

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

955



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

RESTITUTION D'ATTITUDE A PARTIR D'OBSERVATIONS RADAR\*

Yvon LABASQUE et Anne TOMATIS

Société d'Etudes et Conseils AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

---

## RESUME

Nous considérons un corps axisymétrique se déplaçant sur une trajectoire balistique et mis en roulis.

S'il existe une vitesse de tangage-lacet non nulle au moment de la mise en roulis, l'axe longitudinal du véhicule décrit un cône dont l'axe est le moment cinétique (mouvement précessionnant).

Le but de cette étude est d'identifier ce mouvement par l'examen de mesures radar durant une période de précession.

On considère plusieurs types de radars. La matrice de rétrodiffusion est soit parfaitement connue, soit complètement inconnue.

Les paramètres décrivant le mouvement sont identifiés en minimisant l'écart quadratique entre les mesures réelles (bruitées) et les mesures calculées à partir de paramètres donnés.

Pour un engin conique, les simulations montrent que même dans des conditions défavorables (rapport signal à bruit de 15 dB ou même matrice de rétrodiffusion inconnue) les paramètres du mouvement sont généralement estimés avec une bonne précision.

## SUMMARY

We consider an axisymmetrical body moving on a ballistic trajectory, that is spun about its longitudinal axis.

Then, if a pitch and/or yaw rate is experienced when spin is introduced the vehicle's longitudinal axis traces a cone whose centerline is the angular momentum vector (precessioning motion).

The purpose of this study is identifying this motion by examining radar's measures during a precession period.

Several radar types are under consideration. The scattering matrix is either perfectly known, or completely unknown.

Parameters describing the motion are identified by minimizing the quadratic difference between real measures (with noise) and computed measures for given parameters.

For a conical body, simulations show that even in unfavorable conditions (signal to noise rate of about 15 dB, or even unknown scattering matrix), the motion parameters are generally estimated with a good accuracy.

\* Travaux effectués sous contrat AEROSPATIALE



Le problème posé est celui de la restitution à partir d'observations radar de l'attitude d'objets balistiques en mouvement hors atmosphère. Nous ne considérons ici que des corps axisymétriques, bien que l'extension de la méthode à des corps quelconques soit envisageable.

1.- MOUVEMENT D'UN CORPS BALISTIQUE DANS LE VIDE

1.1 Mouvement du centre de gravité

Le corps décrit une ellipse dont le centre de la terre est un foyer (fig. 1). Elle est entièrement déterminée par la "vitesse"  $V_0$  et la "pente"  $\gamma_0$  au point d'injection vues du référentiel terrestre.  $V_0$  et  $\gamma_0$  sont calculées à partir des vitesse et pente locales et de la rotation terrestre.

La trajectoire est de la forme :

$$r = \frac{V_0^2 \cos^2 \gamma_0}{1 - k \cos \theta} \text{ avec } \begin{cases} \kappa = \frac{r}{r_0} \text{ et } V_0^2 = \frac{V_0^2}{g_0 r_0} \\ k = \sqrt{1 - V_0^2 (2 - V_0^2) \cos^2 \gamma_0} \end{cases}$$

1.2 Mouvement autour du centre de gravité

Ecrivons la loi fondamentale de la dynamique en G :

$$\vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

où :

$\begin{cases} \vec{M}_{ext} \text{ est la somme des moments appliqués} \\ \vec{H} \text{ est le moment cinétique} \end{cases}$

or :

$$\vec{H} = \Pi(\vec{\omega})$$

où :

$\begin{cases} \Pi \text{ est le tenseur d'inertie} \\ \vec{\omega} \text{ est la vitesse de rotation instantanée} \end{cases}$

Dans le vide  $\vec{M}_{ext} = \vec{0}$

Dans les axes principaux de l'engin :

$$\Pi = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{\omega} = (p, q, r)$ , quand on met le corps en roulis  $p_0$ , on obtient, en intégrant les équations, un mouvement conique précessionnant autour de  $\vec{H}$  ("cône de POINSOT") à une vitesse angulaire constante  $\omega_r = p_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)$

L'angle de demi-ouverture du cône est  $\epsilon$ , vérifiant :

$$\tan \epsilon = \frac{\sqrt{q_0^2 + r_0^2}}{p_0} \times \frac{I_2}{I_1}$$

si  $q_0$  et  $r_0$  sont les valeurs de  $q$  et  $r$  lors de la mise en roulis.

2.- MESURES RADAR

2.1 Trajet aller-retour de l'onde radar (fig. 2)

Soit :

- $\vec{\beta}$  la direction de propagation de l'onde,
- $\vec{\kappa}_1$  la direction de polarisation verticale du radar,
- $\vec{\kappa}_2$  la direction de polarisation horizontale du radar,
- $\vec{c}_1$  la direction de polarisation parallèle par rapport à la cible,
- $\vec{c}_2$  la direction de polarisation perpendiculaire.

Lors de la traversée de l'ionosphère l'onde incidente tourne autour de la direction de propagation  $\vec{\beta}$  d'un angle  $F$  correspondant à la rotation FARADAY.

Ainsi :

$$\begin{cases} (\vec{\kappa}_1, \vec{\beta}) \xrightarrow{R_F} (\vec{\kappa}_1, \vec{\beta}) \\ (\vec{\kappa}_2, \vec{\beta}) \xrightarrow{R_F} (\vec{\kappa}_2, \vec{\beta}) \end{cases}$$

En particulier, si  $\vec{X}$  est la direction de polarisation de l'onde émise au niveau du radar exprimée dans le repère  $(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\beta})$ , elle devient à la sortie de l'ionosphère  $\vec{X}'$  vérifiant dans le même repère :

$$\vec{X}' = R_F \vec{X}$$

En arrivant sur la cible, le plan  $(\vec{\kappa}_1, \vec{\beta})$  fait un angle  $\alpha$  avec le plan  $(\vec{c}_1, \vec{\beta})$  appelé "angle de dépolarisation". Dans le repère  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{\beta})$ , la direction de l'onde incidente est donc représentée par  $\vec{X}''$  lié à  $\vec{X}'$  par la relation :

$$\vec{X}'' = R_\alpha \vec{X}'$$

Dans le même repère,  $\vec{X}''$  est réfléchi en  $\vec{Y}''$ , fonction uniquement de l'angle d'incidence  $l$  entre l'axe du corps et la direction de propagation  $\vec{\beta}$  :

$$\vec{Y}'' = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{//}(l)} e^{i\phi_{//}(l)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{\perp}(l)} e^{i\phi_{\perp}(l)} \end{pmatrix} \vec{X}'' = A \vec{X}''$$

$A$  est la matrice de rétrodiffusion, que nous appellerons "MRD".

L'onde réfléchie exprimée dans le repère  $(\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\beta})$  a pour direction  $\vec{Y}'$  liée à  $\vec{Y}''$  par :

$$\vec{Y}' = R_{-\alpha} \vec{Y}''$$

L'onde traverse à nouveau l'ionosphère et subit la rotation de FARADAY. A la sortie de l'ionosphère, elle a la direction  $\vec{Y}$  liée à  $\vec{Y}'$  par la relation :

$$\vec{Y} = R_F \vec{Y}'$$



RESTITUTION D'ATTITUDE A PARTIR D'OBSERVATIONS RADAR

Compte tenu de la dispersion et de la variation de phase de l'onde, si  $d$  est la distance cible-radar et  $\lambda$  la longueur d'onde, l'onde émise  $\vec{x}$  (de direction  $\vec{X}$ ) et l'onde reçue  $\vec{y}$  (de direction  $\vec{Y}$ ) sont liées par :

$$\vec{y} = \frac{e^{-j \frac{4\pi d}{\lambda}}}{d^2} R_{F-\alpha} A(i) R_{F+\alpha} \vec{x}$$

2.2 Mesures radar

Appelons :

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_0 &= \text{la différence entre la phase de l'onde émise mesurée par rapport à la phase de référence radar à l'instant d'émission et celle de l'onde reçue mesurée par rapport à la phase de référence à l'instant de réception.} \\ \beta &= \sqrt{\sigma_{||}} e^{j\phi_{||}} \\ \gamma &= \sqrt{\sigma_{\perp}} e^{j\phi_{\perp}} \end{aligned} \right.$$

Si le radar émet en polarisation horizontale :  $\vec{X} = (1, 0)$ , les mesures faites sur les deux voies de polarisation, corrigées de l'atténuation sont :

Voie horizontale :  $M_1 = \left[ \cos 2F \cdot \frac{\beta + \gamma}{2} (i) + \cos 2\alpha \cdot \frac{\beta - \gamma}{2} (i) \right] e^{-j\phi_0}$

Voie verticale :  $M_2 = \left[ \sin 2F \cdot \frac{\beta + \gamma}{2} (i) - \sin 2\alpha \cdot \frac{\beta - \gamma}{2} (i) \right] e^{-j\phi_0}$

Si le radar émet en polarisation verticale :  $\vec{X} = (0, 1)$ , on obtient de même :

Voie horizontale :  $M_3 = \left[ -\sin 2F \cdot \frac{\beta + \gamma}{2} (i) - \sin 2\alpha \cdot \frac{\beta - \gamma}{2} (i) \right] e^{-j\phi_0}$

Voie verticale :  $M_4 = \left[ \cos 2F \cdot \frac{\beta + \gamma}{2} (i) - \cos 2\alpha \cdot \frac{\beta - \gamma}{2} (i) \right] e^{-j\phi_0}$

2.3 Paramètres de base intervenant

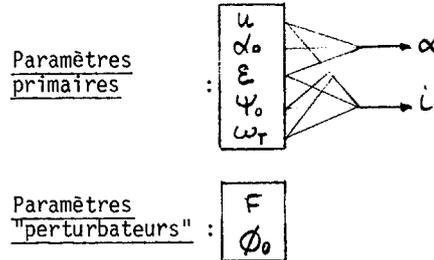
$i$  et  $\alpha$  dépendent de la position du corps sur le cône de POINSOT.

L'évolution temporelle de  $i$  et de  $\alpha$  a une allure différente selon que l'axe de visée radar est extérieur ou intérieur au cône (fig. 3 et 4).

Si  $u$  représente l'incidence entre l'axe du cône et l'axe de visée radar,  $\alpha_0$  l'angle dièdre entre le plan de visée radar contenant l'axe du corps et le plan de polarisation verticale au niveau du corps,  $\Psi$  la phase repérant la position du corps sur le cône, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos i &= \cos u \cos E - \sin u \sin E \cos \Psi \\ \cos(\alpha - \alpha_0) &= \frac{\sin u \cos E + \cos u \sin E \cos \Psi}{\sin i} \\ \sin(\alpha - \alpha_0) &= \frac{\sin E \sin \Psi}{\sin i} \\ \Psi &= \omega_T t + \Psi_0 \end{aligned} \right.$$

Les paramètres de base intervenant dans une mesure radar sont donc :



3. - RESTITUTION DES PARAMETRES DEFINISSANT L'ATTITUDE A PARTIR D'UN TRAIN DE MESURES RADAR

Il faut donc déterminer tous les paramètres de base.

On peut dire que :

- $\omega_T$  est connue (mesurée par ailleurs),
- $\phi_0$  est inconnue (la phase de l'oscillateur fluctue, de plus on suppose que  $d$  est mesurée avec une trop mauvaise précision relativement à  $\lambda$ ),
- $F$  est parfois connue, ce avec une précision très variable, nous le considérerons cependant comme inconnu,
- la MRD est parfaitement connue ou totalement inconnue selon les hypothèses.

3.1 Observabilité des paramètres primaires

On considère trois cas de calcul selon la connaissance de la MRD et le type de radar ( $R_1$ : émissions quasi simultanée suivant la polarisation horizontale et la polarisation verticale -  $R_2$ : émission uniquement suivant la polarisation verticale) :

- $R_1$ , MRD connue

On considère qu'entre les deux émissions  $\phi_0$  n'a pas évolué.

Pour  $n$  instants d'émission, on a :

- $8n$  mesures réelles (correspondant aux  $4n$  mesures complexes  $M_{1j}, M_{2j}, M_{3j}, M_{4j}$ ).
- $u, \alpha_0, E, \Psi_0, F, n$  valeurs de  $\phi_0$  inconnues, soit  $n + 5$  inconnues.

Les paramètres sont donc identifiables dès le premier instant de mesure.

- $R_2$ , MRD connue

On a de même :

- $4n$  mesures réelles (correspondant aux  $2n$  mesures complexes  $M_{3j}, M_{4j}$ ).
- $u, \alpha_0, E, \Psi_0, F, n$  valeurs de  $\phi_0$  inconnues, soit  $n + 5$  inconnues.

Les paramètres sont identifiables dès le second instant de mesure.



- R<sub>2</sub>, MRD inconnue

On a :

- 8n mesures réelles (M<sub>1j</sub>, M<sub>2j</sub>, M<sub>3j</sub>, M<sub>4j</sub>).
- $\mu, \alpha_0, \varepsilon, \psi_0, F$ , n valeurs complexes de  $\beta e^{-i\psi_0}$  et n valeurs complexes de  $\gamma e^{-i\psi_0}$  soit 4n + 5 inconnues

Les paramètres sont identifiables dès le second instant de mesure.

3.2 Identification des paramètres dans le cas de mesures bruitées

Soit  $\sigma_B$  l'écart type du bruit sur les parties réelles et imaginaires des mesures.

L'écart quadratique moyen sur n instants entre les mesures réelles bruitées M<sub>kj</sub> et les "mesures restituées"  $\widehat{M}_{kj}$  pour un jeu de paramètres donnés est :

$$EQM = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1 \text{ ou } 3}^4 (M_{kj} - \widehat{M}_{kj}) \overline{(M_{kj} - \widehat{M}_{kj})}$$

Alors pour le jeu de paramètres exacts, on a :

$$E(EQM) = \begin{cases} 8n \sigma_B^2 & \text{pour } R_1 \\ 4n \sigma_B^2 & \text{pour } R_2 \end{cases}$$

Les paramètres exacts correspondent à l'EQM minimum.

- Identifications immédiates et ambiguïtés

• R<sub>1</sub>, MRD connue

Estimation bruitée de F à chaque instant de mesure.

Estimation initiale fine par :

$$\tan 2\widehat{F} = \mathcal{R} \left( \frac{\sum_{j=1}^n (M_{2j} - M_{3j})}{\sum_{j=1}^n (M_{1j} + M_{4j})} \right)$$

Pour un jeu de paramètres donnés on obtient :

$$\widehat{M}_{kj} = \widehat{A}_{kj} e^{-i\widehat{\psi}_{0j}}$$

La valeur de  $\widehat{\psi}_{0j}$  optimale vérifie :

$$e^{-i\widehat{\psi}_{0j}} = \frac{\sum_{k=1}^4 \widehat{A}_{kj} M_{kj}}{\left| \sum_{k=1}^4 \widehat{A}_{kj} M_{kj} \right|}$$

$$\text{Donc } EQM = f(\mu, \alpha_0, \varepsilon, \psi_0, F)$$

Si  $\widehat{F}_0$  et  $\widehat{\alpha}_{j_0}$  sont obtenus, sont également solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{F}_0 + \pi \\ \widehat{\alpha}_j = \widehat{\alpha}_{j_0} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{F}_0 + \frac{\pi}{2} \\ \widehat{\alpha}_j = \widehat{\alpha}_{j_0} + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

• R<sub>2</sub>, MRD connue

La valeur de  $\widehat{\psi}_{0j}$  optimale vérifie :

$$e^{-i\widehat{\psi}_{0j}} = \frac{\sum_{k=1}^4 \widehat{A}_{kj} M_{kj}}{\left| \sum_{k=1}^4 \widehat{A}_{kj} M_{kj} \right|}$$

$$\text{Donc } EQM = f(\mu, \alpha_0, \varepsilon, \psi_0, F)$$

On retrouve les mêmes ambiguïtés.

• R<sub>1</sub>, MRD inconnue

Pour un jeu de paramètres donnés la valeur optimale de  $\beta e^{-i\psi_0}$  et de  $\gamma e^{-i\psi_0}$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\beta + \gamma}{2} e^{-i\psi_0} = \cos 2\widehat{F} (M_{1j} + M_{4j}) + \sin 2\widehat{F} (M_{2j} - M_{3j}) \\ \frac{\beta - \gamma}{2} e^{-i\psi_0} = \cos 2\widehat{\alpha}_j (M_{1j} - M_{4j}) - \sin 2\widehat{\alpha}_j (M_{2j} + M_{3j}) \end{cases}$$

La formule obtenue pour EQM permet d'obtenir la valeur optimale de F, c'est-à-dire celle qui minimise EQM. Elle ne dépend que des mesures et est donc exprimable analytiquement indépendamment du jeu de paramètres permettant d'estimer  $\beta e^{-i\psi_0}$  et  $\gamma e^{-i\psi_0}$ . Elle est donnée par la formule :

$$\tan 4\widehat{F}_0 = \frac{-\sum_{j=1}^n (|M_{1j} + M_{4j}|^2 - |M_{2j} - M_{3j}|^2)}{-2 \sum_{j=1}^n \mathcal{R}[(M_{1j} + M_{4j})(M_{2j} - M_{3j})]}$$

$$\text{Donc } EQM = f(\mu, \alpha_0, \varepsilon, \psi_0)$$

16 jeux de paramètres donnent le même EQM :

$$\begin{cases} \widehat{F} \equiv \widehat{F}_0 + \pi/2 \\ \widehat{\alpha}_j \equiv \widehat{\alpha}_{j_0} + \pi/2 \end{cases} \quad j=1, n$$

• Ambiguïtés sur les paramètres primaires

Les ambiguïtés sur  $\widehat{\alpha}_j$  se réduisent dans tous les cas à 4 ambiguïtés sur  $\widehat{\alpha}_0$ .

Les paramètres primaires optimaux sont donc les suivants :

$\mu, \alpha_0$	$\varepsilon, \psi_0$
$\mu, \alpha_0 + \pi/2$	$\varepsilon, \psi_0$
$\mu, \alpha_0 + \pi$	$\varepsilon, \psi_0$
$\mu, \alpha_0 + 3\pi/2$	$\varepsilon, \psi_0$

- Méthode de minimisation de EQM

Pour l'optimisation des paramètres restants, on applique la méthode des "directions conjuguées".

En effet, au voisinage du minimum, EQM est voisin d'une quadrique, les variables étant  $\mu, \alpha_0, \varepsilon, \psi_0$  et éventuellement F.

Pour une quadrique de m variables, en partant de n'importe quel point de la fonction et suivant n'importe quelle direction, on atteint le minimum en progressant suivant les directions conjuguées en au plus m itérations (fig. 5 pour m = 2).

L'algorithme progresse donc vers le minimum en recherchant les directions conjuguées.

RESTITUTION D'ATTITUDE A PARTIR D'OBSERVATIONS RADAR

4.- SIMULATIONS

4.1 Hypothèses

Le corps choisi est un cône d'ouverture 40°, de longueur 1,3 m. La fréquence radar est de 450 MHz. Les modules  $\sigma_{\parallel}$  et  $\sigma_{\perp}$  sont donnés fig. 6 en fonction de l'incidence (BEVENSEE (R.M.). A handbook of conical antennas & Scatters. Gordon & Breach, 1973, p. 155).

Les signaux radars sont mesurés sur une période de précession.

4.2 Algorithme

L'algorithme se divise en trois étapes : un premier tri, une optimisation poussée sur les cas sélectionnés et le calcul des ambiguïtés :

. Ce premier tri s'effectue à partir d'un maillage grossier de l'espace des paramètres correspondant à une seule ambiguïté :

- $\mu = 10-30-50^\circ$
- $\alpha_0 = 15-45-75^\circ$
- $\epsilon = 10-30-50^\circ$
- $\psi_0 = 0-90-180-270^\circ$

Si MRD connue :  $R_1 : F = F', F' + 90^\circ$   
 $R_2 : F = 0, 45, 90, 135^\circ$

On ne considère que 5 des  $n$  instants de mesures équirépartis sur une période de précession et on n'applique l'algorithme que sur  $2^{(m+1)}$  itérations. On conserve les 5 jeux de paramètres donnant les EQM les plus faibles.

. Application de l'algorithme sur les  $n$  instants de mesure, sur  $(m+1)^e$  itérations. On obtient le jeu de paramètres donnant le plus faible EQM.

. On calcule les ambiguïtés.

4.3 Résultats

Pour un cas de calcul :

$\mu = 26,8^\circ - \alpha_0 = 46,2^\circ - \epsilon = 15^\circ - \psi_0 = 280^\circ - F = 22^\circ$ , et des rapports signal sur bruit S/B donnés dans l'axe du corps, on obtient :

NOMBRE DE POLARISATIONS D'EMISSION	CONNAISSANCE DE LA MRD	S/B (dB)	$\mu$ (°)	$\alpha_0$ (°)	$\epsilon$ (°)	$\psi_0$ (°)	F (°)
2	oui	30	26,8	46,2	15,0	280,0	21,9
		15	26,7	46,1	15,1	280,0	21,6
1	oui	30	26,8	46,2	15,1	279,8	22,0
		15	26,5	46,1	15,4	278,7	21,8
2	non	30	26,4	46,2	14,8	280,3	22,0

Sur 8 cas de calcul, les erreurs obtenues sont les suivantes :

NOMBRE DE POLARISATIONS D'EMISSION	CONNAISSANCE DE LA MRD	S/B (dB)	ERREUR SUR $\mu$ (°)	ERREUR SUR $\alpha_0$ (°)	ERREUR SUR $\epsilon$ (°)	ERREUR SUR $\psi_0$ (°)	ERREUR SUR F (°)
2	oui	30	0,005-0,04	0-0,02	0,002-0,04	0,002-0,5	0,02-0,2
		15	0,01-0,2	0,01-0,15	0,08-0,3	0,004-3	0,004-0,9
1	oui	30	0,003-0,3	0,01-0,15	0,004-0,07	0,01-0,4	0,001-0,2
		15	0,01-1	0,02-0,8	0,02-0,5	0,06-2,5	0,002-1,3
2	non	30	0,4-19	0,001-0,03	0-24	0,02-0,2	0-0,1

Lorsque la matrice de rétrodiffusion est totalement inconnue, la restitution de certains paramètres peut être erronée ; une analyse plus fine montre cependant qu'un certain nombre de grandeurs continuent à être restituées avec précision ( $\alpha_0$  et  $\psi_0$  en particulier).

Dans les cas où la matrice de rétrodiffusion est connue la restitution d'attitude se fait avec une très bonne précision quel que soit le type de radar.

Nous tenons à remercier Monsieur l'ICA BENKHEIRI de la DEN, Messieurs PACE et ATTULY de l'AEROSPATIALE pour leur suivi attentif de ces travaux et Monsieur BERTHON d'AERO pour de judicieux conseils.

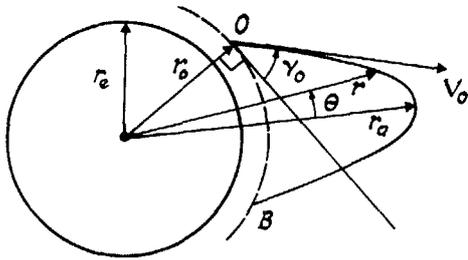


FIG. 1 : TRAJECTOIRE BALISTIQUE

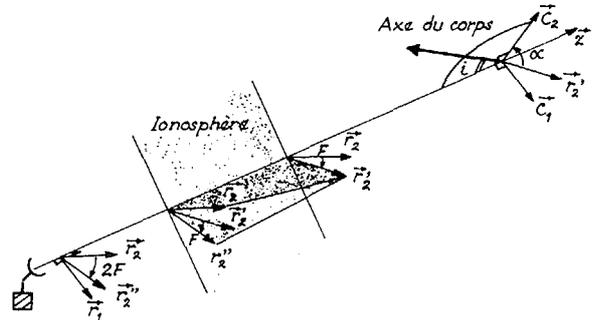


FIG. 2 : TRAJET ALLER-RETOUR DE L'ONDE RADAR

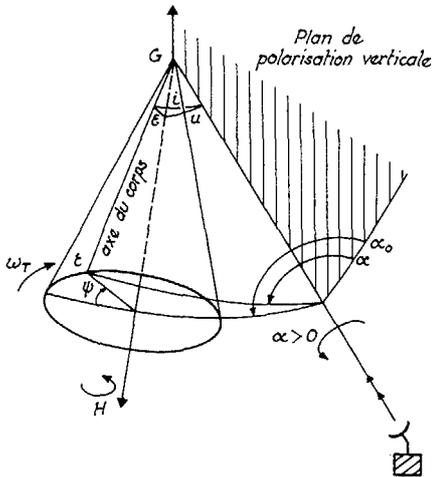


FIG. 3 : AXE DE VISEE RADAR EXTERIEUR AU CONE DE PRESSION

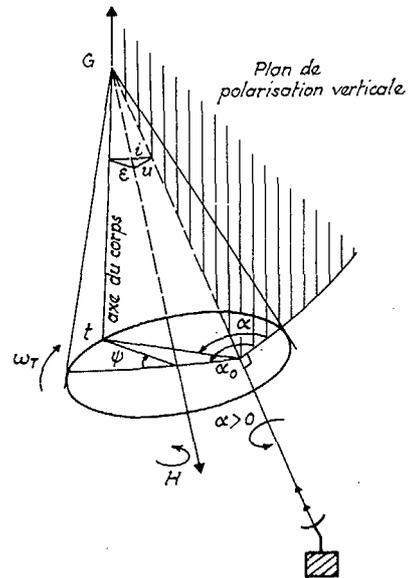


FIG. 4 : AXE DE VISEE RADAR INTERIEUR AU CONE DE PRESSION

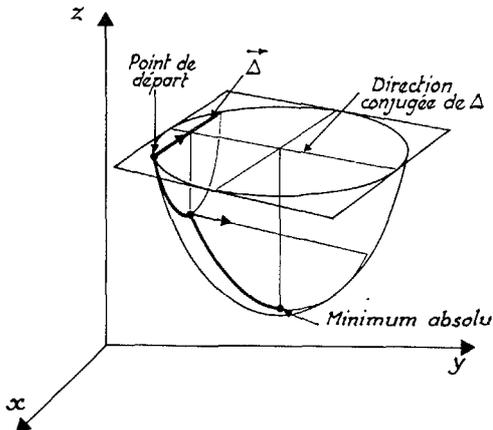


FIG. 5 : MINIMISATION SUIVANT L'ALGORITHME DES DIRECTIONS CONJUGUEES POUR UNE QUADRIQUE

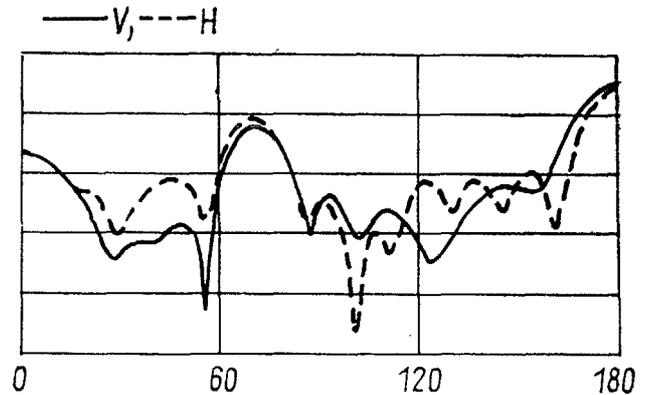


FIG. 6 : MODULES DES TERMES DIAGONAUX DE LA MATRICE DE RETRODIFFUSION EN FONCTION DE L'INCIDENCE