DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE). Plateau du Moulon. 91190 - Gif-sur-Yvette- FRANCE.

RESUME

On s'intéresse au calcul du vecteur gain de Kalman asymptotique dans un problème d'estimation avec un modèle invariant et bruits stationnaires. Les dimensions de l'état étant élevées, il faut trouver des méthodes rapides pour résoudre l'équation de Riccati algébrique. On compare deux méthodes possibles: une méthode de factorisation du type Chandrasekhar et une méthode de partitionnement du type doublement. Dans le cas d'une observation scalaire, les méthodes de factorisation de Chandrasekhar sont plus rapides que celles de partitionnement dès que la dimension de l'état est élevée. Leur manque de robustesse vis à vis des conditions initiales peut être compensé par l'utilisation de méthodes de Chandrasekhar duales. Malgré l'augmentation du volume des calculs que cela entraine, la comparaison reste toujours à leur avantage pour des systèmes de dimensions importantes tels que ceux que l'on rencontre en restauration d'images.

SUMMARY

We are interested in the fast computation of the steady-state or asymptotic gain of a Kalman filter, used in a recursive and suboptimal estimation procedure. The dimension of the state being very large, so must we find a faster technique than the direct resolution of a Riccati equation to compute the asymptotic gain. Two possible methods are compared here: one is the factorization method of Chandrasekhar-type, and the other the so-called partitioned method. The factorization method runs better than the partitioned one for a scalar observation and a high dimension state, which is a situation often encountered in 2D image restoration. In order to be able to efficiently use the Chandrasekhar equations with arbitrary initial conditions, we have developped the discrete dual Chandrasekhar equations for the change of initial conditions.

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

INTRODUCTION.

Considérons un problème d'estimation d'état standard, fondé sur le modèle suivant:

$$\underline{x}_{i+1} = F\underline{x}_i + G\underline{u}_i \tag{1}$$

$$\underline{y}_i = H\underline{x}_i + \underline{b}_i , \quad i=1,2,... \tag{2}$$

où

$$E \begin{vmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{b}_i \\ \underline{x}_1 \end{vmatrix} (\underline{u}_j^*, \underline{b}_j^*, \underline{x}_1^*) = \begin{vmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & P_x \end{vmatrix} \delta_{ij} \tag{3}$$

Les matrices F, G, H, Q et la matrice de covariance à priori P_x sont supposées connues, constantes, et les vecteurs $\underline{x}_i$, $\underline{y}_i$ et $\underline{u}_i$ sont de dimension n, m et p respectivement. Le gain de Kalman nécessaire à une estimation optimale et récursive de l'état $\underline{x}$ est:

$$K_{gi} = FP_iH^*(HP_iH^* + R)^{-1} = FP_iH^*(R_i^e)^{-1} = K_i(R_i^e)^{-1} \tag{4}$$

Le calcul de ce gain est associé à la résolution d'une équation aux différences de Riccati:

$$P_{i+1} = FP_iF^* + GQG^* - K_i(R_i^e)^{-1}K_i^* \tag{5}$$

décrivant la dynamique de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction:

$$P_{i+1} = E\{(\underline{x}_{i+1} - \hat{\underline{x}}_{i+1|i})(\underline{x}_{i+1} - \hat{\underline{x}}_{i+1|i})^*\}$$

L'importance de ces équations de Riccati a été mise en évidence dès les premiers travaux de Kalman et Bucy. De nombreuses études ont été effectuées par la suite, cherchant à obtenir des solutions stables et, si possible, de manière rapide. Dans beaucoup d'applications on se contente d'une solution asymptotique de l'équation de Riccati, suffisante pour une mise en oeuvre sous-optimale du filtre de Kalman avec un gain constant. L'avantage réside évidemment dans la diminution du volume des calculs. Le but de cet article est de comparer deux méthodes possibles pour calculer le gain de Kalman asymptotique dans un problème de grandes dimensions comme, par exemple, la restauration d'images [1,2].

Parmi les très nombreuses études consacrées à l'obtention du gain de Kalman asymptotique [3-16], on peut distinguer les méthodes itératives [6-14] et les méthodes non itératives [15,16]. Ces dernières consistent à résoudre une équation algébrique par calcul des vecteurs propres du Hamiltonien, ce qui conduit à résoudre une équation de degré 2n. L'emploi de ces méthodes est rapidement limité lorsque la dimension n du système considéré devient élevée. Devant traiter des systèmes de grande dimension, on s'intéresse ici aux méthodes itératives.

Bien entendu, le calcul du gain asymptotique pourrait se faire directement par itération:

$$P = \lim_{i \to \infty} P_{i+1} \tag{6}$$

et le gain asymptotique serait alors donné par:

$$K = FPH^*(HPH^*+R)^{-1} \tag{7}$$

Mais le calcul direct de (6) à l'aide de (5) nécessite trop d'opérations arithmétiques. On est donc amené à utiliser des méthodes rapides qui exploitent la constance des matrices F, G, H, Q, R et P_x.

ALGORITHMES DE CHANDRASEKHAR.

Remarquant que la dimension (n,m) de K_i est généralement inférieure à celle de P_i: (n,n), cette différence étant maximale si l'observation est scalaire (m=1), on voit que l'on a intérêt à manipuler, à chaque récursion, la variation de K_i défini en (4) plutôt que de calculer P_i en résolvant complètement l'équation de Riccati. L'invariance et la stationarité du système (1) et (2) nous permettent de factoriser la matrice δP_i de variation de la matrice de covariance:

$$\delta P_i = P_i - P_{i-1} \tag{8}$$

sous la forme:

$$\delta P_i = Y_{i-1}M_{i-1}Y_{i-1}^* \tag{9}$$

De la même manière, en définissant $\delta K_i = K_i - K_{i-1}$, on montre que le gain de Kalman peut être calculé par les équations de Chandrasekhar suivantes [17]:

$$Y_i = [F - K_i(R_i^e)^{-1}H]Y_{i-1} \tag{10}$$

$$M_{i+1} = M_i + M_iY_i^*H^*(R_i^e)^{-1}HY_iM_i \tag{11}$$

$$R_{i+1}^e = R_i^e + HY_iM_iY_i^*H^* \tag{12}$$

$$K_{i+1} = K_i + FY_iM_iY_i^*H^* \tag{13}$$

Bien que P_i n'apparaisse plus dans ces équations, elle peut cependant être calculée à chaque récursion par:

$$P_{i+1} = P_i + Y_iM_iY_i^*H^*$$

Les valeurs initiales de (12) et (13) sont aisées à trouver:

$$K_1 = FP_xH^* \quad \text{et} \quad R_1^e = R + HP_xH^* \tag{14}$$

Mais celles de (10) et (11) nécessitent quelques calculs préliminaires. Soit:

$$\delta P_2 = FP_xF^* + GQG^* - K_1(R_1^e)^{-1}K_1^* - P_x = Y_1M_1Y_1^* \tag{15}$$

La matrice M_1 est une matrice de signature de dimension (r,r) où r est le rang de δP_i qui vérifie dans de nombreux cas particuliers [17,22]:

$$r \leq \min(n,m) = \min(n,1)$$

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTITIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

Dans beaucoup d'applications telles que la déconvolution en ligne, la restauration sous-optimale d'images, etc..., l'observation est scalaire [1,2]. Dans ces conditions , le rang r est égal à 1, et le nombre total d'opérations arithmétiques à chaque récursion de l'algorithme de Chandrasekhar est donné dans le tableau suivant.

Tableau I ($n=\dim(\underline{x}_i)$, m=1)

Termes	opérations	
	add.	mul.
HY_i	n-1	n
FY_i	n(n-1)	n^2
éq.(10)	n	n+2
éq.(11)	1	3
éq.(12)	1	1
éq.(13)	n	n
total	n^2+2n+1	n^2+3n+6

Le nombre total d'opérations élémentaires à chaque itération est donc:

$$N_c = (n^2 + 2n + 1)\text{ add.} + (n^2 + 3n + 6)\text{ mul.}$$

Supposons que T_c représente le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le gain asymptotique défini par $||\delta P_{Tc}|| \leq \xi ||P_{Tc}||$ où ξ est fixé à priori. Le nombre total d'opérations arithmétiques nécessité par cet algorithme est donc:

$$N_{T_c} = T_c[(n^2+2n+1)\text{add.} + (n^2+3n+6)\text{mul.}] \tag{16}$$

ALGORITHME DE PARTITIONNEMENT.

Cette méthode utilise également le fait que le système (1) et (2) est invariant. On cherche à calculer $P(2^k)$ à partir de $P(2^{k-1})$ au lieu de calculer séquentiellement P(0), P(1), P(2)...(P(k) dénote dans ce paragraphe la matrice de covariance à l'itération k). On utilise pour cela le fait que la solution de l'équation de Riccati algébrique peut être obtenue à l'aide de la solution d'une équation linéaire (Hamiltonienne) du type $A_k = \Phi A_{k-1} = \Phi^k A_o$, de dimension 2n, à partir de laquelle on a immédiatement une solution doublée A^{2k}. En effet le calcul de la matrice de transition $\Phi^{2k} = \Phi^k \Phi^k$ se fait en doublant à chaque fois la longueur de l'itération courante k [11]. Cette méthode peut aussi être développée avec une approche très différente [18,19] utilisant la théorie de la propagation. Nous utiliserons par la suite les expressions générales de Lainiotis [13,14], qui présentent des avantages lors d'un changement des conditions initiales. Elles sont données par [14]:

$$P(2^{k+1}\Delta) = P_o(2^k\Delta) + \Psi_o(2^k\Delta)[I+P(2^k\Delta)O_o(2^k\Delta)]^{-1}. P(2^k\Delta)\Psi_o^*(2^k\Delta) \tag{17}$$

où les parties nominales $P_o(.)$, $\Psi_o(.)$ et $O_o(.)$ sont calculées par:

$$P_o(2^{k+1}\Delta) = P_o(2^k\Delta) + \Psi_o(2^k\Delta)[I + P_o(2^k\Delta)O_o(2^k\Delta)]^{-1}. P_o(2^k\Delta)\Psi_o^*(2^k\Delta) \tag{18}$$

$$\Psi_o(2^{k+1}\Delta) = \Psi_o(2^k\Delta)[I + P_o(2^k\Delta)O_o(2^k\Delta)]^{-1}\Psi_o^*(2^k\Delta) \tag{19}$$

$$O_o(2^{k+1}\Delta) = O_o(2^k\Delta) + \Psi_o^*(2^k\Delta)[I + P_o(2^k\Delta)O_o(2^k\Delta)]^{-1}. P_o(2^k\Delta)\Psi_o(2^k\Delta) \tag{20}$$

pour k=0,1,2..., et où Δ est l'intervalle de base.

Les initialisations de (17-20) sont triviales: $P(1)=P_x$, $\Psi_o(1)=I$, $O_o(1)=0$ et $P_o(1)=0$. Mais celles de $P(\Delta)$, $\Psi_o(\Delta)$, $O_o(\Delta)$ et $P_o(\Delta)$ nécessitent la résolution directe de:

$$\Psi_o(i) = [I-K_o(i)H]F\Psi_o(i-1) \quad \text{avec} \quad \Psi_o(1) = I \tag{21}$$

$$O_o(i) = O_o(i-1) + \Psi_o^*(i-1)F^*H^*P_{\tilde{z}_o}^{-1}(i|i-1)HF\Psi_o(i-1), \quad O_o(0) = 0 \tag{22}$$

$$P_o(i|i-1) = FP_o(i-1)F^* + Q \tag{23}$$

$$K_o(i) = P_o(i|i-1)H^*P_{\tilde{z}_o}^{-1}(i|i-1) \tag{24}$$

$$P_o(i) = [I - K_o(i)H]P_o(i|i-1) \tag{25}$$

$$P_{\tilde{z}_o}(i|i-1) = HP_o(i|i-1)H^* + R , \quad i=1,2...,\Delta \tag{26}$$

Tableau II

Termes	opérations	
	add.	mul.
$P(.)O_o(.)$	$(n^3+n^2)/2$	$(n^3+n^2)/2$
$[I+P(.)O_o(.)]^{-1}$	$0(n^2)$	$0(n^2)$
éq. (17)	n^2	$(n^3+n^2)/2 +2n^3$
$P_o(.)O_o(.)$	$(n^3+n^2)/2$	$(n^3+n^2)/2$
$[I+P_o(.)O_o(.)]^{-1}$	$0(n^2)$	$0(n^2)$
$\Psi_o(.)[I+P(.)O_o(.)]^{-1}$	n^3	n^3
éq. (19)	n^3	n^3
$[I+P(.)O_o(.)]^{-1}P_o(.)$	$(n^3+n^2)/2$	$(n^3+n^2)/2$
éq. (18)	n^2+2n^3	$2n^3$
éq. (20)	$(n^3+n^2)/2$	
total	$6n^3+4n^2+0(n^2)$	$8n^3+2n^2+0(n^2)$

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

Pour simplifier les initialisations, prenons $\Delta=1$. La solution $P(2^k)$ de l'équation de Riccati peut être calculée à l'aide des parties nominales $P_o(.)$, $O_o(.)$ et $\Psi_o(.)$, et la convergence de $P(2^k)$ est quadratique [11]. Prenons ici la même matrice de covariance initiale $P(0)=P_x$ qu'avec l'algorithme de Chandrasekhar. La solution $P(2^k)$ coincide alors exactement avec la solution P_i obtenue par l'algorithme de Chandrasekhar à $i=2^k$. On peut espérer qu'après $T_p=Log_2(T_c)$ itérations, la solution $P(2^{T_p})$ vérifie également la condition de convergence précédemment définie. Le nombre d'opérations à chaque itération est alors donné dans le tableau II.

Remarque: On a négligé dans ce tableau les calculs d'initialisation. Les matrices $P(.)$, $P_o(.)$ et $O_o(.)$ sont symétriques, alors que la matrice $\Psi_o(.)$ ne l'est pas. La multiplication de deux matrices symétriques nécessite $(n^3+n^2)/2$ opérations. Il faut aussi noter que l'inversion de deux matrices dans (17-20) nécessite à chaque fois $O(n^2)$ opérations, puisqu'elles sont aussi symétriques. Le nombre global d'opérations élémentaires est donc finalement:

$$N_{T_p} = T_p[(8n^3+2n^2+O(n^2))mul.+(6n^3+4n^2+O(n^2))add.] \quad (27)$$

COMPARAISON.

La comparaison entre les deux algorithmes est difficile à faire dans le cas général, car le nombre global d'opérations nécessité par chacun des algorithmes dépend de la dimension de l'état n et du nombre d'itérations T_c (ou T_p) nécessaires pour atteindre la solution dite asymptotique. En se limitant aux seules multiplications, on peut évaluer le rapport A du nombre total d'opérations arithmétiques demandé par l'algorithme de Chandrasekhar au nombre total demandé par l'algorithme de partitionnement:

$$A = A(T_c,n) = \frac{T_c(n^2+3n+6)}{Log_2(T_c)\ (8n^3+2n^2+O(n^2))} \quad (28)$$

qui peut s'écrire plus simplement si n est grand:

$$A = \frac{f(Tc)}{n} \quad (29)$$

où $f(T_c)= T_c/(8Log_2(T_c))$, est une fonction monotone croissante de T_c. Pour que la comparaison ait un sens, il faut encore que T_c soit une puissance entière de 2: $T_c = 2^k$. La question qui se pose immédiatement est la suivante: pour quelle dimension $\tilde{n}$ du système y-a-t-il même volume de calcul pour les deux méthodes? Si k = 5, on trouve d'après (29) que $\tilde{n}$ est égal à 1. Si k = 10, $\tilde{n}$ est égal à 1 ou 2. Si k = 15, c'est-à-dire si $T_c=32768$, alors $\tilde{n}=273$. On voit donc que A est inférieur à 1 dès que $n>\tilde{n}(k)$, l'algorithme de Chandrasekhar est alors le plus rapide.

Inversement, si on fixe la dimension $\tilde{n}$ (qui est connue à priori), par exemple $\tilde{n}=2000$, il faut au moins 2^k itérations (ici k=19 et donc $T_c= 2^{19} = 524288$) pour que la méthode de partitionnement soit aussi rapide que la méthode de Chandrasekhar. Dans les applications pratiques, on constate que le nombre d'itérations nécessaires est du même ordre de grandeur que la dimension du système [21,22], soit $T_c = q\tilde{n}$ et $\tilde{n}>1000$, avec $2<q<10$ selon le critère de convergence. Dans ce cas, $A(T_c,\tilde{n})$ est toujours inférieur à 1. On peut donc conclure que l'algorithme de Chandrasekhar est plus rapide que l'algorithme de partitionnement dans le cas retenu ici d'une observation scalaire. Ceci nous amène à nuancer l'affirmation de Lainiotis [13] selon laquelle les méthodes de partitionnement sont toujours plus rapides que la méthode de Chandrasekhar, même lorsque celle-ci est à son maximum d'efficacité. Ceci n'est éventuellement vrai que si la dimension de l'état est faible (c'est-à-dire si $n<\tilde{n}$ pour k fixé).

EQUATIONS DE CHANDRASEKHAR DUALES DISCRETES.

Les méthodes de partitionnement sont robustes vis-à-vis d'un changement des conditions initiales puisque l'initialisation peut se faire avec une matrice P_{xr} quelconque. Par contre, pour que les équations de Chandrasekhar soient intéressantes, il faut choisir des conditions initiales particulières conduisant à un rang faible pour l'incrément δP_2. Cette restriction peut être une gêne dans certaines applications. Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser des équations dites de "Chandrasekhar duales" développées dans le cas continu par Ljung et Kailath [20] et dont la version discrète développée à partir de [19] est détaillée dans [23].

L'idée de base consiste à décomposer la matrice de covariance initiale correcte P_{xr} en deux parties P_x et δP_x avec:

$$P_{xr} = P_x + \delta P_x \quad (30)$$

choisies de telle façon qu'avec P_x seule on puisse utiliser au mieux l'algorithme de Chandrasekhar. Le gain asymptotique correspondant est noté K_o, alors que K est le gain effectif recherché. Définissons:

$$\delta K_{gi} = K_{gi} - K_{ogi} \quad (31)$$

où $K_{gi} = K_i(R_i^{\,e})^{-1}$ est le gain généralisé obtenu à la ième itération avec la condition initiale correcte P_{xr}, et où $K_{ogi} = K_{oi}(R_{oi}^e)^{-1}$ est celui obtenu avec la condition initiale incorrecte P_x. On a les équations de Chandrasekhar duales discrètes (voir annexe):

$$\delta K_{gi} = \phi(i+1,1)\delta P_x M_o^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1} \quad (32)$$

$$M_o(i+1,1) = \{M_o(i,1) + M_o(i,1)Y_1[M_1^{-1} - N_o(i,1)Y_1]^{-1}.\ N_o(i,1)\}\tilde{F} \quad (33)$$

$$M_o(1,1) = H \quad \text{avec} \quad \dim(M_o(.,.)) = (1,n)$$

$$N_o(i+1,1) = N_o(i,1) - Y_1^* M_o^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1}M_o(i,1) \quad (34)$$

$$N_o(1,1) = 0 \quad \text{avec} \quad \dim(N_o(.,.)) = (1,n)$$

$$\tilde{F} = F(I + P_x H^* H)^{-1} \quad (35)$$

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

A partir de l'équation (32), on obtient à l'itération T_c:

$$\delta K_{gTc} = \phi(Tc+1,1)\delta P_x M_o^*(Tc,1)(R_{oTc}^e)^{-1} \tag{36}$$

où l'indice T_c représente le nombre total d'itérations défini plus haut. $M_o^*(T_c,1)$ dans (36) peut être calculé par application répétée de (33-34) et le nombre de calculs à chaque itération est donné par le tableau III.

Tableau III ($n = \dim(x_i)$)

Termes	opérations	
	add.	mul.
$N_o(.)Y_1$	$n-1$	n
$M_o(.)Y_1$	$n-1$	n
éq. (33)	n^2+1	n^2+n+3
éq. (34)	n	$n+1$
total	n^2+3n-1	n^2+4n+4

Le calcul de $\phi(T_c+1,1)$, qui est la matrice de transition de $(F-K_{gi}H)$, est un peu plus compliqué. On a:

$$\phi(T_c+1,1) = \phi_o(T_c+1,1)[I-(P_{xr}-P_x)W_o(T_c+1,1)]^{-1} \tag{37}$$

où $W_o(.)$ peut se calculer par:

$$W_o(i+1,1) = W_o(i,1) - M_o^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1}M_o(i,1) \tag{38}$$

Répétant (38) de $i=1$ jusqu'à $i=T_c$, on trouve $W_o(T_c+1,1)$. Le calcul de cette équation à chaque itération nécessite $n(n+1)/2$ opérations. On définit:

$$Y = [\ I - \delta P_x W_o(T_c+1,1)]^{-1}\delta P_x M_o^*(T_c,1)(R_{oT_c}^e)^{-1} \tag{39}$$

Y est un vecteur de dimensions $(n,1)$, et le calcul de (39) nécessite en général $O(n^3)$ opérations. Nous avons d'après (36):

$$\delta K_{gT_c} = \phi_o(T_c+1,1)Y \tag{40}$$

et nous trouvons finalement:

$$\delta K_{gi} = (\ F - K_{ogi}H\ )\delta K_{gi-1} \quad \text{avec} \quad \delta K_{go} = Y \tag{41}$$

Le nombre d'opérations élémentaires à chaque itération de (41) est égal à n^2.

Le nombre total d'opérations élémentaires nécessité par ces équations de Chandrasekhar duales discrètes est donné par:

$$\begin{aligned} N_{cd} &= T_c[(n^2+4n+4) + 0.5(n+1)n + n2] + O(n^3) \\ &= T_c(2.5n^2+4.5n+4) + O(n^3) \end{aligned} \tag{42}$$

<u>Remarque</u>: L'utilisation de l'équation (39) dont le volume de calcul est proportionnel à $O(n^3)$, ne se fait qu'une fois. Dans le cas d'une matrice de covariance initiale P_{xr} quelconque, il faut donc, pour pouvoir comparer les deux méthodes de calcul rapide du gain asymptotique, rajouter le nombre d'opérations nécessitées par l'emploi d'équations de Chandrasekhar duales. On obtient ainsi:

$$A_m(T_c,n) = \frac{T_c(n^2+3n+6) + T_c(2.5n^2+4.5n+4) + O(n^3)}{\text{Log}_2(T_c)\ (8n^3+2n^2+O(n^2))}$$

$$= A(T_c,n) + \frac{O(n^3)}{\text{Log}_2(T_c)\ 8n^3} \tag{43}$$

On voit donc d'après (43) que les conclusions données dans la section précédente restent valables si T_c est grand devant l'unité.

CONCLUSION.

Lorsque le système est invariant et stationnaire et que l'observation est scalaire, pour calculer le gain asymptotique de Kalman en partant d'une condition initiale P_x quelconque, l'algorithme de Chandrasekhar est toujours plus rapide et plus aisé à mettre en oeuvre que l'algorithme de partitionnement pour des systèmes de dimension importante. Ce résultat a été utilisé pour calculer le vecteur-gain d'un filtre de Kalman asymptotique développé pour la restauration rapide d'images (voir réf. [21]).

ANNEXE.

<u>Equations de Chandrasekhar Duales Discrètes</u>.

Par définition: $K_{gi}=K_i(R_i^e)^{-1}$, $K_{ogi}=K_{oi}(R_{oi}^e)^{-1}$, où K_{gi} correspond au gain calculé avec la condition initiale P_{xr}, et où K_{ogi} correspond à P_x. Définissons:

$$\delta K_{gi} = K_{gi} - K_{ogi} \tag{A1}$$

on a:

$$\delta K_{gi} = (F-K_{gi}H)\delta P_i H^*(R_{oi}^e)^{-1} \tag{A2}$$

où: $\delta P_{i+1} = P_{i+1} - P_{oi+1}$. En remarquant que:

$$\delta R_i^e = R_i^e - R_{oi}^e = H\delta P_i H^* \ , \text{ et } \ P_{oi} = P_i - \delta P_i$$

on peut démontrer [23] que:

$$\delta P_{i+1} = \phi(i+1,1)\delta P_x \phi_o^*(i+1,1) \tag{A3}$$

où $\phi(.,.)$ et $\phi_o(.,.)$ sont les matrices de transition de $(F-K_{gi}H)$ et de $(F-K_{ogi}H)$ respectivement. L'équation (32) en découle:

$$\delta K_{gi} = (F-K_{gi}H)\phi(i,1)\delta P_x M_o^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1} \tag{A4}$$

avec ici:

$$M_o(i,1) = H\phi_o(i,1) \tag{A5}$$

COMPARAISON ENTRE METHODES DE FACTORISATION ET METHODES DE PARTIONNEMENT. APPLICATION A LA RESTAURATION D'IMAGES.

DU XUE-CHENG, D. SAINT-FELIX, G. DEMOMENT

On a [19] les équations de propagation rétrograde et directe:

$$\phi_o(i+1,1) = \phi_o(i,1)[I - \tilde{Q}W_o(i,1)]^{-1}\tilde{F} \quad (A6)$$

où: $\tilde{Q} = Y_1M_1Y_1^*$, $\tilde{F} = F(I + P_xHH^*)^{-1}$

$$W_o(i+1,1) = W_o(i,1) - \phi_o^*(i,1)H^*H(R + P_{oi}H^*H)^{-1}\phi_o(i,1) \quad (A7)$$

En multipliant (A6) par H à gauche et en définissant :

$$N_o(i,1) = Y_1^*W_o(i,1) \quad (A8)$$

on a:

$$M_o(i+1,1) = [M_o(i,1) + N_o(i,1)Y_1(M_1^{-1} - N_o(i,1)Y_1)^{-1} N_o(i,1)]\tilde{F} \quad (A9)$$

$$N_o(i+1,1) = N_o(i,1) - Y_1^*M_1^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1}M_o(i,1) \quad (A10)$$

$$W_o(i+1,1) = W_o(i,1) - M_o^*(i,1)(R_{oi}^e)^{-1}M_o(i,1) \quad (A11)$$

et d'après l'équation (7) de [19] la matrice de transition pour les conditions initiales est donnée par:

$$\phi(i+1,1) = \phi_o(i+1,1)[I-(P_{xr}-P_x)W_o(i+1,1)]^{-1} \quad (A12)$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DEMOMENT G., REYNAUD R., SEGALEN A. "Estimation sous-optimale rapide pour la déconvolution en temps-réel", 9ème Colloque GRETSI, Nice, 205-210 (1983).

[2] SAINT-FELIX D., DJAFARI A.M., DEMOMENT G. "Quelques problèmes liés à l'amélioration de la restauration d'images", 9ème Colloque GRETSI, Nice, 349-354(1983).

[3] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. Optimal Filtering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 07632.

[4] WILLEMS J.C. "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", IEEE. Trans., Vol.AC-16, 621-634, 1971.

[5] GIULIERI A., BOZZO C. "Analyse des méthodes de résolution numérique de l'équation discrète de Riccati ", 7ème Colloque GRETSI, Nice,74/1-8 (1979).

[6] KLEINMAMN D.L. "On an iterative technique for Riccati equation computation", IEEE. Trans., Vol.AC-13, 114-115, 1968.

[7] HEWER G.A. "An iterative technique for the computation of the steady- state gains for the discrete optimal regulator", IEEE. Trans., Vol.AC-16, 382-384, 1971.

[8] SANDELL N.R. "On Newton's method for Riccati equation solution", IEEE. Trans., Vol.AC-19, 254-255, 1974.

[9] VIT K. "Iteration solution of Riccati equation", IEEE. Trans., Vol.AC-17, 258-259, 1972.

[10] KAILATH T., LJUNG L. " The asymptotic behavior of constant coefficient Riccati differential equations", IEEE. Trans., Vol.AC-21, 385-388,1976.

[11] B.D.O. ANDERSON, "Second-order convergent algorithms for the steady-state RICCATI equation", Int. J. Contr., Vol. 78 n° 2, 295-306,(1978)

[12] SIDHU G.S., BIERMAN G.J. "Integration-free interval doubling for Riccati equation solutions", IEEE. Trans., Vol.AC-22, 831-834, 1977.

[13] LAINIOTIS D.G. "Partitionned RICCATI solutions and integration-free doubling algorithm", IEEE. Trans., Vol.AC-21, 677-688, 1976.

[14] LAINIOTIS D.G. "Distrete RICCATI equation: Generalized partitionned algorithms", Int. J. Sci. Vol. 15, 169-185, 1978.

[15] VAUGHAN. D. "A nonrecursive algebraic solution for the discrete time equations", IEEE. Trans., Vol.AC-15, 597-599, 1970.

[16] LAUB J.A. "A schur method for solving algebraic RICCATI equations", IEEE. Trans., Vol.AC-24, 913-921, 1979.

[17] MORF M., SIDHU G.S., KAILATH T. "Some new algorithms for recursive estimation in constant,linear,discrete-time systems", IEEE. Trans., Vol.AC-19, 315-323, 1974.

[18] LJUNG L., KAILATH T., FRIEDLANDER B. "Scattering theory and linear least squares estimation --Part I: Continuous-time problems", Proc. IEEE., Vol. 64, 131-139, 1976.

[19] FRIEDLANDER B., KAILATH T., LJUNG L. "Scattering theory and linear least squares estimation--Part II. Discrete-time problems", J. Franklin Inst., 71-82, Jan.,1976.

[20] LJUNG L., KAILATH T. "Efficient change of initial conditions, Dual Chandrasekhar equations, and some applications", IEEE. Trans., Vol.AC-22, 443-447, 1977.

[21] SAINT-FELIX D., DU XUE-CHENG, DEMOMENT G. "Restauration d'image par filtrage de Kalman rapide à deux dimensions". 10ème Colloque GRETSI, Nice, (1985).

[22] REYNAUD. R. Thèse de 3ème cycle. Paris XI, Orsay, 1984.

[23] DU XUE-CHENG, DEMOMENT G., SAINT-FELIX D. "Dual Chandrasekhar equations: The discrete case ", L2S Internal Report n°. 1985. Submitted for publication.