

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

501



NICE du 20 au 24 MAI 1985

ESTIMATION DES PÔLES D'UN SYSTÈME D'ORDRE FINI

B. ROUVRAIS

THOMSON-CSF Laboratoires Electroniques RENNES - Avenue de Belle Fontaine 35510 CESSON SEVIGNE

RESUME

Nous présentons des méthodes nouvelles d'identification pour retrouver les pôles d'un système d'ordre fini en présence d'observations bruitées. On estime les paramètres d'une somme d'exponentielles réelles. La première méthode est basée sur la prédiction rétrograde et la décomposition en valeurs singulières. Un critère sélectionne l'ordre du système. La seconde méthode utilise une représentation d'état. On établit une comparaison entre les deux méthodes.

SUMMARY

We present new identification methods for retrieving the poles of a finite order linear system from noisy measurements. One seeks to estimate the parameters of a sum of real exponentials. The first method is based on linear backward prediction and singular value decomposition. A criterion selects the order of the system. The second method uses a state space formulation. A comparison between the two methods is made.



INTRODUCTION

L'identification d'une somme d'exponentielles réelles est souvent non linéaire. De nombreux exemples couvrent la littérature dans des disciplines telle que la pharmacocinétique ou la médecine nucléaire. Des travaux récents dans le domaine du traitement du signal permettent d'aborder ce problème par des méthodes linéaires. Nous pensons particulièrement à l'estimation des paramètres de sinusoides amorties dont les résultats sont assez prometteurs. Notre travail a consisté à transposer différents algorithmes étudiés dans le cadre général des processus autorégressifs et à moyenne mobile, à la modélisation d'exponentielles réelles. L'approche par modèle prédictif rétrograde est accompagnée d'un critère d'ordre sur le nombre d'exponentielles dans l'observation. La deuxième méthode par représentation d'état tient son originalité dans la manière d'extraire une matrice de transition.

I - PRINCIPE [1], [2], [3]

La réponse impulsionnelle d'un système d'ordre fini composée d'une somme de p exponentielles réelles est représentée par la suite discrète $\{y_n\}$ de période T telle que :

$$y_n = \sum_{k=1}^P \alpha_k \exp(s_k nT)$$

Elle obéit à l'équation aux différences d'ordre p suivante :

$$y_n = - \sum_{m=1}^P a_m y_{n-m}$$

Il est démontré que la covariance de la suite $\{y_n\}$ obéit à une relation de récurrence similaire :

$$\gamma_\ell = - \sum_{m=1}^P a_m \gamma_{\ell-m}$$

tel que :

$$\gamma_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot y_{n+\ell} \quad , \ell \geq 0$$

Les pôles du système sont les racines du polynôme de degré p dont les coefficients sont a_k .

Une autre description du système est donnée par la représentation d'état suivante :

$$x_{n+1} = F x_n$$

$$y_n = H x_n$$

où F et H sont des matrices respectivement de dimension $p \times p$, $1 \times p$. On en déduit que :

$$y_n = H F^n x_0 \quad , n \geq 0$$

$$\gamma_\ell = H P F^{\ell} H^T = H F^{\ell} P H^T \quad , \ell \geq 0$$

tel que :

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x_n^T$$

Les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice d'état F qui peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_p & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ce choix particulier de F établit un lien entre les deux approches.

Cependant on obtient facilement la matrice d'état par factorisation d'une matrice de Hankel A remplie d'échantillons ou de covariances définie par :

$$A = \theta \cdot G$$

où θ est la matrice d'observabilité du système et G est une matrice qui dépend du choix des données de A . C'est ainsi que :

$$\theta = \begin{bmatrix} H \\ H F \\ H F^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta^\dagger = \begin{bmatrix} H F \\ H F^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \theta \cdot F$$

Donc par quelques manipulations matricielles, on remonte aisément à une matrice d'état F telle que :

$$F = (\theta^T \theta)^{-1} \theta^T \theta^\dagger$$

II - METHODES PROPOSEES

2-1- Modèle linéaire de prédiction rétrograde [1]

On fait appel à un modèle linéaire de prédiction rétrograde d'ordre $q > p$ (p est le nombre d'exponentielles dans l'observation). L'équation à résoudre est :

$$y_n = - \sum_{m=1}^q c_m y_{n+m} \quad , n \geq 0$$

ou

$$\gamma_\ell = - \sum_{m=1}^q c_m \gamma_{\ell+m} \quad , \ell \geq 0$$

Il existe une infinité de solutions dont les coefficients c_m appartiennent au polynôme dont les zéros sont composés des vrais pôles du système et de $(q-p)$ pôles parasites.

ESTIMATION DES PÔLES D'UN SYSTÈME D'ORDRE FINI

Nous démontrons que le choix d'une solution à norme minimale permet d'effectuer une séparation entre les vrais pôles et les pôles parasites. Ce qui fournit un critère d'ordre simple pour déterminer le nombre d'exponentielles dans l'observation

2-1-1- Preuve simple du critère d'ordre

La solution à norme minimale équivaut à minimiser la somme des carrés des coefficients du polynôme :

$$C(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_q z^q, \quad c_0 = 1$$

Le théorème de Parseval établit l'égalité :

$$\sum_{m=0}^q c_m^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |C(e^{2\pi i\nu})|^2 d\nu, \quad \text{avec } T=1, \quad z = e^{2\pi i\nu}$$

Puisque C(z) est le produit de deux polynômes B(z) et D(z) contenant respectivement les vrais pôles et les faux pôles, tel que :

$$B(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_p z^p$$

$$D(z) = 1 + d_1 z + \dots + d_{q-p} z^{q-p}$$

L'égalité du théorème de Parseval devient :

$$\sum_{m=0}^q c_m^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |B(e^{2\pi i\nu})|^2 \cdot |D(e^{2\pi i\nu})|^2 d\nu$$

Maintenant supposons que D(z) ait un zéro pour $|z| < 1$. Soit $1/z_i^*$ ce zéro, avec $|z_i^*| > 1$. Alors D(z) se factorise comme suit :

$$D(z) = (1 - z_i^* z) D'(z), \quad \text{avec } D'(0) = 1$$

Considérons le polynôme $D_1(z)$ défini par :

$$D_1(z) = D(z) \cdot \frac{z - z_i}{1 - z_i^* z} \cdot (-1/z_i)$$

sur le cercle unité, nous avons :

$$|D_1(z)|^2 = \frac{1}{|z_i|^2} \cdot |D(z)|^2$$

Et puisque $\frac{1}{|z_i|^2} < 1$, on obtient l'inégalité :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |B(e^{2\pi i\nu})|^2 \cdot |D_1(e^{2\pi i\nu})|^2 d\nu < \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |B(e^{2\pi i\nu})|^2 \cdot |D(e^{2\pi i\nu})|^2 d\nu$$

Ce qui prouve que le polynôme D(z) avec une racine à l'intérieur du cercle unité n'est pas optimal puisque $D_1(z)$ donne une valeur plus petite au critère. Il est donc prouvé que la solution à norme minimale fournit toutes les fausses racines de C(z) à l'extérieur du

cercle unité. En conclusion, l'ordre du système correspond au nombre de pôles à l'intérieur du cercle unité.

2-1-2- Solution à norme minimale

L'approche consiste à résoudre le système linéaire surdéterminé ($Ax=b$) du prédicteur par décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) de la matrice A remplie soit des échantillons, soit des covariances de l'observation. La solution à norme minimale est obtenue en ne retenant que les p valeurs singulières non nulles de A décomposée sous la forme :

$$A = U \Sigma V^T$$

où U, Σ, V, sont respectivement la matrice des vecteurs propres de $\hat{A} A^T$, la matrice diagonale des valeurs singulières de A, la matrice des vecteurs propres de $A^T A$. C'est ainsi que la solution retenue s'écrit :

$$\hat{x} = A^+ b$$

où A^+ est la pseudo inverse de A.

2-2- Représentation d'état

Comme précédemment, on effectue une décomposition en valeurs singulières de la matrice surdéterminée A et on choisit pour matrice d'observabilité :

$$\theta = U_p \Sigma_p$$

où U_p, Σ_p sont respectivement les p vecteurs propres de $A A^T$ associés aux p valeurs singulières non nulles de Σ. C'est ainsi que la matrice d'état F calculée est de rang p.

En dehors de l'approche conceptuelle des deux méthodes énumérées, il existe une différence fondamentale entre elles. La première méthode par modèle prédictif rétrograde subit un deuxième test d'ordre lié au nombre de pôles à l'intérieur du cercle unité venant confirmer le nombre de valeurs singulières retenues de la matrice A. Cet avantage est bénéfique en traitant des observations faiblement bruitées car il a été vérifié que la surestimation de l'ordre par troncature de la S.V.D. avait une influence infime sur la position des vrais pôles. Seuls les faux pôles sont instables. Tandis qu'un ordre surestimé pour l'obtention de la matrice d'état F ne permet pas une facile discrimination entre les vrais et les faux pôles à l'intérieur du cercle unité.



III - SIMULATIONS

Nous avons simulé deux réponses impulsionnelles d'ordre deux qui sont à rapprocher des courbes d'activités de la radioactivité cardiaque et hépatique après injection d'un traceur hépatobiliaire [1]. L'objectif est de fixer les limites de validation d'un modèle en présence de bruit. C'est ainsi que :

$$\begin{cases} y_{1n} = \alpha_{11} z_1^n + \alpha_{12} z_2^n \\ y_{2n} = \alpha_{21} z_1^n + \alpha_{22} z_2^n \end{cases}$$

avec :

$$\alpha_{11} = 15, \alpha_{12} = 30, \alpha_{21} = 140, \alpha_{22} = -140$$

$$z_1 = \exp(s_1 T) = 0,978, \quad z_2 = \exp(s_2 T) = 0,943$$

Nous avons superposé un bruit blanc de puissance :

$$\sigma^2 = 1, \sigma^2 = 4, \sigma^2 = 16, \sigma^2 = 64$$

et comparé les deux méthodes respectivement par représentation d'état et par modèle prédictif rétrograde, à partir de 120 observations ou de 60 covariances définies comme :

$$Y_\ell = \sum_{n=1}^T y_n y_{n+\ell} \quad \forall \ell \in \{1, \dots, T\} \quad \text{avec } T=60$$

Dans le premier cas, les pôles du système sont les valeurs propres d'une matrice d'état d'ordre 2. Dans le deuxième cas, seuls les pôles de module inférieur à l'unité sont pris en compte. La décomposition en valeurs singulières est effectuée sur des matrices de dimensions 60x60 ou 30x30 suivant que la donnée correspond à un échantillon ou à une covariance de l'observation. Les coefficients linéaires α sont obtenus par la méthode des moindres carrés. En outre, pour chaque courbe identifiée, nous avons calculé une erreur quadratique moyenne (E.Q.M.).

DISCUSSION DES RESULTATS

Les tableaux indiquent sans ambiguïté qu'il est préférable de travailler avec les covariances d'une observation bruitée qui ne font pas intervenir la puissance de bruit. En effet, l'addition d'un bruit de puissance relativement faible a un effet perturbateur non négligeable sur la position des vrais pôles lorsque les données sont des échantillons. Et, globalement il semblerait que la diagonalisation d'une matrice d'état est plus robuste au bruit que la recherche des zéros d'un polynôme mais la différence n'est pas très significative.

D'autre part, l'erreur d'identification qui n'est d'ailleurs pas très importante, n'apporte pas un moyen de différenciation entre les deux méthodes.

CONCLUSION

Notre étude a permis de vérifier que le critère d'ordre défini en absence de bruit dans le cadre du modèle prédictif rétrograde conservait un intérêt pour des observations faiblement bruitées lorsque l'algorithme était directement appliqué sur les covariances. L'autre intérêt est lié à la surestimation de l'ordre par troncature des petites valeurs singulières. Elle a une influence infime sur la position des vrais pôles et les faux pôles restent à l'extérieur du cercle unité. C'est un avantage par rapport à l'approche par représentation d'état dont les résultats obtenus à l'ordre correct ne sont guère meilleurs que ceux obtenus par la méthode précédente.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ROUVRAIS : Identification des paramètres d'une somme d'exponentielles réelles. Congrès Jeunes Chercheurs G.B.M. Lille (Septembre 1984).
- [2] S.Y. KUNG, D.V. BHASKAR RAO, K.S. ARUN : New state space and singular value decomposition based approximate modeling methods for harmonic retrieval. I.E.E.E. Automatic Control. Abstract (1983).
- [3] RAMDAS KUMARESAN, DONALD W. TUFTS : Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole zero modeling in noise. I.E.E.E. Trans. on acoustics, speech and Signal processing, vol. 30, n°6, (December 1982).

ESTIMATION DES PÔLES D'UN SYSTÈME D'ORDRE FINI

σ^2	z_1	z_2	α_{11}	α_{12}	E Q M
0	0,978	0,943	15	30	0
1	0,976	0,935	20	25	10^{-2}
4	0,975	0,930	22	23	$4 \cdot 10^{-2}$
16	0,978	0,938	18	26	10^{-1}
64	0,969	/	/	/	/

< Modèle prédictif rétrograde >

σ^2	z_1	z_2	α_{11}	α_{12}	E Q M
0	0,978	0,943	15	30	0
1	0,976	0,937	19	26	$9 \cdot 10^{-3}$
4	0,963	/	/	/	/
16	0,964	/	/	/	/
64	0,967	/	/	/	/

Covariances

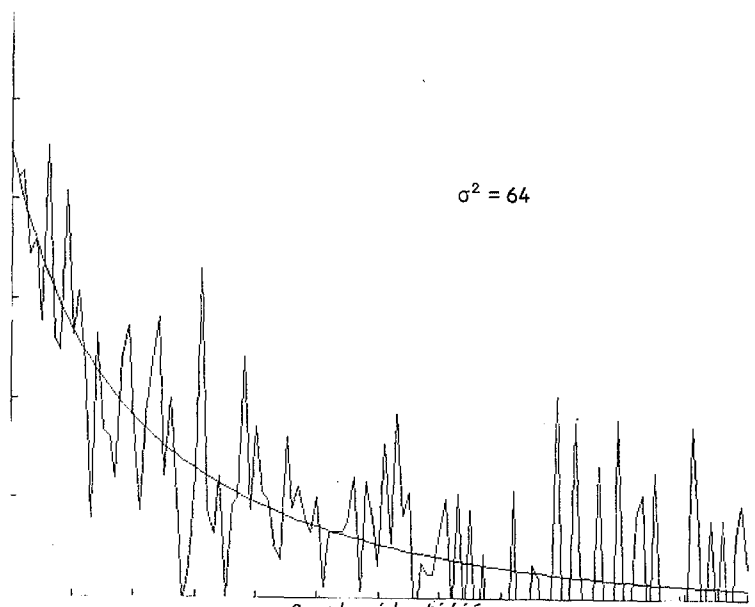
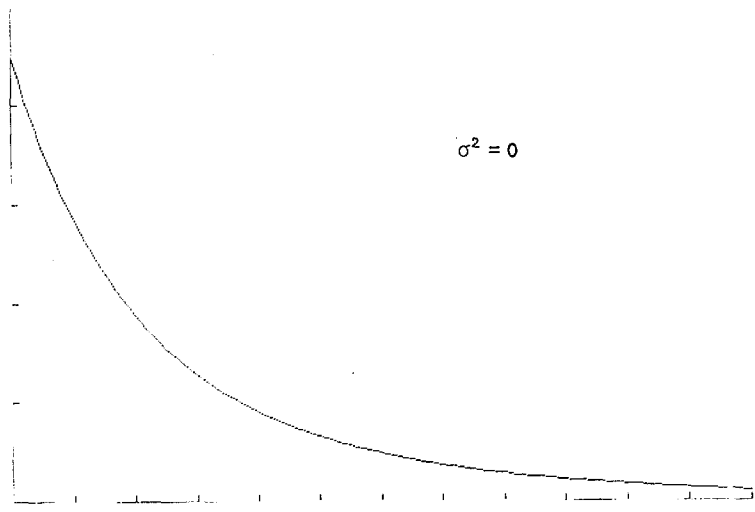
COURBE 1

Echantillons

σ^2	z_1	z_2	α_{11}	α_{12}	E Q M
0	0,978	0,943	15	30	0
1	0,975	0,933	21	24	10^{-2}
4	0,973	0,922	25	20	$5 \cdot 10^{-2}$
16	0,972	0,9	28	17	$2 \cdot 10^{-1}$
64	0,972	0,889	30	15	$4 \cdot 10^{-1}$

< Représentation d'Etat >

σ^2	z_1	z_2	α_{11}	α_{12}	E Q M
0	0,978	0,943	15	30	0
1	0,97	0,903	31	15	$7 \cdot 10^{-2}$
4	0,964	< 0	/	/	/
16	0,964	< 0	/	/	/
64	0,966	< 0	/	/	/





ESTIMATION DES PÔLES D'UN SYSTÈME D'ORDRE FINI

σ^2	z_1	z_2	α_{21}	α_{22}	E Q M
0	0,978	0,943	140	-140	0
1	0,978	0,942	142	-143	$4 \cdot 10^{-2}$
4	0,978	0,942	143	-145	$2 \cdot 10^{-1}$
16	0,977	0,941	146	-150	$6 \cdot 10^{-1}$
64	0,977	0,938	149	-157	2,7

< Modèle prédictif rétrograde >

σ^2	z_1	z_2	α_{21}	α_{22}	E Q M
0	0,978	0,943	140	-140	0
1	0,977	0,947	162	-162	$6 \cdot 10^{-2}$
4	0,975	0,952	203	-203	$3 \cdot 10^{-1}$
16	complexes conjugués		/	/	/
64	complexes conjugués		/	/	/

Covariances

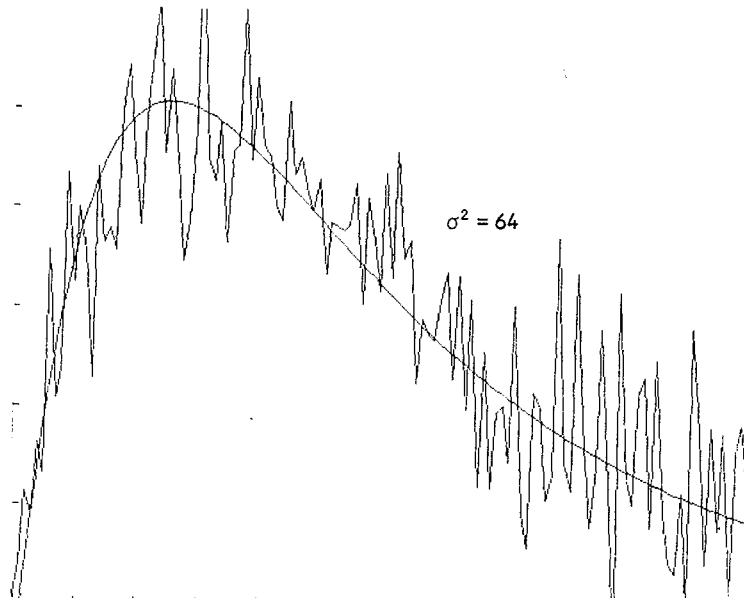
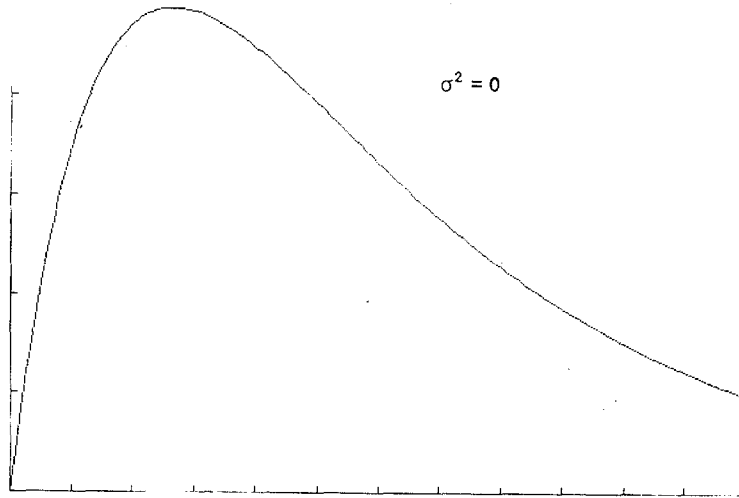
COURBE 2

Echantillons

σ^2	z_1	z_2	α_{21}	α_{22}	E Q M
0	0,978	0,943	140	-140	0
1	0,978	0,943	144	-144	$3 \cdot 10^{-2}$
4	0,977	0,943	147	-149	10^{-1}
16	0,977	0,943	154	-157	$6 \cdot 10^{-1}$
64	0,976	0,941	162	-170	2,7

< Représentation d'Etat >

σ^2	z_1	z_2	α_{21}	α_{22}	E Q M
0	0,978	0,943	140	-140	0
1	0,977	0,943	159	-159	$5 \cdot 10^{-2}$
4	0,976	0,951	189	-188	$2 \cdot 10^{-1}$
16	0,971	0,96	415	-414	$7 \cdot 10^{-1}$
64	complexes conjugués		/	/	/



Courbe identifiée