



NICE du 20 au 24 MAI 1985

RECUPERATION DE RYTHME ADAPTATIVE
POUR EGALISEURS NUMERIQUES*

Hikmet SARI et Lydie DESPERBEN

Laboratoires d'Electronique et de Physique Appliquée - 3, avenue Descartes, 94450 LIMEIL-BREVANNES, France

RESUME

Dans cet article nous présentons un nouvel algorithme pour l'optimisation (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de l'instant d'échantillonnage dans des récepteurs comportant un égaliseur numérique. L'algorithme est basé sur la méthode du gradient stochastique simplifié. Le gradient est approché au premier ordre et son estimation se fait par comparaison de deux erreurs quadratiques successives en sortie de l'égaliseur. Ceci est rendu possible grâce à l'utilisation d'une horloge présentant alternativement des avances et des retards de phase.

Une analyse théorique de l'algorithme est effectuée dans deux cas, à savoir, le cas sans bruit et le cas à fort bruit. Ensuite des résultats de simulations sur ordinateur sont présentés démontrant l'influence des différents paramètres sur les performances de l'algorithme.

SUMMARY

A new algorithm is presented for minimum mean-square error timing recovery in digital equalizers. It is based on the simplified stochastic gradient algorithm. The gradient is first replaced by a first-order approximation and its estimation is performed using two consecutive squared errors at the equalizer output. This is made possible since the demodulated signal is sampled using an unbalanced clock with alternative leads and lags in its transitions.

A theoretical analysis of the algorithm is carried out in two cases of interest, namely, the noiseless case and the case with strong noise. Computer simulation results are also reported which show the influence of various factors and parameters on the algorithm performance.

* Etude soutenue par le CNET



I. INTRODUCTION

Il est bien connu que les performances d'un égaliseur numérique synchrone (égaliseur dont les entrées sont des échantillons prélevés à la cadence d'émission des symboles) sont fortement affectées par l'instant d'échantillonnage utilisé. Un mauvais instant d'échantillonnage peut créer une forte distorsion ou même un zéro dans le spectre du signal échantillonné et dégrader considérablement les performances de l'égaliseur [1].

Pour bénéficier au maximum d'un égaliseur adaptatif synchrone, on est donc amené à lui fournir l'instant d'échantillonnage optimal. Cette optimisation implique une structure de récepteur dans laquelle l'asservissement de l'instant d'échantillonnage utilise le signal égalisé. L'optimisation au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'instant d'échantillonnage nécessite la connaissance des échantillons de la dérivée du signal à l'entrée du détecteur [2,3]. Or cette information n'est pas disponible en sortie d'un égaliseur numérique.

Une solution à ce problème a été apportée par Kobayashi [4] qui a proposé de dériver le signal démodulé, d'échantillonner cette dérivée à la cadence symbole et de faire passer ses échantillons dans un égaliseur identique à celui utilisé pour le signal lui-même. Il est clair que cette solution n'est pas attrayante d'un point de vue pratique, puisqu'elle implique une augmentation considérable de la complexité du récepteur (deux égaliseurs au lieu d'un). Des algorithmes simples ont été proposés dans [5], mais aucun d'entre eux ne fournit l'instant optimal. En effet, nos résultats de simulations ont montré que dans beaucoup de cas, les algorithmes en question fournissent des instants d'échantillonnage éloignés de l'optimum.

Dans cet article, nous présentons un nouvel algorithme pour l'optimisation au sens de l'EQM de l'instant d'échantillonnage dans des récepteurs avec un égaliseur numérique. Cet algorithme est présenté au paragraphe III après un bref rappel de la position du problème au paragraphe II. Une évaluation des performances théoriques de l'algorithme est effectuée dans le paragraphe IV. Ensuite des résultats de simulations sur ordinateur sont exposés dans le paragraphe V démontrant l'influence de différents paramètres sur les performances de l'algorithme.

II. POSITION DU PROBLEME

Nous considérons un canal de transmission linéaire et une démodulation parfaite. Le signal démodulé est de la forme

$$x(t) = \sum a_k h(t - kT) + n(t) \quad (1)$$

où $\{a_k\}$ est la séquence de symboles émise, $h(t)$ la réponse impulsionnelle du canal et $n(t)$ le bruit additif. On s'intéresse au cas où $h(t)$ ne vérifie pas le premier critère de Nyquist et où on utilise un égaliseur adaptatif pour compenser l'interférence intersymbole (IIS) résultante et poursuivre les variations éventuelles du canal.

Dans le cas d'un égaliseur analogique, le signal démodulé $x(t)$ entre directement dans l'égaliseur et en ressort sous la forme d'un signal $y(t)$. Ensuite ce signal est échantillonné à la cadence symbole et ses échantillons $\{y_k\}$ sont comparés à des seuils appropriés pour décider des symboles émis.

Soit e_k l'écart entre l'échantillon y_k et le symbole émis correspondant, c'est-à-dire

$$e_k = y_k - a_k \quad (2)$$

L'EQM en sortie de l'égaliseur est donnée par :

$$J = E(|e_k|^2) \quad (3)$$

où $E(\cdot)$ désigne l'opérateur de moyenne d'ensemble, et $|\cdot|$ désigne le module.

L'instant d'échantillonnage optimal, désigné par τ_{opt} , par la suite, peut être obtenu par l'algorithme du gradient stochastique qui s'écrit :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \alpha \frac{\partial |e_k|^2}{\partial \tau} \quad (4)$$

celui-ci peut être mis sous la forme

$$\tau_{k+1} = \tau_k - 2\alpha \operatorname{Re}(y_k e_k^*) \quad (5)$$

où $\operatorname{Re}(x)$ désigne la partie réelle de x , x^* son complexe conjugué et \dot{x} sa dérivée.

Dans un égaliseur analogique, cet algorithme est facile à implémenter. En effet, le signal en sortie de l'égaliseur étant analogique, on peut dériver celui-ci, l'échantillonner et utiliser ses échantillons $\{\dot{y}_k\}$ dans (5). Par contre ces échantillons ne peuvent pas être obtenus à partir de la sortie d'un égaliseur numérique. Devant cette difficulté, Kobayashi [4] a proposé d'utiliser un deuxième égaliseur en parallèle avec le premier et dont les entrées sont les échantillons de la dérivée du signal démodulé. Celui-ci fournirait, en effet, les échantillons $\{\dot{y}_k\}$ nécessaires à l'implémentation de l'algorithme, mais il est clair que cette solution n'est pas très économique. Dans le paragraphe suivant nous allons décrire un algorithme qui a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre.

III. LE NOUVEL ALGORITHME

Manifestement l'algorithme du gradient stochastique fait appel au calcul d'une dérivée (voir eq.(4)) et celle-ci ne peut être calculée d'une façon exacte à partir des échantillons en sortie d'un égaliseur numérique. Pour aboutir à un algorithme simple, nous allons d'abord remplacer la dérivée de l'EQM par une approximation au premier ordre. De plus, nous nous contenterons du signe de cette dérivée approchée. L'algorithme (4) se met alors sous la forme :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \alpha \operatorname{sgn} \frac{|e_k(\tau_k + \Delta\tau)|^2 - |e_k(\tau_k)|^2}{\Delta\tau} \quad (6)$$

où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ désigne la fonction signe et $\Delta\tau$ est un faible retard. Sans aucune perte de généralité nous supposons par la suite que $\Delta\tau$ est positif.

Cet algorithme nécessite à chaque itération le calcul de deux erreurs quadratiques correspondant à des instants d'échantillonnage décalés entre eux de $\Delta\tau$. Par conséquent il n'est pas réalisable, sans une modification supplémentaire, dans un égaliseur numérique où la sortie n'est calculée qu'une seule fois par durée symbole. Pour l'implémenter dans un égaliseur numérique nous modifions l'horloge primaire (l'horloge récupérée) de façon à faire apparaître alternativement des avances et des retards de phase dans ses fronts de montée. Ceci est illustré sur la figure 1.

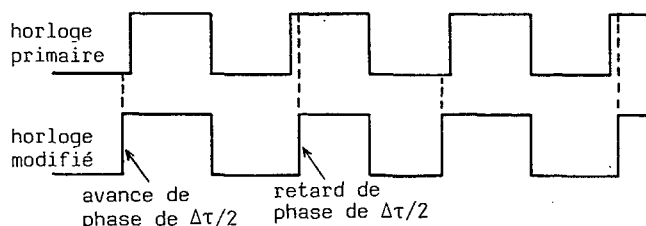


Figure 1 : construction d'une horloge modifiée ayant alternativement des avances et des retards de phases

Maintenant si on utilise cette horloge modifiée pour échantillonner le signal démodulé, deux échantillons successifs à l'entrée de l'égaliseur seront prélevés avec des instants d'échantillonnage respectifs quasiment décalés de $\Delta\tau$. En fait, strictement parlant, le décalage entre deux instants d'échantillonnage successifs ne sera pas égal à $\Delta\tau$, mais à $\Delta\tau \pm \alpha$, car l'horloge primaire étant asservie par l'algorithme (6) ses fronts de montée subissent un décalage de $\pm \alpha$ à chaque itération. Cependant du point de vue pratique, le pas de l'algorithme α étant très faible devant $\Delta\tau$ on a $\Delta\tau \pm \alpha \approx \Delta\tau$. Ainsi, en utilisant l'horloge modifiée, une estimée du gradient approché peut être obtenue à partir de deux erreurs quadratiques calculées à des instants successifs. L'algorithme se met sous la forme finale :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \alpha \operatorname{sgn} (|e_k(\tau_k + \Delta\tau)|^2 - |e_{k-1}(\tau_{k-1})|^2) \quad (7)$$

Naturellement le paramètre $\Delta\tau$ doit être choisi très faible devant la durée symbole T , puisqu'à l'équilibre le signal sera typiquement échantillonné avec les phases $\tau_{\text{opt}} \pm \Delta\tau/2$ et non pas avec la phase optimale τ_{opt} .

Une autre remarque importante est la suivante : jusqu'ici nous avons utilisé des signaux complexes, car nous nous intéressons à des constellations à deux dimensions. Or même dans ce cas, on peut se ramener au cas réel, en remplaçant dans l'algorithme les carrés des modules par les carrés des parties réelles ou des parties imaginaires correspondants. Dans ce cas l'analyse théorique de l'algorithme devient beaucoup plus simple. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

IV. ANALYSE THEORIQUE

L'algorithme que nous venons de décrire correspond à une boucle d'asservissement de phase du premier ordre [6]. Nous allons d'abord caractériser le comparateur de phase de cette boucle et nous donnerons ensuite une expression pour la variance de la gigue de phase à l'état permanent. Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous supposerons des signaux réels et nous écrirons l'algorithme sous une forme simplifiée :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \alpha \operatorname{sgn} (e_k'^2 - e_k^2) \quad (8)$$

e_k étant une erreur calculée avec l'instant d'échantillonnage τ_k et e_k' avec l'instant $\tau_k' = \tau_k + \Delta\tau$.

Nous allons maintenant caractériser le comparateur de phase, c'est-à-dire pour un instant d'échantillonnage τ donné, nous allons calculer la valeur moyenne d'ensemble de $\operatorname{sgn}(e_k'^2 - e_k^2)$. Remarquez que l'erreur instantanée est constituée de l'IIS résiduelle et d'un bruit additif. En supprimant les indices pour simplifier les notations, on peut écrire :

$$e' = z' + n' \quad (9)$$

$$\text{et } e = z + n \quad (10)$$

n et n' étant des échantillons non corrélés d'un bruit gaussien, centré, de variance σ^2 et non corrélé avec le signal émis. Ensuite on fait la décomposition :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} (e'^2 - e^2) &= \operatorname{sgn} (e' - e) \cdot \operatorname{sgn} (e' + e) \\ &= \operatorname{sgn} (Z + N) \cdot \operatorname{sgn} (Z' + N') \end{aligned} \quad (11)$$

où nous avons posé $Z = z' - z$, $Z' = z' + z$, $N = n' - n$ et $N' = n' + n$.

Il s'en suit que N et N' sont aussi non corrélés, gaussiens, centrés, de variance $2\sigma^2$ et non corrélés avec Z et Z' . Par conséquent, en moyennant d'abord par rapport au bruit (conditionnellement à l'IIS)

$$E(\operatorname{sgn}(e'^2 - e^2) | Z, Z') = E(\operatorname{sgn}(Z+N) | Z) E(\operatorname{sgn}(Z'+N') | Z') \quad (12)$$

et on vérifie aisément que

$$E(\operatorname{sgn}(Z+N) | Z) = 1 - \operatorname{erfc}(Z/2\sigma_n) \quad (13)$$

et

$$E(\operatorname{sgn}(Z'+N') | Z') = 1 - \operatorname{erfc}(Z'/2\sigma_n) \quad (14)$$

avec

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-u^2) du$$

En reportant (13) et (14) dans (12) on obtient :

$$E(\operatorname{sgn}(e'^2 - e^2) | Z, Z') = \{1 - \operatorname{erfc}(\frac{Z}{2\sigma_n})\} \cdot \{1 - \operatorname{erfc}(\frac{Z'}{2\sigma_n})\} \quad (15)$$

La deuxième étape du calcul est de moyennner cette expression par rapport aux symboles émis, mais malheureusement, nous ne pourrions le faire que dans deux cas particuliers, à savoir, le cas à fort bruit et le cas sans bruit.

a) Fort bruit

Pour x petit, on peut faire l'approximation :

$$\operatorname{erfc}(x) \approx 1 - 2x/\sqrt{\pi}$$

Par conséquent lorsque le bruit est fort devant l'IIS l'expression (15) peut être approchée par

$$E(\operatorname{sgn}(e'^2 - e^2) | z, z') \approx (z'^2 - z^2) / \pi \sigma_n^2 \quad (16)$$

D'autre part nous avons :

$$z = (1 - h_0(\tau)) a_k + \sum_{i \neq 0} h_i(\tau) a_{k-i} \quad (17)$$

où $\{h_i(\tau)\}$ sont les échantillons de la réponse impulsionnelle échantillonnée avec la phase τ . En moyennant z^2 par rapport aux symboles on trouve :

$$Q \triangleq E(z^2) = \sigma_a^2 \left\{ (1 - h_0(\tau))^2 + \sum_{i \neq 0} h_i^2(\tau) \right\} \quad (18)$$

où σ_a^2 est la puissance moyenne des symboles complexes émis.

De même :

$$Q' \triangleq E(z'^2) = \sigma_a^2 \left\{ (1 - h_0(\tau'))^2 + \sum_{i \neq 0} h_i^2(\tau') \right\} \quad (19)$$

et enfin la caractéristique du comparateur de phase est donnée par :

$$E(\operatorname{sgn}(e'^2 - e^2)) = (Q' - Q) / \pi \sigma_n^2 \quad (20)$$

b) Sans bruit

Dans ce cas l'expression (15) se réduit à :

$$E(\operatorname{sgn}(e'^2 - e^2)) = E(\operatorname{sgn}(z'^2 - z^2))$$

Pour moyennner cette expression par rapport aux symboles, nous allons être contraints de faire une hypothèse supplémentaire : les variables z et z' seront supposées uniformes et non corrélées. L'hypothèse d'uniformité n'est pas du tout irréaliste. En effet nos



simulations avec des canaux affectés d'évanouissements sélectifs [7] ont montré que la densité de l'IIS est très proche de la densité uniforme. Dans le cas général, on peut dire qu'en présence de fortes distorsions la densité de l'IIS ressemble très souvent à la densité uniforme.

Quant à l'hypothèse de non corrélation, celle-ci n'est pas vérifiée si, comme nous l'avons supposé plus haut, l'estimation du gradient se fait à partir de deux erreurs successives. Par contre, toujours en utilisant l'horloge modifiée, l'estimation du gradient peut aussi se faire à partir d'erreurs espacées dans le temps de $2\lambda+1$ durées symbole, et dans ce cas, l'hypothèse de non corrélation est vérifiée si la réponse impulsionnelle du canal est de durée inférieure à $(2\lambda+1)T$.

Sous ces hypothèses et après un calcul assez laborieux, on trouve :

$$E(\text{sgn}(e^{i^2}-e^2)) = \text{sgn}(\Phi) \{1 - (Q/Q') \text{sgn}(\Phi)/2\} \quad (21)$$

où $\Phi = \tau + \Delta\tau/2 - \tau_{\text{opt}}$ représente l'écart de l'instant optimal τ_{opt} .

Après avoir ainsi caractérisé le comparateur de phase, nous allons calculer la variance de la gigue dans le cas d'une boucle à bande étroite. Avec un gain suffisamment petit pour rester dans la zone linéaire de la boucle, on peut écrire :

$$E(\text{sgn}(e^{i^2} - e^2)) = \lambda\Phi \quad (22)$$

λ étant la pente à l'origine du détecteur.

Maintenant reprenons (8) et soustrayons $\tau_{\text{opt}} - \Delta\tau/2$ des deux côtés de cette égalité. On obtient

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \alpha(\text{sgn}(e^{i^2} - e^2)) \quad (23)$$

En élevant cette expression au carré et en moyennant d'abord sur le bruit et les données et ensuite sur l'instant d'échantillonnage, il vient :

$$\langle \Phi_{k+1}^2 \rangle = \langle \Phi_k^2 \rangle - 2\alpha \langle \Phi_k \rangle E(\text{sgn}(e^{i^2}-e^2)) + \alpha^2 \quad (24)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur de valeur moyenne sur τ .

Enfin par passage à la limite et en utilisant (22) on trouve que la gigue de phase à l'état d'équilibre, désignée par σ_Φ^2 , est donnée par :

$$\sigma_\Phi^2 = \alpha/2\lambda \quad (25)$$

Manifestement le calcul de gigue nécessite la connaissance du paramètre λ et celui-ci dépend du canal considéré. Dans le cas d'un canal de Nyquist en cosinus surélevé avec un "roll-off" r on vérifie aisément que λ est donné par :

$$\lambda \approx 2\sigma_a^2 K(r) \Delta\tau/\pi\sigma_n^2 T^2 \quad (26)$$

$$\text{avec } K(r) = (4/3-r/2)\pi^2 - 8r^2 \quad (27)$$

dans le cas à fort bruit, et par

$$\lambda \approx 4/\Delta\tau \quad (28)$$

dans le cas sans bruit.

V. RESULTATS DES SIMULATIONS

En se plaçant dans un contexte de faisceaux hertziens numériques, nous avons effectué des simulations sur ordinateur pour vérifier les performances de l'algorithme présenté. Rappelons ici qu'en faisceaux hertziens, le défaut essentiel est la propagation par trajets multiples affectant les liaisons pendant un

très faible pourcentage du temps. Pendant le reste du temps, la propagation est normale et la transmission se fait essentiellement sans IIS.

Dans les simulations, nous avons utilisé une constellation à 16 états dans laquelle les parties réelle et imaginaire des symboles complexes sont indépendantes et prennent leurs valeurs dans l'ensemble $(\pm d, \pm 3d)$. Le canal était supposé de type Nyquist en cosinus surélevé avec un facteur de "roll-off" r et le rapport signal à bruit (S/B) était défini comme σ_a^2/σ_n^2 . De plus, l'estimation du gradient était effectuée en utilisant seulement les parties réelles des erreurs complexes $\{e_k\}$.

La caractéristique du comparateur est dessinée sur la figure 2 pour trois rapports S/B différents. On remarque une nette décroissance de la pente à l'origine avec une diminution du rapport S/B indiquant une nette augmentation de la gigue de phase. Par contre la zone linéaire (autour de l'origine) devient plus large à des faibles S/B. On remarque également la possibilité de faux accrochages en phase (passage des courbes par zéro avec une pente positive) vers la valeur $\Phi/T = 0.42$, mais un tel évènement n'arrive qu'avec une très faible probabilité et est facilement détectable.

Avec les mêmes paramètres r et $\Delta\tau$ que précédemment nous avons aussi estimé la densité de probabilité de l'erreur de phase normalisée Φ/T , en prenant comme pas $\alpha = T/320$. Cette estimation était effectuée en utilisant une séquence pseudo-aléatoire de 5000 symboles. Les résultats représentés sur la figure 3 montrent l'influence du rapport S/B sur les performances.

Ensuite nous avons examiné l'influence du paramètre $\Delta\tau$. Les résultats théoriques indiquaient qu'en l'absence de bruit, la gigue croît avec $\Delta\tau$. Les résultats de simulations illustrés sur la figure 4 confirment en effet qu'à S/B = 50 dB, la gigue de phase est une fonction croissante de $\Delta\tau$. D'autre part à des rapports S/B plus faibles, nous avons effectivement constaté que la gigue est une fonction décroissante de $\Delta\tau$.

Enfin la figure 5 illustre l'augmentation de la gigue avec le "roll-off" r pour S/B = 40 dB. D'autre part, comme l'indiquaient les résultats théoriques, les simulations ont confirmé que r n'a pas d'influence sur les performances dans le cas sans bruit.

REMARQUES ET CONCLUSIONS

Nous avons présenté un nouvel algorithme pour l'optimisation de l'instant d'échantillonnage dans des récepteurs avec un égaliseur numérique. Ces performances ont été évaluées par calculs dans certains cas et par simulations dans d'autres.

Toutefois on doit souligner le fait que cet algorithme interagit avec l'algorithme d'adaptation des coefficients de l'égaliseur et aussi avec la récupération de porteuse si cette dernière aussi utilise la sortie de l'égaliseur. Nos résultats des simulations ont montré que l'interaction avec la récupération de porteuse à retour de décisions allonge le temps d'acquisition et augmente le bruit à l'état permanent. Quant à l'interaction avec l'algorithme d'adaptation de l'égaliseur, c'est un phénomène encore plus critique qu'il faut maîtriser par un choix judicieux des différents paramètres.



REFERENCES

- [1] D.L. LYON, "Timing Recovery in Synchronous Equalized Data Communication", IEEE Trans. Commun., vol. COM-23, n°2, pp.269-274, February 1975.
- [2] R.D. GITLIN and J. SALZ, "Timing Recovery in PAM Systems", Bell System Tech. J., vol.50, n° 5, pp. 1645-1669, May-June 1971.
- [3] U. MENGALI, "Joint Phase and Timing Acquisition in Data Transmission", IEEE Trans. Commun., vol.COM-25, n° 10, pp. 1174-1185, October 1977.
- [4] H. KOBAYASHI, "Simultaneous Adaptive Estimation and Decision Algorithm for Carrier Modulated Data Transmission Systems", IEEE Trans. Commun. Technol. vol. COM-19, n° 3, pp.268-280, June 1971.
- [5] K.H. MUELLER and M. MÜLLER, "Timing Recovery in Digital Synchronous Data Receivers", IEEE Trans. Commun., vol. COM-24, n° 5, pp.516-531, May 1976.
- [6] F.M. GARDNER, "Phaselock Techniques", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.
- [7] S. MORIDI and H. SARI, "Analysis of Four Decision-Feedback Carrier Recovery Loops in the Presence of Intersymbol Interference", to appear in IEEE Trans. Communications.

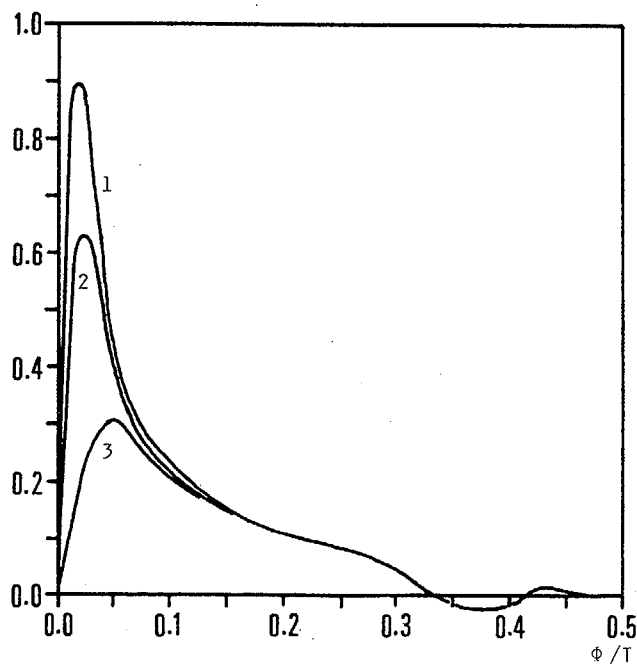


Figure 2 : caractéristique du comparateur de phase ($\Delta\tau = T/40$, $r = 0.5$)

- 1) S/B = 50 dB
- 2) S/B = 40 dB
- 3) S/B = 30 dB

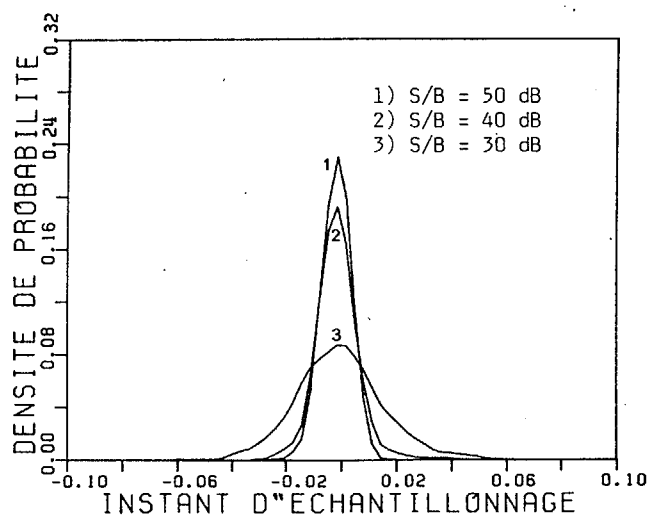


Figure 3 : densité de probabilité de l'erreur de phase normalisée ϕ/T pour trois rapports S/B ($\Delta\tau = T/40$, $r = 0.5$ et $\alpha = T/320$)

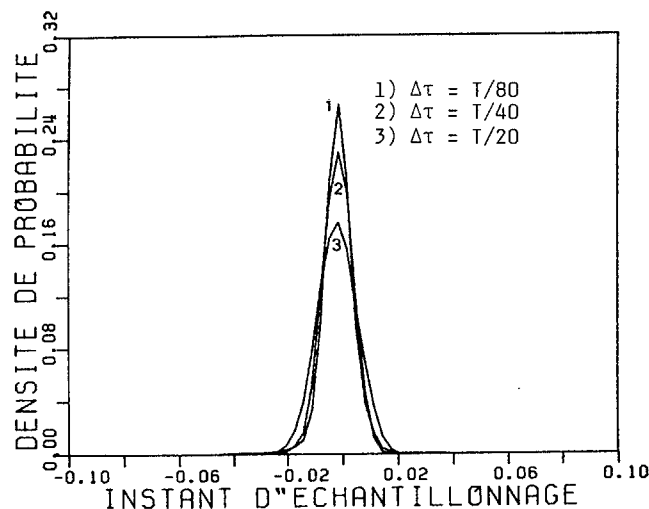


Figure 4 : densité de probabilité de ϕ/T pour trois valeurs de $\Delta\tau$ (S/B = 50 dB, $r = 0.5$ et $\alpha = T/320$)

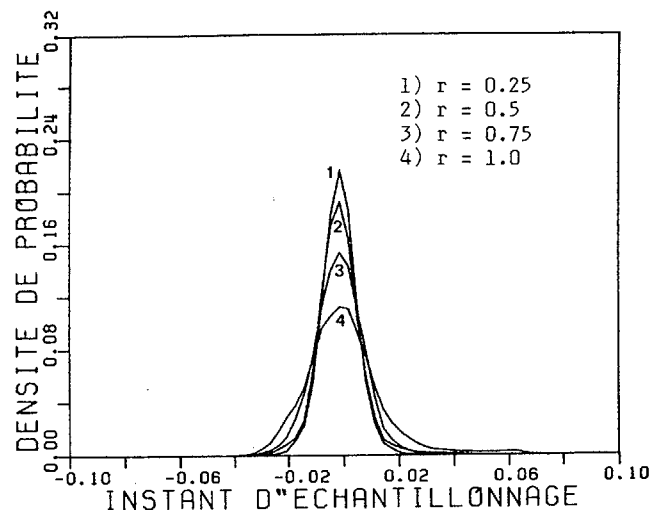


Figure 5 : densité de probabilité de ϕ/T pour quatre valeurs de r (S/B = 40 dB, $\Delta\tau = T/40$ et $\alpha = T/320$).

