

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

## RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE

A DEUX DIMENSIONS.

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE). Plateau du Moulon. 91190 - Gif-sur-Yvette- FRANCE.

---

### RESUME

De nombreux problèmes de restauration d'image se traduisent par une équation de convolution bi-dimensionnelle. Pour résoudre ce problème mal posé, on se place dans un cadre statistique bayésien pour prendre en compte simultanément le bruit sur les observations et l'information a priori nécessaire à la stabilisation de la solution. Le filtre de Kalman standard qui permettrait de calculer récursivement l'estimée à variance minimale est impraticable ici en raison de la dimension de l'état. Cette difficulté est habituellement surmontée en introduisant un modèle dynamique de l'état au prix d'une hypothèse artificielle de semi-causalité. Nous proposons ici un modèle où l'état est constant et égal à la totalité de l'objet à restaurer, donc sans causalité, et où la dynamique n'apparaît que dans l'équation d'observation. Les propriétés de décalage de la convolution permettent alors de développer un algorithme optimal rapide par factorisation. Un filtre sous-optimal asymptotique à remise à jour réduite s'en déduit naturellement. Une conséquence importante de l'absence de causalité est que le résultat ne dépend pas du mode de balayage choisi, contrairement aux méthodes de filtrage de Kalman 2D existantes. Un exemple d'application de ces méthodes à la restauration d'images échographiques ultrasonores est présenté.

### SUMMARY

Many image restoration problems lead to solve a two-dimensional convolution equation. A bayesian framework is chosen here to deal with both noise and prior information required to stabilize the solution of this ill-posed problem. The usual Kalman filter, which provides the minimum variance estimate in a recursive manner, is untractable here because of the huge state dimension. To solve this difficulty, the state dimension is usually reduced by introducing dynamics, which needs an artificial causality assumption. To avoid this, we propose a state space model where the state is constant and equal to the entire object to be restored, and where dynamics appears in the observation equation only. The shifting properties of the convolution summation allows one to derive a fast Kalman algorithm through factorization techniques. A sub-optimal asymptotic filter with a reduced update naturally follows. The main advantage of our solution lies in the the independence of the result with respect to the scanning mode of the image. Finally, an example of a B-scan echographic image restoration is provided.



**RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE  
A DEUX DIMENSIONS.**

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

**INTRODUCTION.**

La restauration d'une image dégradée par un système linéaire et invariant par translation conduit à résoudre une équation de convolution bi-dimensionnelle (restauration d'une image optique bougée ou mal focalisée, amélioration de la résolution d'un système d'imagerie ultrasonore, etc...). Pour prendre en compte simultanément le bruit sur les observations et l'information a priori nécessaire à la stabilisation de la solution de ce problème mal posé, nous nous plaçons dans un cadre statistique bayésien. L'objet à restaurer et le bruit sont considérés comme des réalisations de deux processus aléatoires, et les deux premiers moments de leurs distributions constituent l'a priori. Nous voulons alors calculer la solution à variance minimale de ce problème d'estimation de manière récursive en raison de la dimension importante des applications envisagées (typiquement un objet 512,512 dégradé par une réponse impulsienne (RI) 64,64).

Cette démarche classique se trouve alors confrontée à la dimension de l'état dans le modèle directement issu de la discrétisation de l'équation de convolution. Celle-ci rend en effet impraticable un filtrage de Kalman standard. La technique habituelle [1],[2] consiste alors à réduire la dimension de l'état en introduisant une dynamique (modèle AR par exemple) au prix d'une hypothèse de semi-causalité choquante pour un processus 2D. Nous proposons ici de garder un modèle sans dynamique dans l'état, donc sans hypothèse de causalité, et d'utiliser explicitement les propriétés de décalage de la convolution pour obtenir un algorithme optimal rapide. A partir de là, une méthode sous-optimale utilisant les propriétés asymptotiques du vecteur gain est développée. Celle-ci fournit une solution satisfaisante en seul balayage de l'image tout en conservant la grande simplicité d'une méthode déterministe de régularisation précédemment développée [6],[7].

**POSITION DU PROBLEME.**

Soit  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  deux vecteurs représentant respectivement l'objet initial et l'image dégradée, construits par concaténation des valeurs échantillonnées des champs correspondant  $x(i,j)$  et  $y(m,n)$ . Ils sont reliés par une équation du type :

$$\underline{y} = H\underline{x} + \underline{b} \quad (1)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{y}^t &= [y(1,1), \dots, y(1,L'), \dots, y(L,M')] \\ \underline{x}^t &= [x(1,1), \dots, x(1,M'), \dots, x(M,M')] \\ \underline{b}^t &= [b(1,1), \dots, b(1,L'), \dots, b(L,L')] \end{aligned} \quad (2)$$

H est une matrice bloc dont la structure dépend de l'ordonnement des données et de l'information a priori sur les bords de l'image [7], et  $\underline{b}$  est un bruit blanc additif indépendant. Toutes les grandeurs sont définies dans C pour traiter sans perte d'information des problèmes mettant en jeu des phénomènes de propagation (imagerie microonde par exemple). On considère ici le cas d'un objet dont on observe seulement une portion. H est alors une matrice (LL',MM') bloc-circulante

dont la première ligne est définie par :

$$H : ( \tilde{H}_N \quad \dots \quad \tilde{H}_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ) \quad (3)$$

où chaque bloc  $\tilde{H}_j$  est une matrice (L',M') circulante dont la première ligne est définie par :

$$\tilde{H}_j : ( h(j,N') \quad \dots \quad h(j,1) \quad 0 \quad \dots \quad 0 ) \quad (4)$$

avec les relations sur les dimensions :

$$M = L + N - 1 \quad \text{et} \quad M' = L' + N' - 1 \quad (5)$$

Pour résoudre de manière stable ce problème mal posé,  $\{x_{i,j}\}$  et  $\{b_{i,j}\}$  sont supposés être deux réalisations de processus aléatoires normaux et indépendants définis par :

$$E\{\underline{x}\} = \underline{x}_0 \quad E\{(\underline{x}-\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0)^*\} = P_x \quad (6)$$

$$E\{\underline{b}\} = \underline{0} \quad E\{\underline{b}\underline{b}^*\} = R_{bb} \quad (7)$$

$$E\{\underline{b}\underline{x}^*\} = 0 \quad (8)$$

où  $\underline{x}^*$  est l'adjoint de  $\underline{x}$ .

On sait que l'obtention de la loi de probabilité a posteriori de  $\{x_{k,1}\}$  sachant  $\{y_{k,1}\}$  est alors un problème bien posé [8]. Mais pratiquement nous recherchons un estimateur ponctuel  $\hat{\underline{x}}$ . Son obtention à partir de la loi de probabilité a posteriori se fait sans difficulté dans le cas gaussien retenu. On choisit comme estimateur ponctuel l'estimateur linéaire à variance minimum, qui se confond ici avec les estimateurs à maximum a posteriori ou à maximum d'entropie.

L'estimée à variance minimale est donnée par :

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x}_0 + P_x H^* [HP_x H^* + R_{bb}]^{-1} [\underline{y} - H\underline{x}_0] \quad (9)$$

ou

$$\hat{\underline{x}} = [H^* R_{bb}^{-1} H + P_x^{-1}]^{-1} [H^* R_{bb}^{-1} \underline{y} + P_x^{-1} \underline{x}_0] \quad (10)$$

Les dimensions de  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  (de l'ordre de 16.000 pour une image 128,128) rendent impraticable l'inversion directe de la matrice de covariance des mesures dans (9) ou de la matrice d'information dans (10). Il s'agit donc de trouver une méthode efficace pour calculer  $\hat{\underline{x}}$ . Une solution classique consiste à effectuer le calcul récursivement avec un filtre de Kalman [1],[2-4],[9],[16].

**CHOIX D'UN MODELE D'ETAT.**

L'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$y_i = H_i \underline{x} + b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, MM' \quad (11)$$

où  $y_i$  est la i ème composante de  $\underline{y}$  et  $H_i$  la matrice (1,MM') formée par la i ème ligne de H. Il est immédiat d'en déduire les équations du filtre de Kalman dégénéré correspondant à un état constant  $\underline{x}$  et qui donnent l'estimé  $\hat{\underline{x}}_i$  sachant  $y_1, \dots, y_{i-1}$ . L'observation  $y_i$  étant scalaire, la covariance de l'innovation  $R_i^e$  est scalaire et le filtre ne demande pas d'inversion de ma-

**RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE  
A DEUX DIMENSIONS.**

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

trice. Cependant, il faut à chaque pas remettre à jour la matrice de covariance d'erreur de prédiction  $P_i$  dont les dimensions sont  $(MM', MM')$ , (soit de l'ordre de 16.000,16.000 pour une image 128,128). Pour résoudre cette difficulté, la démarche habituellement suivie consiste à mettre en cause exclusivement les dimensions de l'"état" et à les réduire en introduisant un modèle dynamique. Mais ceci repose presque toujours sur une hypothèse de causalité pour le champ scalaire et souvent même sur une hypothèse de séparabilité de la covariance comme le montre une rapide revue des très nombreuses méthodes développées depuis une dizaine d'années.

Un premier type d'approche repose sur les idées introduites par Nahi [9] et Silverman [10]. Pour restaurer une image seulement bruitée ( $H = I$ ), on se ramène à un processus monodimensionnel en ordonnant les  $y_{ij}$  dans l'ordre du balayage choisi. Il s'agit alors de trouver un système linéaire de dimension finie qui, excité par un bruit blanc, fournit une sortie de covariance donnée. Or ce problème de réalisation stochastique n'a pas de solution puisque, dans le cas général,  $P_x$  ne vérifie pas la condition nécessaire de séparabilité [9]. Différentes approximations peuvent alors être faites [1], mais l'optimalité est perdue dès le départ. De plus, le modèle markovien obtenu est causal :  $x_{mn}$  ne dépend que des  $x_{ij}$  situés dans un quadrant ou dans un demi-plan étendu. Les effets de cette causalité peuvent être éliminés par lissage avec 2 (ou 4) filtres de Kalman balayant l'image en sens inverses (et l'image transposée). L'extension de cette approche à la déconvolution (Aboutalib [11]) demande en plus de garder une mémoire suffisante pour pouvoir définir un état contenant tous les  $x_{ij}$  contribuant à la formation d'un point image donné.

A côté de ce type d'approche d'inspiration purement mono-dimensionnelle, des modèles bidimensionnels ont été développés à la suite de Habibi [12]. Le plus répandu est celui de Woods et Radewan [2-5], où le champ aléatoire est décrit par :

$$x_{mn} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=-K}^K a_{ij} x_{m-i, n-j} + \sum_{j=1}^K b_{0j} x_{m, n-j} + w_{mn} \quad (12)$$

Il s'agit donc d'un modèle semi-causal :  $x_{mn}$  ne dépend que du 1/2 plan supérieur étendu. Dans le cas d'une image uniquement bruitée :  $y_{mn} = x_{mn} + b_{mn}$ , Woods montre qu'il est possible d'estimer  $x$  de façon optimale en définissant un état global  $s$  de dimension  $K(M'+1)$  qui étend l'état défini en (12) à toute la largeur de l'image. On peut alors établir un modèle d'état monodimensionnel correspondant au processus ordonné suivant le mode de balayage. Ce modèle est non constant puisque qu'il faut tenir compte de l'initialisation en début de ligne. Willsky [1] propose une extension au cas  $H \neq I$  en introduisant un retard sur l'observation.  $s$  doit éventuellement être étendu pour contenir tous les  $x_{ij}$  contribuant à la formation de  $y_{mn}$ . Dans les deux cas, on obtient un filtre de Kalman de grande dimension pour lequel il n'est pas proposé d'algorithme rapide puisque le modèle n'est pas constant.

Enfin, il faut signaler l'approche de Mendel [13]

qui consiste à remplacer le modèle de convolution par une représentation minimale. Pour cela, le support du noyau est divisé en quatre quadrants. Dans chaque quadrant sont définis deux processus  $x^v$  vertical et  $x^h$  horizontal pour développer un modèle de Roesser causal, récursif et séparable [14]. Ceci nécessite que  $x^v$  (resp.  $x^h$ ) soit markovien direct dans la direction horizontale (resp. verticale), ce qui n'est vrai que dans le quadrant N.E. Il faut donc utiliser une technique de modélisation en variable d'état pour transformer dans les autres quadrants les processus rétrogrades en processus directs. Cette méthode, lourde à mettre en oeuvre, conduit à une réduction notable du volume des calculs lors de la restauration mais elle repose sur une hypothèse de blancheur de l'objet. De plus, le passage d'une représentation redondante telle que la convolution à une représentation minimale s'accompagne généralement d'une diminution de la stabilité.

L'hypothèse de causalité, difficilement justifiable pour un processus 2D, est une des difficultés classiques rencontrées lors de la transposition à deux dimensions d'outils mono-dimensionnels récursifs. Si les traitements non récursifs permettent d'utiliser des modèles dynamiques non causaux [15],[16], ils demandent de faire des approximations pour réduire un volume de calcul qui reste généralement très élevé.

L'idée suivie ici est donc la suivante. La stratégie choisie pour explorer une image ne dépend que de l'observateur. Il est donc naturel qu'elle ne conditionne que l'équation d'observation, et non l'équation d'état à travers une causalité artificielle. En revanche, l'exploitation explicite des propriétés de décalage de l'opérateur de convolution doit permettre le développement d'un algorithme rapide. Ceci conduit à choisir le modèle d'état suivant :

$$\underline{x}_i = \underline{x}_{i-1} = \underline{x} \quad (13)$$

$$y_i = H_i \underline{x} + b_i \quad (14)$$

$$H_i = H_{i-1} D_i \quad \text{et} \quad H_i D_i^t = H_{i-1} \quad (15)$$

où l'état  $\underline{x}$  est constant et égal à la totalité de l'objet à restaurer. (15) est introduit pour modéliser la non-constance de  $H_i$  et la matrice de transition d'observation  $D_i$  dépend du type de balayage d'image choisi. Il faut remarquer qu'il ne s'agit pas d'une simple permutation des rôles de  $H_i$  et de  $\underline{x}_i$  car, dans le cas général,  $D_i$  est singulière (voir § suivant). On ne peut donc pas reporter la dynamique dans (13) par un changement de paramètres.

**ALGORITHME RAPIDE DE DECONVOLUTION 2-D.**

La difficulté posée par le calcul de la matrice de covariance d'erreur de prédiction peut être résolue en remplaçant l'équation de Ricatti matricielle du filtre de Kalman conventionnel par une équation de Chandrasekhar. Il s'agit là d'une extension de la technique de Morf et al. [17] au modèle non constant (13-14-15) qui repose sur une nouvelle définition des incréments tenant compte de la dynamique d'observation [18] :



**RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE  
A DEUX DIMENSIONS.**

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

$$\delta K_i = K_i - D^t K_{i-1} \quad (16)$$

$$\delta R_i^e = R_i^e - R_{i-1}^e \quad (17)$$

$$\delta P_i = P_i - D^t P_{i-1} D \quad (18)$$

En supposant le bruit stationnaire et la matrice de transition d'observation constante ( $D_i = D$ ) pour pouvoir factoriser simplement, on obtient l'algorithme :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_k (R_k^e)^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k) \quad (19)$$

$$A_k = H_k Y_{k-1} \quad (20)$$

$$B_k = A_k M_{k-1} \quad (21)$$

$$R_k^e = R_{k-1}^e + A_k B_k^* \quad (22)$$

$$K_k = D^t K_{k-1} + Y_{k-1} B_k^* \quad (23)$$

$$Y_k = Y_{k-1} - K_k (R_k^e)^{-1} A_k \quad (24)$$

$$M_k = M_{k-1} + B_k^* (R_{k-1}^e)^{-1} B_k \quad (25)$$

Voir Demoment et al. [18] pour le calcul détaillé dans le cas réel. L'extension au cas complexe se fait sans difficulté. L'algorithme est initialisé par :

$$K_1 = P_x H_1^* \quad (26)$$

$$R_1^e = H_1 P_x H_1^* + s^2 \quad \text{avec } E\{b_i b_j^*\} = s^2 \cdot \delta_{ij} \quad (27)$$

$$\delta P_2 = P_x - K_1 (R_1^e)^{-1} K_1^* - D^t P_x D \quad (28)$$

où  $\delta P_2$  doit être factorisé sous la forme :

$$\delta P_2 = Y_1 M_1 Y_1^* \quad \text{avec } M_1 = M_1^* \quad (29)$$

L'intérêt de la méthode repose sur l'observation suivante. Soit  $a$  le rang de  $\delta P_i$ . Alors  $M_i$  et  $Y_i$  sont des matrices de dimensions  $(a, a)$  et  $(MM', a)$ . Si  $P_x$  est tel que le rang de  $\delta P_2$  soit faible ( $a \ll MM'$ ), le gain en encombrement mémoire et en volume de calcul par rapport à un filtre de Kalman conventionnel est évident.

Mais avant de détailler la factorisation de  $\delta P_2$ , il faut revenir sur la condition  $D_i = D$  nécessaire au développement de la méthode. La matrice d'observation  $H_i$  est définie par :

$$H_i = [ 0 \ | \dots \ | 0 \ | \ \tilde{H}_N^k \ | \ \tilde{H}_{N-1}^k \ | \dots \ | \ \tilde{H}_1^k \ | 0 \ | \dots \ | 0 ] \quad (30)$$

où chaque bloc  $\tilde{H}_j^k$  est la matrice  $(1, MM')$  formée par la  $k$  ième ligne de  $\tilde{H}_j$ . Lorsque l'image est explorée ligne par ligne et lorsque  $y_i$  et  $y_{i+1}$  appartiennent à la même ligne, on passe de  $H_i$  à  $H_{i+1}$  par simple décalage car  $\tilde{H}_j$  est circulante. Il en irait de même pour un balayage par colonne.  $D$  est alors une matrice  $(MM', MM')$  de décalage vérifiant (15) et définie par :

$$D = (d_{ij}) \quad \text{avec : } d_{ij} = \delta_{i+1, j} \quad (31)$$

Par contre, lors des sauts de ligne (balayage raster scan par exemple), il faut passer de :

$$H_i = [ 0 \ | \dots \ | 0 \ | \ \tilde{H}_N^k \ | \dots \ | \ \tilde{H}_1^k \ | 0 \ | \dots \ | 0 ] \quad (32)$$

à :

$$H_{i+1} = [ 0 \ | \dots \ | 0 \ | 0 \ | \ \tilde{H}_N^k \ | \dots \ | \ \tilde{H}_1^k \ | 0 \ | \dots \ | 0 ] \quad (33)$$

On a alors :  $H_{i+1} = H_i \cdot D^N$  : la condition d'invariance de la matrice de transition d'observation n'est plus conservée. Pour s'y ramener, il faut considérer que l'image est enroulée sur un cylindre, les lignes étant concaténées sur une hélice. La matrice  $H$  définie en (1) devient alors circulante. Il s'agit de l'interprétation habituellement faite lors des approximations circulantes de la matrice de covariance d'une image [1],[19]. Pour éviter toute corrélation intempestive entre les bords "droit" et "gauche" de l'objet au travers de l'équation d'observation, les bords correspondants de l'image doivent être étendus avant enroulement d'un nombre de colonnes supérieur à la largeur de la RI et à la distance de corrélation de l'objet.

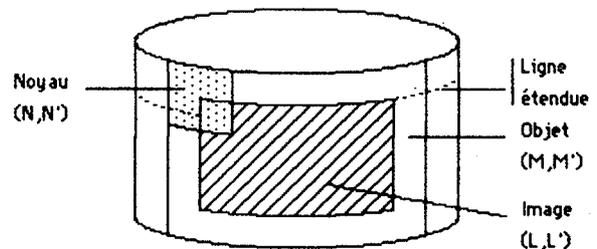


Figure 1: Enroulement de l'image en hélice.

Il est évident que l'état n'est pas remis à jour par l'équation (19) lors des récursions correspondant aux observations manquantes.

Factorisation de  $\delta P_2$  : Il a été vu plus haut que  $\delta P_2$  doit être factorisé selon (29). Pour cela, étudions la quantité :

$$Q = P_x - D^t P_x D \quad (34)$$

Dans le cas général,  $P_x$  est une matrice bloc hermitienne définie à partir des blocs  $R_{ij} = E\{x_i \cdot x_j^*\}$  où  $x_i$  est la  $i$  ème ligne de l'objet. Supposons tout d'abord que le processus  $\{x_{k,1}\}$  soit stationnaire "verticalement" ( $R_{ij} = R_{i-j}$ ), et que  $d$  soit la distance de corrélation entre lignes ( $R_{ij} = 0$  pour  $|i-j| > d$ ).  $P_x$  est alors bloc-Toeplitz :

$$P_x = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \dots & R_{-d} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & R_{-d} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & R_d & \cdot & \cdot & R_0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\text{avec } R_i = (r_{mn}^i) = E\{x_{j,m} \cdot x_{j-i,n}^*\} = R_{-i}^* \quad (36)$$

pour  $m = 1, \dots, M'$  et  $n = 1, \dots, M'$

Supposons ensuite que  $d'$  soit la distance de corrélation entre colonnes ( $r_{kl}^i = 0$  pour  $|k-l| > d'$  pour tout  $i$ ) et que le processus  $\{x_{k,1}\}$  soit stationnaire



**RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE  
A DEUX DIMENSIONS.**

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

"horizontalement". L'écriture de  $R_i$  doit tenir compte alors de l'extension des lignes de  $\underline{x}$  et de leur enroulement en hélice. Si on pose que l'objet conserve les mêmes propriétés statistiques dans la partie étendue,  $R_i$  s'écrit :

$$R_i = \begin{bmatrix} r_0^i & & & r_{-d}^i & 0 & \dots & 0 & r_{d-1}^{i-1} & \dots & r_1^{i-1} \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ r_{d-1}^i & & & & & & & & & r_{d-1}^{i-1} \\ 0 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & & r_{-d}^i \\ r_{-d}^{i+1} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ r_{-1}^{i+1} & \dots & r_{-d}^{i+1} & 0 & \dots & 0 & r_d^i & \dots & r_0^i \end{bmatrix} \quad (37)$$

Notons alors que  $R_{-d-1}$  (resp.  $R_{d+1}$ ) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) car elle contient des termes  $r_{-i}^d$  (resp.  $r_i^d$ ). En portant (37) dans (35), on voit que  $P_x$  est une matrice hermitienne Toeplitz dont les éléments non nuls sont répartis sur  $2d+1$  bandes parallèles à la diagonale principale.

Soit  $(p_{ij})$  les éléments de  $P_x$  et  $(q_{ij})$  les éléments de  $D^t P_x D$ . On a :

$$\begin{aligned} q_{ij} &= p_{i-1, j-1} && \text{pour } i=2, \dots, MM' \text{ et } j=2, \dots, MM' \\ q_{1j} &= 0 && \text{pour } j=1, \dots, MM' \\ q_{i1} &= 0 && \text{pour } i=1, \dots, MM' \end{aligned} \quad (38)$$

Puisque  $p_{i+1, j+1} = p_{i, j}$ , tous les éléments de  $Q$  sont nuls sauf sur la 1<sup>ère</sup> ligne et la 1<sup>ère</sup> colonne. On en déduit que le rang de  $Q$  est au plus égal à 2 [18]. Comme  $K_1$  est un vecteur (observation scalaire), on a :

$$\text{rg}(\delta P_2) = \text{rg}(P_x - D^t P_x D - K_1 (R_1^e)^{-1} K_1^*) \leq 3 \quad (39)$$

Définissons les vecteurs  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$  de dimensions  $MM'$  :

$$\underline{f}^* = [r, 0, \dots, 0] \quad \text{avec } r^2 = r_0^o \quad (40)$$

$$\underline{g}^* = r^{-1} [0, r_{-1}^o, \dots, r_{-d}^o, 0, \dots, r_{d-1}^o, \dots, r_{-d}^o, 0, \dots, 0] \quad (41)$$

on peut alors factoriser simplement  $\delta P_2$  sous la forme :

$$\delta P_2 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & | & \underline{f} & | & \underline{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1^* \\ \underline{f}^* \\ \underline{g}^* \end{bmatrix} = Y_1 M_1 Y_1^* \quad (42)$$

$$\text{avec : } \tilde{K}_1 = (R_1^e)^{-1/2} K_1$$

Le rang de  $\delta P_2$  est donc égal à 3, mais le volume des calculs nécessités par (19-25) se réduit en tenant compte du caractère creux de  $M_1$  et de  $H_k \underline{f} = 0$  pour  $k > 1$ . Cette dernière condition implique en effet que  $A_k$  et  $B_k$  ont un élément nul.

Si de plus, le processus  $\{x_{k,1}\}$  est supposé blanc,  $P_x$  est diagonale et  $\underline{g} = \underline{0}$ . La matrice  $M_1$  se réduit alors à une matrice de rang 2 et :

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_k^* = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_k & | & \underline{f} \end{bmatrix} \quad (43)$$

donc le rang effectif des calculs est 1.

Si  $\{x_{k,1}\}$  n'est pas blanc, la prise en compte de la corrélation a priori dans  $P_x$  a pour conséquence d'étendre le vecteur gain au delà des  $x_{ij}$  affectés par le produit de convolution. Ceci augmente toutefois le volume des calculs. On voit immédiatement la différence avec les approches causales telles que [2-4]. La partie utile du gain, formée par les composantes non nulles, s'étend naturellement dans le "futur". La conséquence principale est que le mode de balayage choisi ne transparaît pas sur l'estimée et qu'il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une moyenne d'estimées obtenues avec des balayages différents [1].

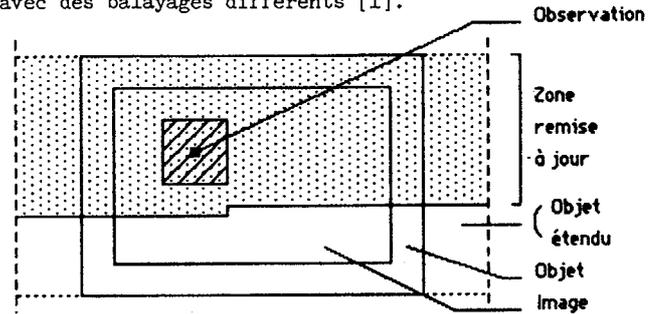


Figure 2: Partie de l'état remise à jour.

**RESTAURATION SOUS-OPTIMALE.**

La méthode optimale précédente nécessite à chaque récursion de calculer le vecteur gain et de remettre à jour un nombre croissant de composantes de  $\underline{x}$ . Or, si les statistiques de  $\{x_{k,1}\}$  et de  $\{b_{k,1}\}$  sont stationnaires,  $\delta K_1$  tend rapidement vers 0. Il est donc possible d'envisager un filtre de Kalman asymptotique utilisant un gain constant égal au gain asymptotique. Celui-ci sera calculé préalablement avec (20-25) qui ne font pas intervenir les observations. On a montré par ailleurs que cette procédure de calcul était plus efficace dans notre cas que les méthodes concurrentes de partitionnement [20].

De plus, si la RI est régulière, les composantes du gain deviennent négligeables "loin" du pixel observé. Ceci justifie la troncature du gain à une fenêtre de dimensions  $(K, K')$  située autour du point courant, ce qui entraîne une réduction notable du volume des calculs. Le filtre asymptotique à remise à jour réduite ainsi obtenu ne nécessite plus que  $NN' + KK'$  multiplications par pixels.

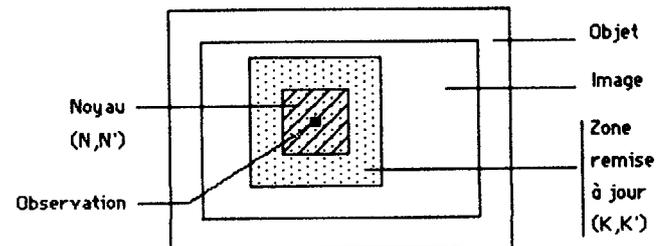


Figure 3: Filtre asymptotique à remise à jour réduite.

Le fait de disposer d'une méthode optimale permet de limiter l'arbitraire de la troncature et d'apprécier rigoureusement une éventuelle dégradation des résultats



**RESTAURATION D'IMAGE PAR FILTRAGE DE KALMAN RAPIDE  
A DEUX DIMENSIONS.**

D. SAINT-FELIX, DU XUE-CHENG, G. DEMOMENT

due à la sous-optimalité.

**RESULTATS.**

Les méthodes optimales et sous-optimales précédentes ont été appliquées à la restauration d'images réalisées en échographie ultrasonore. Les propriétés dynamiques des transducteurs employés dans cette technique conduisent à des RI de très grandes dimensions. La figure 4 montre un exemple de résultats obtenus à partir de signaux réels mesurés avec un rapport signal-bruit d'environ 15 dB. La RI utilisée, de dimensions (64,64), est mesurée expérimentalement.

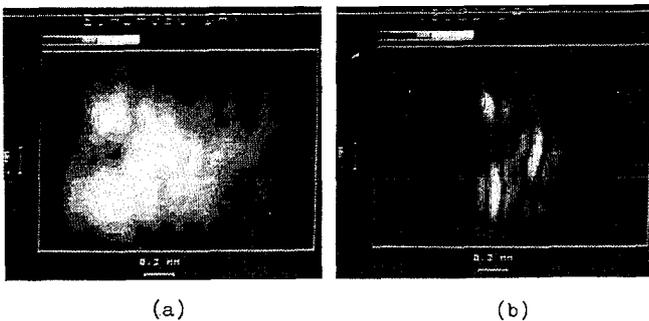


Figure 4: Restauration d'image échographique.

(a) Image originale de 3 réflecteurs ponctuels. Dimensions : (80,100). Représentation usuelle par niveaux de gris positifs.

(b) Image obtenue après déconvolution sous-optimale. Même type de représentation.

La déconvolution effectuée améliore la résolution d'un facteur 10 environ dans les deux directions. Et, point encore plus important, le résultat ne dépend pas du mode de balayage choisi.

**CONCLUSIONS.**

L'utilisation du filtre de Kalman en restauration d'image n'est pas nouvelle. Mais notre approche se distingue par l'absence de modèle causal pour décrire l'image tout en aboutissant à une méthode optimale rapide. Le filtre sous-optimal qui s'en déduit diffère également du "reduced update Kalman filter" de Woods [2],[4], non seulement par la non causalité sous-jacente, mais par l'extension naturelle de la remise à jour dans le "futur" lorsque l'objet est a priori corrélé. De plus, les techniques de factorisation de Chandrasekhar duales permettent d'augmenter l'efficacité de la méthode en la rendant robuste vis à vis des conditions initiales, sans augmentation trop importante du volume des calculs [20].

**BIBLIOGRAPHIE.**

[1] WILLSKY A.S., "Digital signal processing and control and estimation theory," Chapt. 4, MIT Press, Cambridge, Mass., 1979.

- [2] WOODS J.W., RADEWAN C.H., "Kalman filtering in two dimensions," IEEE Trans., IT-23, pp. 473-482, 1977.
- [3] WOODS J.W., "Correction to "Kalman filtering in two dimensions"," IEEE Trans., IT-25, pp. 628-629, 1979.
- [4] WOODS J.W., INGLE V.K., "Kalman filtering in two dimensions : further results," IEEE Trans., ASSP-29, pp. 188-197, 1981.
- [5] WOODS J.W., "Markov image modeling," IEEE Trans., AC-23, pp. 846-850, 1978.
- [6] SAINT-FELIX D., DJAFARI A.M., DEMOMENT G., "Restauration d'images dans C par une méthode rapide de régularisation," in Proc. Premier Colloque Image, Biarritz, France, pp. 349-354, 1984.
- [7] SAINT-FELIX D., DJAFARI A.M., DEMOMENT G., "Iterative generalized inverse image restoration," in Proc. ICASSP 84, San-Diego, Cal., pp. 37.9.1-37.9.4, 1984.
- [8] AKAIKE H., "Likelihood and the Bayes procedure," in Bayesian statistics, J.M. BERNARDO et al. Eds., Valencia, Spain : University Press, pp. 141-166, 1980.
- [9] NAHI N.E., "Role of recursive estimation in statistical image enhancement," Proc. IEEE, Vol. 60, pp. 872-877, 1972.
- [10] POWELL S.R., SILVERMAN L.M., "Modeling of two-dimensional covariance functions with application to image restoration," IEEE Trans., AC-19, pp. 8-13, 1974.
- [11] ABOUTALIB A.O., MURPHY M.S., SILVERMAN L.M., "Digital restoration of images degraded by general motion blurs," IEEE Trans., AC-22, pp. 294-302, 1977.
- [12] HABIBI A., "Two-dimensional bayesian estimate of images," Proc. IEEE, Vol. 60, pp. 878-883, 1972.
- [13] HSUEH A.C., MENDEL J.M., LASHGARI B., "2-D non-causal systems: state space modeling for half-plane support," in Proc. ICASSP 83, Boston, Mas., 1983
- [14] ROESSER R.P., "A discrete state-space model for linear image processing," IEEE Trans., AC-20, pp. 1-10, 1975.
- [15] JAIN A.K., JAIN J.R., "Partial differential equations and finite difference methods in image processing - Part 2 : Image restoration," IEEE Trans., AC-23, pp. 817-833, 1978.
- [16] CHELLAPA R., KASHYAP R.L., "Digital image restoration using spatial interaction models," IEEE Trans., ASSP-30, pp. 461-472, 1982.
- [17] MORF M. et al., "Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems," IEEE Trans., AC-19, pp. 315-323, 1974.
- [18] DEMOMENT G., REYNAUD R., HERMENT A., "Fast minimum variance deconvolution," to be published in IEEE Trans. ASSP.
- [19] ANDREWS H.C., HUNT B.R., "Digital image restoration," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- [20] DU-XUE-CHENG, SAINT-FELIX D., DEMOMENT G., "Comparaision entre méthodes de factorisation et méthodes de partitionnement. Application à la restauration rapide d'images", in Proc. 10 ème Colloque GRETSI, Nice, France, 1985.