



SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

OPTIMISATION DU GAIN D'UNE BOUCLE A VERROUILLAGE DE PHASE
EN MODE DE POURSUITE

Odile MACCHI *

L2S, CNRS - ESE
Plateau du Moulon, 91190 GIF-sur-Yvette, France

RESUME

On considère la poursuite d'une phase Φ_k , variable au cours du temps, par une boucle de phase adaptative du type $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \lambda \Delta_k$ où λ est le gain (positif) de la boucle, et Δ_k un incrément lié à l'erreur de phase en sortie de la boucle. La phase variable Φ_k affecte multiplicativement un signal complexe a_k aléatoire mais connu de puissance A et l'observation est en outre entachée d'un bruit (complexe) additif b_k de puissance B . Le signal d'erreur e_k qui contrôle la boucle de phase inclut donc l'information $a_k(e^{j\Phi_k} - e^{j\varphi_k})$ sur l'erreur de phase, mais aussi le bruit b_k . La boucle est conçue pour minimiser l'erreur $\epsilon = E(|e_k|^2)$, passé le régime transitoire d'initialisation. Pour cela on utilise classiquement pour Δ_k le gradient stochastique de $|e_k|^2$. Les performances de cet algorithme dépendent du rapport signal sur bruit A/B , mais aussi de la puissance d^2 des variations temporelles $d_k = \Phi_{k+1} - \Phi_k$ de la phase à poursuivre.

Dans le présent travail nous démontrons le découplage de l'erreur ϵ en deux termes indépendants, l'erreur de fluctuations, due au seul bruit b_k et proportionnelle à λ et l'erreur de retard due seulement aux variations de phase d_k et qui décroît si λ croît.

Nous montrons que le fonctionnement de la boucle, caractérisé par son gain optimal λ_{opt} et son erreur minimale ϵ_{min} , est entièrement déterminé par le paramètre $y = d(A/B)^{1/2}$ que nous avons dénommé degré de non stationnarité. Le cas le plus intéressant est celui des variations lentes dans lequel y est très inférieur à 1.

Nous effectuons une étude comparative de l'optimisation de la boucle à partir de deux modèles différents pour les incréments de phase d_k : un modèle déterministe qui décrira bien la dérive de fréquence, et un modèle aléatoire centré mieux adapté à la gigue de phase. Les deux modèles conduisent à un gain normalisé λ_{opt} fonction croissante du seul degré y de non stationnarité. La dépendance est respectivement en $y^{2/3}$ et en y pour le modèle déterministe et pour le modèle aléatoire. Ainsi le choix du gain doit-il être beaucoup plus grand pour une phase déterministe que pour une phase aléatoire. L'erreur ϵ_{min} qui en résulte est elle aussi très supérieure. On peut en conclure que le modèle aléatoire centré pour les incréments de phase est en général trop optimiste.

SUMMARY

The tracking of a time-variable phase Φ_k using an adaptive phase-locked-loop of the kind $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \lambda \Delta_k$ is investigated, λ being a positive gain and Δ_k an increment that depends on the phase error at the loop output. The phase Φ_k is a multiplicative noise on the observation of a random complex signal a_k that is known but suffers also from an additive (complex) noise b_k . Thus the error signal e_k controlling the loop includes both a phase information $a_k(e^{j\Phi_k} - e^{j\varphi_k})$ and that noise b_k . The loop is designed to minimize $\epsilon = E(|e_k|^2)$, once it has reached its steady-state. For this sake, one uses the classical stochastic gradient of $|e_k|^2$. This algorithm has performances that depend upon the ratio A/B , where $A = E(|a_k|^2)$, $B = E(|b_k|^2)$, but also upon the power d^2 of the increments $d_k = \Phi_{k+1} - \Phi_k$ of the phase to be tracked.

In the present work, we prove that the error ϵ is decoupled in two independent terms, the fluctuation error originating solely in the noise b_k , and proportional to λ , and the lag error due solely to the time variations d_k and decreasing as λ increases.

We show that optimization of the loop (λ_{opt} and ϵ_{min}) is characterized by the single parameter $y = (A/B)^{1/2}$ denominated "nonstationarity degree". The most interesting case is "slow-variations" where $y \ll 1$.

We establish a comparison between two different models for the phase increments d_k : a deterministic model that describes frequency-offset and a random zero-mean model that is suitable for phase jitter. Both models yield a normalized gain λ_{opt} that is increasing w.r.t. the nonstationarity degree: it is in $y^{2/3}$ and in y for the deterministic and random models respectively. The main conclusion is that the gain choice should be much more cautious for deterministic phase, resulting in a much larger ϵ_{min} , and that the random zero-mean model is, generally, far too optimistic.

* GRECO CNRS Systèmes Adaptatifs en Robotique,
Traitement du Signal, Automatique



I. BOUCLE A VERROUILLAGE DE PHASE NUMERIQUE

1.1. Le problème de la poursuite d'une phase

En traitement du signal, et particulièrement en communication, par exemple pour des problèmes de synchronisation [1], [2], il est fréquent d'avoir à estimer une phase variable Φ_k , où k est le temps (discrétisé). En général la phase Φ_k affecte multiplicativement - par l'intermédiaire de $e^{j\Phi_k}$ - une grandeur a_k que nous appelons signal et qui est le plus souvent aléatoire ; la mesure du résultat est en outre entachée d'un bruit additif (complexe) b_k supposé indépendant de a_k et Φ_k , de sorte que l'information de phase est contenue dans le signal observé

$$x_k = a_k e^{j\Phi_k} + b_k \quad (1.1)$$

On suppose que le signal a_k est connu. Il s'agit de restituer le signal $a_k e^{j\Phi_k}$ ou, ce qui revient au même de poursuivre au cours du temps la valeur Φ_k à l'aide d'un estimateur φ_k qui se base sur les quantités complexes a_k et x_k . Une boucle à verrouillage de phase (BVP) numérique du premier ordre est un algorithme adaptatif d'estimation du type :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \lambda \Delta(e_k, \varphi_k, a_k, x_k) \quad (1.2)$$

contrôlé par l'erreur

$$e_k = x_k - a_k e^{j\varphi_k} \quad (1.3)$$

entre le signal observé et le signal $a_k e^{j\varphi_k}$ restitué grâce à l'estimation de phase φ_k (voir fig. 1).

La récupération de porteuse dans un système de transmission sur fréquence porteuse entre dans ce cadre, $a_k (= e^{j2\pi\nu_0 k T})$ étant alors l'écriture complexe de la porteuse à la fréquence nominale ν_0 , et b_k le bruit à l'instant k accepté par le filtre de la boucle de phase. Dans ce cas on a la propriété de modulation de phase (MP) que $|a_k| = \sqrt{A}$ est constant, qui jouera un rôle important dans la suite. Un autre exemple est donné par l'élimination de la gigue de phase dans les transmissions de données (TD) avec modulation d'amplitude en quadrature [3], a_k étant la donnée complexe transmise qui est restituée à la sortie du récepteur par un détecteur à seuils et b_k le bruit de ligne et celui dû aux interférences résiduelles. Dans ce cas, les variables aléatoires a_k sont généralement indépendantes, ce qui jouera un rôle important dans la suite. Un troisième exemple est l'annulation d'un écho affecté de fluctuations de phase, où a_k est l'écho reconstitué, compte tenu du déphasage [4] et $a_k e^{j\varphi_k}$ l'écho estimé.

Dans la boucle (1.2), le paramètre positif λ appelé gain de la boucle joue un rôle prépondérant. En l'augmentant on accroît la vitesse de l'algorithme et l'on permet la poursuite de variations plus rapides pour la phase vraie Φ_k . Pourtant l'erreur (1.3) qui pilote la boucle contient le bruit b_k qui rend aléatoire l'incrément Δ . Ceci introduit des fluctuations parasites, sans lien avec la phase à poursuivre et qui augmentent avec λ . De la sorte le choix de λ doit résulter d'un compromis entre petit retard de poursuite (grande valeur de λ) et faibles fluctuations de bruit (petite valeur de λ). Il s'agit là d'un fait bien connu expérimentalement, mais non encore parfaitement élucidé théoriquement parce que le calcul de la contribution des deux types d'erreur - retard et fluctuation - dans l'erreur d'estimation $\varphi_k - \Phi_k$ se heurte à des difficultés.

1.2. Choix d'un modèle statistique

Il existe déjà des travaux qui traitent théoriquement du calcul des deux types d'erreur, retard et fluctuations, pour des systèmes adaptatifs plus généraux que le cas particulier des BVP [5]-[9] et destinés à poursuivre les variations d'un estimateur optimal au cours du temps. Ces études visent toutes (plus ou moins) à l'optimisation du compromis entre les deux types d'erreur. Or il apparaît que le résultat est assez différent suivant le modèle statistique adopté pour les variations de phase vraie. En effet l'erreur de retard, bien que toujours décroissante par rapport au gain λ de l'algorithme n'a pas le même type de décroissance si l'on considère que les variations temporelles à poursuivre sont déterministes (cf. [6], [7], [9]) ou aléatoires (cf. [5], [8]).

Dans cet article nous présentons une méthode originale de découplage entre l'erreur de retard et l'erreur de fluctuations qui permet le calcul de l'erreur quadratique moyenne (EQM) totale (somme des deux erreurs) sur la phase

$$\epsilon = \epsilon(\lambda) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} E(|\varphi_k - \Phi_k|^2) \quad (1.4)$$

ou sur le signal lui-même

$$\xi = \xi(\lambda) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} E(|a_k e^{j\varphi_k} - a_k e^{j\Phi_k}|^2) \quad (1.5)$$

La méthode est valable pour les deux cas d'une phase Φ_k à poursuivre déterministe et aléatoire ; elle permet d'optimiser la poursuite de la boucle par le choix du gain λ_{opt} qui minimise (1.4) ou (1.5).

Dans le paragraphe II nous justifions la méthode de découplage. Dans le paragraphe III nous évaluons l'erreur de fluctuation, puis dans les paragraphes IV et V nous calculons l'erreur de retard dans les cas d'une phase Φ_k déterministe ou aléatoire respectivement, et nous optimisons le gain. Les résultats des deux modèles sont comparés en conclusion.

II. DECOUPLAGE ENTRE RETARD ET FLUCTUATIONS

II.1. L'algorithme de poursuite de phase

De nombreux algorithmes sont possibles pour l'estimateur de phase φ_k de l'équation (1.2). Cependant on choisit usuellement un algorithme destiné à minimiser le carré de l'erreur instantanée (1.3)

$$|e_k|^2 = |(a_k e^{j\varphi_k} - a_k e^{j\Phi_k}) + b_k|^2 \quad (2.1)$$

Au bruit additif près (2.1) est l'erreur d'estimation du signal vrai $a_k e^{j\Phi_k}$ due à l'erreur de phase $\varphi_k - \Phi_k$. Il est clair que la valeur $\varphi_k = \Phi_k$ pour l'estimation de phase est celle que minimise la puissance instantanée (2.1) ; il est donc raisonnable de piloter l'estimateur φ_k à l'aide du gradient stochastique de (2.1) :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial |e_k|^2}{\partial \varphi_k} \quad (2.2)$$

C'est là le cas particulier - pour une phase - de l'algorithme dit LMS ou du gradient stochastique. L'introduction de (2.1) dans (2.2) donne, d'après des calculs classiques :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \lambda \operatorname{Im} \left[e_k a_k^* e^{-j\varphi_k} \right] = \varphi_k + \lambda \Delta_k \quad (2.3)$$

où $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ désignent respectivement les parties



**OPTIMISATION DU GAIN D'UNE BOUCLE A VERROUILLAGE DE PHASE
EN MODE DE POURSUITE**

réelle et imaginaire d'un nombre complexe z . L'équation (2.3) traduit la BVP numérique du premier ordre qui est étudiée dans cet article. L'interprétation géométrique en est donnée sur la figure 1, où l'on voit que pour de petits angles, l'incrément Δ_k de l'algorithme n'est autre que l'angle $\psi_k = (\vec{0}_{y_k}, \vec{0}_{x_k})$. Notons respectivement

$$\mu_k = \varphi_k - \phi_k ; \quad d_k = \phi_{k+1} - \phi_k \quad (2.4)$$

l'erreur d'estimation et la variation temporelle (ou incrément) de la phase vraie à poursuivre. L'algorithme s'écrit alors

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \lambda \operatorname{Im} \left[|a_k|^2 e^{j(\phi_k - \varphi_k)} + a_k^* b_k e^{-j\varphi_k} \right] - d_k \quad (2.5)$$

Supposons que l'on peut linéariser l'exponentielle $\exp(-j\mu_k)$. [$\mu_k \ll 1$]. Alors

$$\mu_{k+1} = (1 - \lambda |a_k|^2) \mu_k + \lambda |a_k| \eta_k - d_k \quad (2.6)$$

où l'on a défini le bruit (réel) η_k par

$$\eta_k \triangleq \operatorname{Im} \left(b_k e^{-j(\varphi_k + \phi_k)} \right) ; \quad \phi_k \triangleq \operatorname{Arg}(a_k). \quad (2.7)$$

II.2. Etude du cas "homogène"

Il est utile de considérer d'abord le cas dit "homogène" d'un bruit nul et d'une phase ϕ_k constante, où l'erreur prend la forme multiplicative simple

$$\mu_k^t = (1 - \lambda |a_k|^2) \mu_{k-1}^t = \pi_{-1,t} \mu_0 \quad (2.8)$$

avec

$$\pi_{i,k} \triangleq \begin{cases} \prod_{l=i+1}^{k-1} (1 - \lambda |a_l|^2), & k > i+1 \\ 1, & k \leq i+1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous faisons l'hypothèse de base suivante pour cette suite :

(H-0) Les $|a_k|^2$ sont stationnaires, ergodiques et vérifient

$$E[\operatorname{Log}|1 - \lambda |a_k|^2|] = -\alpha(\lambda) ; \quad \alpha(\lambda) > 0. \quad (2.10)$$

Ce n'est pas une hypothèse forte puisque (2.10) est vraie dès que λ est assez petit et qu'en outre l'ergodisme n'implique nullement l'indépendance. En utilisant l'ergodisme sous la forme :

$$k^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \operatorname{Log}|1 - \lambda |a_j|^2| \rightarrow E\left\{ \operatorname{Log}|1 - \lambda |a_j|^2| \right\}, \quad (2.11)$$

et en passant aux logarithmes dans (2.8), il est clair que $|\mu_k^t|$ a un comportement asymptotique exponentiel en $\exp -\alpha k$, ce qui assure qu'il converge vers 0 grâce à (2.10).

II.3. Découplage entre retard et fluctuations

D'après ce qui précède l'erreur d'estimation provient des deux termes $\lambda \eta_k$ et $-d_k$, dit "non homogènes" dans l'algorithme (2.6). Introduisons les algorithmes auxiliaires

$$\mu_{k+1}^f = (1 - \lambda |a_k|^2) \mu_k^f + \lambda \operatorname{Im}(b_k a_k^* e^{-j\varphi_k}) ; \quad \mu_0^f \triangleq 0 \quad (2.12f)$$

$$\mu_{k+1}^r = (1 - \lambda |a_k|^2) \mu_k^r - d_k ; \quad \mu_0^r \triangleq 0 \quad (2.12r)$$

On a clairement $\mu_k = \mu_k^f + \mu_k^r + \mu_k^t$ car les deux membres suivent la même équation d'évolution, à partir des

mêmes conditions initiales $\mu_0 = \mu_0^t$. Le terme μ_k^t donné par (2.8) est la partie transitoire de l'erreur qui décroît vers zéro. En régime permanent, pour k assez grand on pourra donc écrire $\mu_k = \mu_k^f + \mu_k^r$ ce qui fait apparaître la décomposition entre les deux types d'erreurs. En effet d'après (2.12f) et (2.12r) l'erreur de fluctuations μ_k^f ne dépend que de la suite des bruits η_k et pas des incréments de phase d_k , tandis que l'erreur de retard μ_k^r ne dépend que de la suite des phases ϕ_k (par les d_k) et pas des bruits de mesure η_k .

Pour calculer les statistiques de μ_k^f et μ_k^r et en particulier leur intercorrélation, nous faisons les deux hypothèses suivantes

(H-1) Les variations $\{d_k\}$ de la phase ϕ_k sont indépendantes des signaux $\{a_j\}$ et des bruits de mesure $\{b_j\}$,

(H-2) La suite $\{b_k\}$ des bruits est stationnaire, indépendante, centrée et indépendante des signaux $\{a_j\}$.

Ce sont là des hypothèses peu contraignantes, vérifiées dans la plupart des applications, en particulier celles mentionnées en introduction. Elles laissent ouvertes la possibilité de choisir pour d_k un modèle déterministe ou aléatoire et ainsi conservent une grande généralité au résultat.

Il faut remarquer que la suite $\{\eta_k\}$ ne satisfait pas les hypothèses (H-1), (H-2) car les $\{d_k\}$ sont liés aux $\{\eta_k\}$ par l'intermédiaire des estimations φ_k ; de plus la suite $\{\eta_k\}$ ne peut être indépendante à cause de la corrélation introduite par les angles φ_k et ϕ_k . De la sorte, et même lorsque l'erreur de phase μ_k reste petite, la poursuite d'une phase n'est pas un cas particulier d'identification d'un modèle linéaire à une dimension.

Pour prouver le découplage entre μ_k^f et μ_k^r on développe (2.12) selon

$$\mu_k^f = \lambda \sum_{i=0}^{k-1} \pi_{i,k} \operatorname{Im}(b_i a_i^* e^{-j\varphi_i}) \quad (2.13f)$$

$$\mu_k^r = - \sum_{l=0}^{k-1} \pi_{l,k} d_l. \quad (2.13r)$$

En développant le produit on voit, grâce à (H-1), (H-2), que la variable b_i est indépendante de toutes les autres variables aléatoires qui interviennent. Comme $E(b_i) = 0$, on obtient $E(\mu_k^f \mu_k^r) = 0$, soit

$$E(\mu_k^2) = E(\mu_k^{f2}) + E(\mu_k^{r2}). \quad (2.14)$$

On peut appliquer un raisonnement similaire à l'erreur (1.5) qui affecte le signal restitué par la 3VP : celle-ci admet une décomposition en transitoire, fluctuation et retard, et en régime permanent, et on a le découplage

$$E(|a_k|^2 \mu_k^2) = E(|a_k|^2 \mu_k^{f2}) + E(|a_k|^2 \mu_k^{r2}). \quad (2.15)$$

III. ERREUR DE FLUCTUATIONS

Pour calculer $E(\mu_k^{f2})$, l'hypothèse suivante dite de "bruit circulaire" est utile

$$(H-3) \quad E[\operatorname{Re}\{b_k\}^2] = E[\operatorname{Im}\{b_k\}^2] ; \quad E[\operatorname{Re}\{b_k\} \cdot \operatorname{Im}\{b_k\}] = 0$$

car elle pallie à la non indépendance des η_k . Ce type



de bruit est très fréquent en pratique. En élevant (2.13f) au carré il vient :

$$E(\mu_k^{f2}) = \lambda^2 \frac{B}{2} \sum_{i=0}^{k-1} E\left((\pi_{i,k})^2 |a_i|^2\right), \quad (3.1)$$

où $B = E(|b_k|^2)$ est la puissance du bruit de mesure. Puisque les $|a_k|^2$ sont stationnaires on a successivement

$$E\left((\pi_{i,k})^2 |a_i|^2\right) = E\left((\pi_{0,k-i})^2 |a_0|^2\right), \quad (3.2)$$

$$E(\mu_k^{f2}) = E(\mu_{k-1}^{f2}) + \lambda^2 \frac{B}{2} E\left((\pi_{0,k})^2 |a_0|^2\right). \quad (3.3)$$

Ainsi $E(\mu_k^{f2})$ est une série positive, pour laquelle convergence et bornitude sont équivalentes. La démonstration de bornitude [10] est basée sur le fait, mentionné en II.2 que le produit (aléatoire) $\pi_{0,k}$ a un comportement asymptotique en $e^{-\alpha k}$, ce qui assure la sommabilité de (3.3). Nous avons donc prouvé l'existence d'une valeur limite, soit $f(\lambda)$, pour l'erreur de fluctuation μ_k^f sur la phase φ_k . Naturellement on peut prouver de la même manière que l'erreur $E(|a_k|^2 \mu_k^{f2})$ sur le signal admet une limite $F(\lambda)$, que nous évaluons maintenant. Pour cela on prend le carré, puis la moyenne de la récursion (2.12f) sur l'erreur de phase :

$$E(\mu_{k+1}^{f2}) = E\left\{(1-\lambda|a_k|^2)^2 \mu_k^{f2}\right\} + 2\lambda E\left\{|a_k| \eta_k (1-\lambda|a_k|^2) \mu_k^f\right\} + \lambda^2 E(|a_k|^2 \eta_k^2). \quad (3.4)$$

Les hypothèses (H-1), (H-2), (H-3) entraînent aisément que le terme croisé est nul et que $E(|a_k|^2 \eta_k^2) = AB/2$, en notant $A = E(|a_k|^2)$ la puissance du signal. En passant alors à la limite dans (3.4) il vient :

$$E(|a_k|^2 \mu_k^{f2}) - \frac{\lambda}{2} E(|a_k|^4 \mu_k^{f2}) \rightarrow \frac{\lambda AB}{4}, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Le résultat (3.5) donnera $F(\lambda)$ si l'on sait relier entre eux les moments $E(|a_k|^2 \mu_k^{f2})$ et $E(|a_k|^4 \mu_k^{f2})$. Ceci est possible pour les exemples évoqués en I.

Exemple n° 1 (MP). C'est le cas où $|a_k| = \sqrt{A}$. Alors on a :

$$f(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{A} = \frac{B}{2} \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda A}. \quad (3.6)$$

Exemple n° 2 (ID). C'est le cas de variables a_k indépendantes. Alors a_k et μ_k^f sont indépendants d'après la récursion (2.12). En introduisant l'indice $m = E(|a_k|^4)/(E|a_k|^2)^2$, toujours au moins égal à 1, (3.5) s'écrit :

$$f(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{A} = \frac{B}{2} \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda mA}. \quad (3.7)$$

Dans les deux cas le résultat est obtenu sous condition de convergence de l'erreur μ_k^f , ce qui est assuré par (2.10). Une condition suffisante est que λmA soit inférieur à 2. Les résultats (3.6) et (3.7) deviennent identiques lorsque le gain de la boucle devient très petit au sens où

$$\lambda mA \ll 2 \quad (3.8)$$

C'est un cas très important en pratique. Il correspond aux variations de phase dites lentes, et nous l'étudierons plus loin. **L'erreur de fluctuations, toujours proportionnelle au bruit de mesure est en outre proportionnelle au gain λ :**

$$f(\lambda) = \lambda B/4 \quad (3.9)$$

Remarque. Ce résultat est deux fois plus faible que celui qu'on pouvait attendre d'après la théorie connue [5] en identification linéaire, où un bruit additif B' conduit à une erreur de fluctuation $\frac{B'\lambda}{2-\lambda A}$. Ceci

s'explique aisément : dans l'algorithme (2.5) ou (2.6) de la BVP, la partie bruit $\lambda \text{Im}(a_k^* e^{-j\varphi_k} b_k)$ a une puissance réduite de moitié par rapport à l'algorithme usuel car la partie réelle n'est pas prise en compte.

IV. MODELE DE PHASE DETERMINISTE

Nous calculons maintenant l'erreur de retard $E(\mu_k^r) = r(\lambda)$ en supposant que d_k est une variable déterministe. Dans le cadre de cette étude, nous nous restreindrons au cas, fondamental pour les applications, de la dérive de fréquence : $d_k = d$. D'après (2.13r)

$$\mu_k^r = -d \left[\left[1 + (1-\lambda r_{k-1}^2) + (1-\lambda r_{k-1}^2)(1-\lambda r_{k-2}^2) + \dots + (1-\lambda r_{k-1}^2) \dots (1-\lambda r_1^2) \right] \right] \quad (4.1)$$

On a vu en II.2 par des techniques d'ergodisme que l'erreur transitoire $\mu_k^r = (1-\lambda r_{k-1}^2) \dots (1-\lambda r_0^2) \mu_0$ a un comportement asymptotique exponentiel en $e^{-\alpha k}$. Les termes (aléatoires) qui composent μ_k^r sont analogues. On peut démontrer qu'ils sont sommables et convergent vers une **variable aléatoire** proportionnelle à d , dont il faut estimer le moment d'ordre 2. Pour cela on peut utiliser la même technique qu'au paragraphe III par passage à la limite sur la formule de récursion (2.12r) après moyennage. Pour l'ordre 1 il vient :

$$E(|a_k|^2 \mu_k^r) \rightarrow -d/\lambda. \quad (4.2)$$

Pour l'ordre 2, il vient :

$$2\lambda E(|a_k|^2 \mu_k^r)^2 - \lambda^2 E(|a_k|^4 \mu_k^r)^2 + 2dE(\mu_{k+1}^r) \rightarrow -d^2. \quad (4.3)$$

Pour aller plus loin reprenons les exemples 1 et 2.

Exemple 1. ($|a_k| = \sqrt{A}$). Il vient facilement

$$r(\lambda) = \frac{d^2}{\lambda^2 A^2}; \quad (4.4)$$

d'où avec l'erreur de fluctuations (3.6), l'EQM totale.

Exemple 2. (Indépendance des a_k). Alors (4.2)-(4.3) entraînent :

$$r(\lambda) = \frac{d^2}{\lambda^2 A^2} \cdot \frac{2 - \lambda A}{2 - m\lambda A}. \quad (4.5)$$

D'où l'EQM totale en ajoutant (3.7).

Les retards (4.4) et (4.5) sont valables sous la condition suffisante λmA inférieur à 2. Leur trait commun fondamental est d'être **inversement proportionnels au carré du gain**. Leurs valeurs seront égales pourvu que le gain soit faible, selon (3.8). Ceci conduit à la forme particulièrement simple de l'erreur totale :

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\lambda B}{4} + \frac{d^2}{\lambda^2 A^2}. \quad (4.6)$$

Optimisation du gain de boucle

La première remarque importante est que l'erreur d'estimation du signal $\varepsilon(\lambda)$ normalisée par le bruit de mesure B s'écrit à l'aide des deux seuls paramètres

$$v = \lambda A; \quad y^2 = d^2 A/B \quad (4.7)$$

et prend la forme simplifiée

$$\varepsilon(\lambda)/B \triangleq \eta(v) = \frac{v}{4} + \frac{y^2}{v^2} \quad (4.8)$$

La normalisation (4.7) du gain de l'algorithme par l'inverse de la puissance du signal est coutumière. Le paramètre y sera appelé degré de non-stationarité.



OPTIMISATION DU GAIN D'UNE BOUCLE A VERROUILLAGE DE PHASE EN MODE DE POURSUITE

Il augmente avec l'amplitude d des variations de phase : il est défini d'une manière relative, en référence au bruit de mesure par d^2/B : les variations de phase ne peuvent être déclarées lentes dans l'absolu. Elles ne sont jamais lentes si le bruit d'observation est négligeable. Pour une dérive de fréquence donnée, la non-stationnarité à poursuivre est d'autant plus sévère que B est plus faible.

En ce qui concerne la minimisation de l'EQM, on vérifie aisément le résultat suivant, valable dans les exemples 1 et 2 : pourvu que le degré de non-stationnarité y^2 soit plus petit que $(9m+3)/2m^2$ l'EQM $\eta(v)$ possède sur l'intervalle $]0, 2/m[$ un minimum unique plus petit que $2y^{2/3}$. Il faut noter que dans la pratique m ne dépasse jamais 3.

Cas des variations lentes

La forme simplifiée (4.6) est valable si $\lambda mA \ll 2$, ce qui traduit le fait que la BVP génère une estimée φ_k qui varie lentement. Pour qu'elle soit utile (et optimale) il faut donc que la phase vraie Φ_k soit elle aussi à variations lentes, ce qui doit se traduire par une condition indépendante de λ - le gain de boucle n'influe en rien sur la phase à poursuivre - condition qui dépend seulement des données, le signal a_k , le bruit de mesure b_k et les variations de phase d_k . La condition cherchée doit se traduire par le fait qu'en minimisant (4.6) on obtient un gain v_{opt} qui remplit la condition (3.8) sous laquelle l'algorithme est à variations lentes. Or (4.6) admet comme minimum unique

$$\lambda \lambda_{opt} = v_{opt} = 2y^{2/3}. \quad (4.9)$$

La condition cherchée ($m\lambda_{opt} \ll 2$) s'écrit donc simplement $my^{2/3} \ll 1$. Elle ne fait intervenir que y et comme m est au plus de quelques unités elle s'écrit

$$y \ll 1, \quad (4.10)$$

Sous cette condition l'EQM minimum vaut $3y^{2/3}/4$. Elle est proportionnelle à v_{opt} lorsque y varie et inclut une contribution de fluctuations double de la contribution retard.

La condition (4.10) sera dite de "variations lentes". Alors le résultat de l'optimisation est robuste vis à vis des hypothèses sur le signal a_k puisque les cas 1 et 2 qui n'ont pas d'aspect commun conduisent au même gain optimum (4.9).

V. MODELE DE PHASE ALEATOIRE

Nous calculons ici le retard - et nous optimisons la boucle - pour une variable d_k aléatoire centrée. Dans le cadre de cette étude nous nous restreindrons au cas où la suite $\{d_k\}$ est stationnaire et indépendante, ce qui constitue un modèle acceptable de la gigue de phase, elle-même très importante dans les applications. En appelant d^2 la variance des d_k il vient d'après (2.13r)

$$E(\mu_k^2) = d^2 \sum_{i=0}^{k-1} E(\pi_{i,k}^2). \quad (5.1)$$

La technique de calcul est la même qu'au paragraphe III : (5.1) est une série positive pour laquelle la bornitude entraîne la convergence. De la même manière toute quantité du type $E(|a_k|^2 \mu_k^2)$ admet une limite, que nous évaluons en utilisant les propriétés $E(d_k) = E(|a_k|^2 \mu_k^2) = 0$. Il vient

$$E(|a_k|^2 \mu_k^2) - \frac{\lambda}{2} E(|a_k|^4 \mu_k^2) \rightarrow \frac{d^2}{2\lambda}, \quad k \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

La même méthodologie de calcul qu'en III et IV donne les valeurs numériques

$$r(\lambda) = \frac{d^2}{\lambda A(2-\lambda A)} \quad (\text{exemple 1}),$$

$$r(\lambda) = \frac{d^2}{\lambda A(2-m\lambda A)} \quad (\text{exemple 2}).$$

Le trait commun important de ces retards est d'être **inversement proportionnels au gain**, et non plus au carré du gain comme dans le cas de phase déterministe : en aléatoire, le retard est beaucoup moins grand qu'en déterministe. Ce point capital montre que la distorsion de phase la plus sévère est la dérive de fréquence. En ce qui concerne la minimisation de l'EQM (exemples 1 et 2) on vérifie qu'elle possède un minimum unique v_{opt} qui reste inférieur (ou égal) à $\sqrt{2} y$. Cette dernière valeur

$$v_{opt} = \sqrt{2} y \quad (5.3)$$

correspond à l'optimisation de l'EQM totale sur l'estimation du signal dont la forme se simplifie dans l'hypothèse (3.8) de petit gain. Sous sa forme normalisée, cette erreur s'écrit maintenant, d'après (3.9)

$$\eta(v) = \frac{v}{4} + \frac{y^2}{2v}, \quad (5.4)$$

expression qui doit être comparée à (4.8). Le cas des variations lentes est celui où l'optimum correspondant $v_{opt} = \sqrt{2} y$ satisfait effectivement la condition de petit gain soit, d'après (3.8), $my \ll \sqrt{2}$. Comme m est au plus de quelques unités la condition de variations lentes se traduit encore par (4.10), comme dans le cas d'une phase déterministe. L'erreur minimale qui en résulte vaut $\eta_{min} = y/\sqrt{2}$. Elle est proportionnelle à v_{opt} lorsque y varie et elle est également partagée entre fluctuations et retard.

VI. CONCLUSION : COMPARAISON DES MODELES

Sous des conditions fort générales pour le signal a_k (stationnarité, ergodisme) et sous condition d'indépendance du bruit de mesure (bruit blanc, indépendance du signal et des fluctuations de phase) nous avons prouvé rigoureusement que l'EQM sur l'estimation de phase se découple avec le temps en deux termes indépendants, les fluctuations et le retard. En ajoutant la condition de bruit circulaire nous avons prouvé que le terme de fluctuations, dépendant du bruit de mesure est proportionnel au bruit et au gain de boucle, deux fois plus faible qu'avec un modèle d'identification linéaire. Cette erreur augmente avec λ ; tandis que l'erreur de retard décroît si λ augmente. Mais cette décroissance dépend du modèle statistique des variations de la phase vraie, de sorte que le gain de compromis entre les deux erreurs diffère suivant le cas.

C'est le cas d'une phase déterministe correspondant principalement à la dérive de fréquence qui est le plus "dangereux" car l'erreur de retard croît comme $1/\lambda^2$ lorsque le gain est trop petit. C'est beaucoup plus que dans le cas d'une phase aléatoire, correspondant principalement à la gigue de phase, où le retard est en $1/\lambda$ seulement. Pour se préserver d'une grosse erreur due au retard on doit donc choisir un gain nettement supérieur pour le cas d'une phase déterministe. C'est ce qui apparaît très clairement à la comparaison des gains de boucle optimaux (4.9) et (5.3) : λ est $\sqrt{2} y^{-1/3}$ fois plus grand dans le cas déterministe, tandis que y est très inférieur à 1.

