

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

659



NICE du 20 au 24 MAI 1985

SUR LA STRUCTURE CASCADE DU FILTRAGE A PLUSIEURES ENTREES

Abdeldjalil OUAHABI

Laboratoire Electronique des Systemes Institut de Physique U.S.T.H.B. BP n°9 DAR EL BEIDA ALGER

RESUME

Le filtrage de Wiener à n entrées - en prenant m entrées de référence ($1 < m < n$) - caractérise un système linéaire et invariant dans le temps dont la synthèse peut être envisagée selon diverses configurations.

Nous montrons, dans ce travail, que les structures du type cascade jouissent de propriétés intéressantes du point de vue de l'erreur d'estimation des fonctions de transfert élémentaires.

Nous présentons ensuite, une structure "cascade récursive" qui améliore les performances du filtre au dépend d'un algorithme plus complexe et plus long.

Enfin, les conditions de mise en oeuvre de ces configurations sont exposées.

SUMMARY

The Wiener filtering with n inputs - m inputs are chosen as references ($1 < m < n$) - characterizes a linear and a time invariant system whose synthesis may be viewed according to various configurations.

In this paper, we shall show that the cascade structures benefit from interesting features from the point of view of the statistical error on estimation of the elementary transfer functions.

Further we shall present a "recursive cascade" structure which improves the performances of the filtering at the expense of a more complex and a longer algorithm.

At last, the conditions in which the structures will be put into practice will be explained.



I INTRODUCTION

Nous nous intéressons d'une manière générale dans ce qui suit, au traitement des signaux perturbés par des bruits parasites.

Le terme signal, ainsi que le terme bruit sont pris dans un sens restreint.

Nous appelons "signal", la partie de l'observation qui véhicule l'information utile, et "bruit" celle qui perturbe la mesure du signal.

Le traitement que nous envisageons, consiste à diminuer -voire à annuler- l'effet des bruits parasites sur l'information utile.

Le critère le plus naturel adopté est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne d'estimation qui conduit au filtrage de WIENER classique.

Cependant, le filtrage de WIENER suppose des matrices spectrales connues; leur méconnaissance nous incite à les estimer en prolongeant notre espace d'observation par un sous-espace de référence.

Le filtre de WIENER estimé sera alors sous-optimal. Notre objectif est donc de réduire les erreurs d'estimation.

Ces erreurs sont introduites à deux niveaux :

- 1 - Procédure d'estimation des matrices spectrales lorsque nous ne disposons que d'une seule réalisation des entrées (ou observation).
- 2 - Choix de la structure du filtre

L'estimation de densités spectrales étant un sujet largement traité (cf. [1], [4], [6]); nous ne développerons alors que le point relatif au choix de la structure du filtre avec toutes ses implications sur les performances du filtrage.

II FORMULATION DU PROBLEME

1 Cas général

L'espace des observables est de dimension n :

$$- x_i(t) = s_i(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t)$$

$$1 < m < n \quad ; \quad 1 \leq i \leq (n-m) \quad ; \quad 1 \leq k \leq m$$

où $s_i(t)$ représente le signal utile que l'on désire estimer.

$$- y_j(t) \quad 1 < j < m \text{ est l'entrée de référence}$$

Les entrées $x_i(t)$ et $y_j(t)$ sont supposées gaussiennes centrées, stationnaires et ergodiques au moins au second ordre.

2 Exemple de cas pratique

Nous ne disposons que d'une seule réalisation des processus observés :

- $x(t) = s(t) + b_1(t) + b_2(t)$ représente le signal bruité.

- $y(t) = (y_1(t) \quad y_2(t))^T$ représente l'entrée de référence.

- Le signal utile $s(t)$ et les bruits perturbateurs $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont mutuellement gaussiens décorrélés.
- Les composantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont supposées respectivement corrélées à $b_1(t)$ et $b_2(t)$.

D'après ces hypothèses, la minimisation de l'erreur quadratique moyenne $e = E \left\{ (\hat{s}(t) - s(t))^2 \right\}$ aboutit [6] au signal estimé $\hat{s}(t)$:

$$\hat{s}(t) = x(t) - \underline{h}^T(t) * y(t)$$

où E désigne l'opérateur espérance mathématique

* indique le produit de convolution

$\underline{h}^T(t) = (\hat{h}_1(t) \quad \hat{h}_2(t))$ représente les réponses impulsionnelles du filtre de WIENER estimé.

La transformée de FOURIER des $h_i(t)$ ($i=1,2$) donne les fonctions de transfert élémentaires du filtre :

$$\hat{H}_1(f) = \frac{\hat{S}_{xy1}(f)}{\hat{S}_{y1}(f)} \quad \hat{H}_2(f) = \frac{\hat{S}_{xy2}(f)}{\hat{S}_{y2}(f)}$$

où $\hat{S}_{xy}(f)$ désigne l'interspectre entre $x(t)$ et $y(t)$, et $\hat{S}_y(f)$ l'autospectre de $y(t)$.

Les interspectres et autospectres sont estimés par la méthode du périodogramme lissé [1] , [4] .

Nous allons voir que la synthèse du filtre de WIENER, de fonctions de transfert élémentaires $H_1(f)$ et $H_2(f)$, peut être réalisée selon deux configurations.

III STRUCTURE CASCADE DU FILTRE DE WIENER

1 Présentation des deux types de configuration

Les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ étant liés de façon linéaire (par l'intermédiaire de H_1 et H_2) respectivement aux entrées de référence $y_1(t)$ et $y_2(t)$; l'estimation de $b_1(t)$ et de $b_2(t)$ donnera alors -après une simple soustraction- le signal désiré $s(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= x(t) - \hat{H}_1(y_1(t)) - \hat{H}_2(y_2(t)) \\ &= s(t) + b_1(t) + b_2(t) - \hat{H}_1(y_1(t)) - \hat{H}_2(y_2(t))\end{aligned}$$

$$\hat{s}(t) = s(t) + \left\{ H_1(y_1(t)) - \hat{H}_1(y_1(t)) \right\} + \left\{ H_2(y_2(t)) - \hat{H}_2(y_2(t)) \right\}$$

Le but recherché est donc de reconstruire les filtres H_1 et H_2 ; ce qui permet d'estimer

$$b_1(t) = H_1(y_1(t)) \text{ et } b_2(t) = H_2(y_2(t)).$$

Les performances de ce filtrage dépendront du type de configuration choisie.

a Structure parallèle (fig. 1.a)

Il s'agit d'une estimation simultanée de H_1 -à partir de $x(t)$ et $y_1(t)$ - et de H_2 -à partir de $x(t)$ et $y_2(t)$ -.

Après soustraction, le signal obtenu est :

$$\hat{s}(t) = s(t) + e_p(t)$$

avec

$$e_p = \left\{ H_1(y_1(t)) - \hat{H}_1(y_1(t)) \right\} + \left\{ H_2(y_2(t)) - \hat{H}_2(y_2(t)) \right\}$$

b Structure cascade (fig. 1.b)

L'estimation de $s(t)$ s'effectue en deux étapes :

1. Estimation de H_1 à partir de $x(t)$ et de $y_1(t)$ et par soustraction nous aurons

$$x_1(t) = s(t) + \left[H_1(y_1(t)) - \hat{H}_1(y_1(t)) \right] + H_2(y_2(t))$$

2. Estimation de H_2 à partir de $x_1(t)$ (et non de $x(t)$) et de $y_2(t)$, et par soustraction nous aboutissons au signal estimé.

$$\hat{s}(t) = x(t) - x_1(t) = s(t) + e_c(t)$$

avec

$$e_c(t) = \left[H_1(y_1(t)) - \hat{H}_1(y_1(t)) \right] + \left[H_2(y_2(t)) - \hat{H}_2(y_2(t)) \right]$$

2 Comparaison des deux configurations

a Approche qualitative

Bien qu'apparemment les erreurs d'estimation $e_c(t)$ et $e_p(t)$ semblent égales, nous allons tenter d'expliquer, qu'en réalité, il n'en est pas ainsi.

Lors de l'étude du filtre de WIENER à deux entrées dont une référence bruit [6], nous avons montré que théoriquement et expérimentalement, le traitement n'est efficace qu'en présence d'un "bon" coefficient de cohérence $C_{xy}(f)$ entre les signaux observés, et un faible rapport signal-à-bruit R .

Ces deux exigences sont naturellement liées à une bonne précision statistique des estimateurs [6], [5] :

$$R < \frac{B_e T}{2} \quad \text{et} \quad |C_{xy}|^2 \geq \frac{2}{B_e T + 2}$$

où $B_e T$ représente le nombre de moyennes pondérées effectuées pour estimer les densités spectrales.

La structure cascade tire partie de ces résultats :

- en effet, lors de l'estimation de H_1 , la partie non cohérente avec $y_1(t)$ est $s(t) + b_2(t)$. Le rapport signal-à-bruit "apparent" est alors

$$\frac{P_s + P_{b2}}{P_{b1}}$$

où P_x représente la puissance de $x(t)$ évaluée dans la bande de traitement considérée.

- lors de l'estimation de H_2 , la partie non cohérente avec $y_2(t)$ sera $s(t)$ (auquel pourrait s'ajouter la première erreur d'estimation

$H_1(y_1(t)) - \hat{H}_1(y_1(t))$), et le rapport signal-à-bruit "apparent" sera alors

$$\frac{P_s}{P_{b2}}$$

Ce rapport est évidemment inférieur au rapport $P_s + P_{b1}$ obtenu par une structure parallèle.

$$P_{b2}$$

En effet, la structure parallèle ne profite pas de l'estimation de H_1 et n'éliminera donc pas le bruit $b_1(t)$.



Celui-ci s'ajoutera à la partie non cohérente $s(t) + b_1(t)$ (auquel s'ajouterait l'erreur d'estimation de H_1) avec $y_2(t)$.

Il est donc intéressant de commencer le traitement par l'estimation du filtre dont l'entrée de référence donne la meilleure cohérence (la plus proche de l'unité) avec le signal bruité $x(t)$. Cela équivaut à dire qu'il est préférable de commencer le traitement par le bruit de plus forte puissance.

b Erreurs effectuées

En utilisant les résultats établis en référence [6] , la puissance de l'erreur d'estimation par filtrage de WIENER selon la structure cascade est:

$$P_{ec} = \frac{2}{B_e T} (P_s (2 + \frac{2}{B_e T}) + P_{b2} (1 + \frac{2}{B_e T}))$$

Alors que la puissance de l'erreur d'estimation selon la structure parallèle est :

$$P_{ep} = \frac{2}{B_e T} (2P_s + P_{b1} + P_{b2})$$

L'erreur d'estimation par structure cascade est inférieure à celle de la structure parallèle si

$$P_{b1} > \frac{2}{B_e T} (P_s + P_{b2})$$

Cette condition est presque toujours vérifiée puisque $B_e T \gg 2$ et $P_{b1} > P_{b2}$ par hypothèse. Ceci est en accord avec les exigences de rapport signal-à-bruit faible et bonne précision statistique.

La figure 2 montre l'évolution du rapport des puissances de l'erreur en cascade P_{ec} et de l'erreur en parallèle P_{ep} , en fonction du rapport des bruits perturbateurs $\frac{P_{b1}}{P_{b2}}$.

En pointillés nous avons représenté le rapport théorique et en traits continus un rapport expérimental.

Les données du problème étaient :

- Procédure d'estimation des densités spectrales est : l'algorithme du périodogramme lissé
- Fenêtre de lissage : Fonction de Tuckey
- Nombre de moyennes : $B_e T = 10$
- Le signal à estimer : signal large bande du

type modulation linéaire de fréquence

- Bruits additifs : bruits blancs

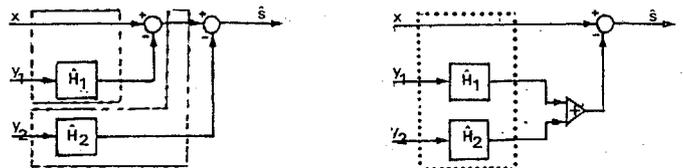
$$\frac{P_s}{P_{b2}} = 0.5$$

Au vu de ces résultats, nous pouvons conclure que la structure cascade est plus performante que la structure parallèle :

$$\frac{P_{ec}}{P_{ep}} < 1$$

Bien entendu, sous réserve d'une bonne précision statistique ($B_e T \gg 2$).

De plus, la méthode en cascade donne de meilleurs résultats en commençant le traitement par le bruit de plus forte puissance.



b. Filtrage en cascade a. Filtrage en parallèle

Figure 1

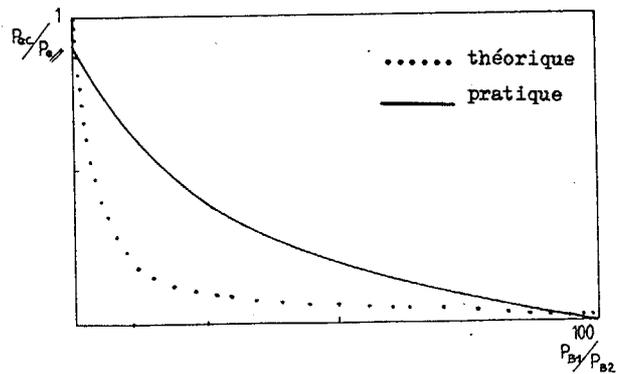


Figure 2

Comparaison de la méthode du filtrage en cascade et de la méthode en parallèle

3 Structure cascade "récursive"

C'est une procédure de filtrage de WIENER selon la structure cascade qui consiste à effectuer une série d'estimations, modifiant ainsi de façon permanente le signal observé initialement.

Le but est d'estimer H_1 (respectivement H_2) en fin d'itération lorsque la cohérence entre $y_1(t)$ et $b_1(t)$ (respectivement entre $y_2(t)$ et $b_2(t)$) devient



la plus proche de l'unité dans la bande de traitement considérée.

Simultanément le rapport signal-à-bruit "apparent" devient le plus faible possible.

Et par conséquent, toutes les conditions d'un traitement efficace seront réunies.

Nous allons présenter un algorithme qui schématise cette procédure pour deux itérations.

a. Algorithme proposé (n = 2 étapes)

Supposons que $P_{b1} > P_{b2}$, nous commencerons alors le traitement par l'estimation de $b_1(t) = H_1(y_1(t))$

1° étape :

- Estimation du filtre H_1 en présence de

$$x = s + H_1(y_1) + H_2(y_2) \text{ et de } y_1$$

- Soustraction $x_1 = x - H_{11}(y_1)$

$$= s + [H_1(y_1) - H_{11}(y_1)] + H_2(y_2)$$

$$= s + b_2 + e_1$$

avec $e_2 = H_1(y_1) - H_{11}(y_1)$

- Estimation du filtre H_2 à partir de x_1 et de y_2

- Soustraction $x_2 = x_1 - H_{21}(y_2)$

$$= s + H_1(y_1) + [H_2(y_2) - H_{21}(y_2)]$$

$$= s + e_2 + b_1$$

avec $e_2 = H_2(y_2) - H_{21}(y_2)$

Remarquons que la soustraction est effectuée entre x et H_{21} et non entre x_1 et H_{21} ; ceci nous permettra de réestimer H_1 dans de meilleures conditions.

2° étape :

- Estimation du filtre H_1 en présence de

x_2 et de y_1

- Soustraction $x_{11} = x_2 - H_{12}(y_1)$

$$= s + [H_1(y_1) - H_{12}(y_1)] + H_2(y_2)$$

$$= s + e_{12} + H_2$$

avec $e_{12} = H_1(y_1) - H_{12}(y_1)$

- Estimation du filtre H_2 en présence de x_{11} et de y_2

- Soustraction $x_{22} = x_{11} - H_{22}(y_2)$

$$x_{22} = s = s + e_{12} + e_{22}$$

avec $e_{22} = H_2(y_2) - H_{22}(y_2)$

Nous allons montrer que la méthode du filtrage cascade appliquée de façon itérative améliore les résultats (par rapport à la méthode du

filtrage en cascade en une étape).

b. Comparaison

La puissance de l'erreur d'estimation du filtre H_1 évalué en n itérations est :

$$P_{e1} = \frac{2}{B_e T} \left(P_s \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{B_e T} \right)^i + \left(\frac{2}{B_e T} \right)^n P_{b2} \right)$$

La puissance de l'erreur d'estimation du filtre H_2 évalué en n itérations est :

$$P_{e2} = \frac{2}{B_e T} \left(P_s \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{2}{B_e T} \right)^i + \left(\frac{2}{B_e T} \right)^{n+1} P_{b2} \right)$$

Lorsque n est grand, nous aurons $P_{e1} \approx P_{e2} \approx \frac{2}{B_e T - 2} P_s$ avec $B_e T \gg 2$

L'erreur totale d'estimation en plusieurs étapes est inférieure à celle en une seule étape:

$$\frac{4}{B_e T - 2} P_s < \frac{2}{B_e T} \left(P_s \left(2 + \frac{2}{B_e T} \right) + P_{b2} \left(1 + \frac{2}{B_e T} \right) \right)$$

IV CONCLUSION

Cette communication résume les conditions d'application du filtrage de WIENER lorsque nous disposons de plusieurs entrées.

Elle résout le problème du choix de la structure du filtre : nous avons montré que la structure cascade est plus performante que la structure parallèle.

De plus, la structure cascade pratiquée en deux étapes (ou encore mieux en n itérations), en commençant par le bruit perturbateur de puissance élevée, améliore considérablement les résultats. Dans tous les cas, le traitement est encore plus efficace lorsque nous augmentons la précision statistique.

Les applications de ces algorithmes d'élimination de bruit additif perturbateur couvrent de nombreux domaines. Notamment en géophysique externe [6], en sismologie [2] et au traitement des signaux magnétiques [3] où ils ont donné des résultats satisfaisants.

Références :

- [1] BENDAT J.C., PIERSOL A.G. : Random Data : analysis & measurement procedures Ed. Wiley - New-York 1971
- [2] FREMONT M.J., GLANGEAUD F. : Traitement d'un doublet de séismes. Rapport CEPHAG n°33/83



-
- [3] GLANGEAUD F., LORENZINO P., LATOMBE C. ;
Filtrage des signaux magnétiques à n. composantes
Rapport CEPHAG n°10/84
- [4] JENKINS G.M., WATTS D.G. : Spectral analysis
& its applications - Holden Day , San Francisco 68
- [5] LACOUME J.L., GLANGEAUD F., LORENZINO P.,
BAUDIS D., PRETET G. : Filtrage des signaux
multicomposantes utilisant les corrélations inter-
composantes . 8° colloque GRETSI pp 319-324
Nice 1981.
- [6] OUAHABI A. : Filtrage des signaux multicom-
posantes.,Thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à
l'INPG Grenoble le 17 mars 1983.
- [7] VAN TREES H.L. : Detection, estimation &
modulation Theory. PART A - Ed. Wiley U.S.A. 1968.