 = 16, m'_3 = 8, m'_4 = 2$$

Le nombre total de bit B reste égal à 12.

L'erreur de quantification vaut :

$$\epsilon_q^2 = \sum \left(\frac{2k\sigma_i}{m'_i} \right)^2 = \frac{\epsilon_a^2}{n} \cdot \sum \left(\frac{m_i}{m'_i} \right)^2$$

L'erreur due au bruit vaut

$$\epsilon_a^2 = \frac{p}{3} \sum (2k\sigma_i)^2 = \frac{p}{3} \frac{\epsilon_a^2}{n} \sum m_i^2$$

Dans le cas particulier considéré on a :

$$\epsilon_q^2 = \epsilon_a^2 \times 1.026 \quad \text{très peu modifié}$$

$$\epsilon_a^2 = \epsilon_q^2 \times 0.0013 \quad \text{divisée par 4}$$

Dans cet exemple le bilan est globalement en faveur du codage vectoriel si $p=10^{-5}$, alors que l'avantage est au codage scalaire dès que p dépasse $6.5 \cdot 10^{-5}$.

3 - SIMULATIONS DU CODAGE VECTORIEL SUR DES IMAGES REELLES

Des simulations ont été effectuées sur une image de télédétection AUTEUIL (simulation SPOTIMAGES) au pas de 10 mètres de format 256x256. La transformation unitaire est une transformation Cosinus sur des blocs 8x8. Quatre classes d'activité permettent de définir quatre cartes de niveaux de quantification (cf réf. <5>). L'écart-typo de l'image choisie est de 19.7 niveaux radiométriques. Sur cette image, il apparaît (figure 3) que le codage vectoriel est globalement meilleur que le codage scalaire. Le gain en dB est pratiquement indépendant du rapport de compression (0.23dB).

Les photographies représentent respectivement :

- l'image originale
- l'image codée à 2.5 bits par point pour les deux modes de codage vectoriel et scalaire,
- la différence (normalisée) de l'image comprimée avec l'image originale pour les deux modes de codage,
- l'image codée avec un taux d'erreur de bits de 10^{-4} (bruit de transmission) pour les deux modes de codage.

La qualité de reconstruction est représentée par le tableau 2.

Pour le taux d'erreur de 10^{-4} , le codage vectoriel est pratiquement équivalent au codage scalaire.

	Codage vectoriel	Codage scalaire
Sans bruit	16.09 dB (2.50)	15.86 dB (3.09)
avec bruit	15.27 dB (3.40)	15.19 dB (3.43)

Table 2 : qualité de reconstruction en dB (et en radiométries)

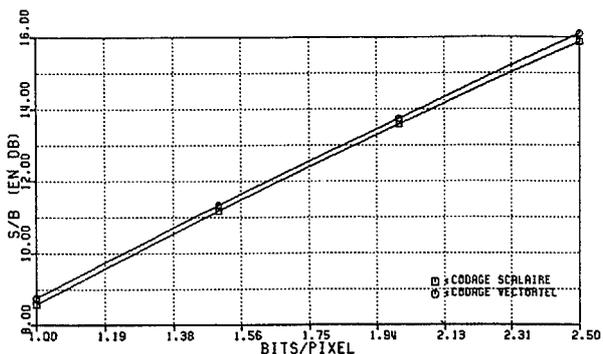


fig.3 Rapport signal/bruit en fonction du nombre de bits par pixel pour les deux stratégies de codage (vectoriel et scalaire).

4 - CONCLUSIONS

La quantification sur un nombre de niveaux non puissance de deux permet d'améliorer l'efficacité de la compression des images par transformation unitaire. Cette amélioration est sensible pour les faibles valeurs du taux d'erreurs de bits en transmission. Pour les fortes valeurs de ce taux d'erreur, il est préférable de coder chaque coefficient sur un nombre entier de bits.

Ces conclusions sont valables tant que le critère de qualité d'image est l'erreur de reconstruction. Si le critère est le nombre de blocs perdus, la quantification sur nombre non entier de bits est optimale dans tous les cas (codage vectoriel).

REFERENCES :

- <1> A. ROSENFELD, A.C. KAK, Digital picture processing Academic press, 1982
- <2> J.J. HUANG, P.M. SCHULTHEISS Block quantization of correlated gaussian random variables. IEEE Transactions on Communication Systems, September 1963
- <3> G.E. LOWITZ, P. CASSAGNE CLADYN, a new compressor for numerical TV and multispectral images, Pattern Recognition, Vol.17 number 5, 1984
- <4> A.K. JAIN Image data compression Proc. IEEE, Vol 69, number 3, 1981
- <5> S. MULLER, Etude comparative de plusieurs algorithmes adaptatifs de compression d'image par transformations unitaires. GRETSI 1985
- <6> D.R. COMSTOCK, J.D. GIBSON Hamming coding of DCT-compressed Images over Noisy channels IEEE Transactions on Communications, vol COM-32, number 7, July 1984





CODAGE VECTORIEL POUR LA COMPRESSION PAR TRANSFORMATION UNITAIRE

