

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

## ETUDE D'UN FILTRE REJECTEUR DE RAIES A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

Daniel BAUDOIS\*, Philippe JOUVE\*\*

CEPHAG-ENSIEG (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques) - Laboratoire associé au CNRS  
Domaine Universitaire bp 46 - 38402 St-Martin-d'Hères (FRANCE)

---

### RESUME

Le but de ce travail consiste à définir une méthode d'élaboration d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.) rejecteur de raies.

Le signal d'entrée est composé de la somme de N sinusoïdes éventuellement bruitée. Après filtrage, seule une sinusoïde doit subsister, le rapport signal à bruit devant être le plus favorable possible.

Deux approches sont envisagées, mises en oeuvre et comparées.

### SUMMARY

This paper concerns the definition of a method which elaborates a non-recursive data-filter which eliminates pure frequencies.

The input signal is constituted by several frequency-rays which are sometimes disturbed.

After filtering, only one ray is present and the ratio (S/B) must be good.

Two devices are explained, tested and discussed.

(\*) Maître Assistant - Ecole des Ingénieurs Electriciens de Grenoble

(\*\*) Allocataire de recherche - Ecole des Ingénieurs Electriciens de Grenoble



ETUDE D'UN FILTRE REJECTEUR DE RAIES  
A REPOSE IMPULSIONNELLE FINIE

I - INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude du corrélofiltre en tant que système soustracteur de bruit, adaptatif, non bouclé, nous avons mis en évidence [I,II] la nécessité d'utiliser, dans le cas de soustraction de signaux périodiques, une référence bruit-seul constituée de sinusôides d'égaies amplitudes. Nous avons alors défini un système égaliseur [III], transposition du blanchisseur dans le cas de signaux à densité spectrale continue. Le dispositif mis en oeuvre est constitué :

-d'un algorithme d'analyse spectrale rapide utilisant la méthode de PISARENKO [IV], qui réalise la localisation des fréquences présentes dans le signal.

-D'un système multifiltre qui isole sur des voies différentes les sinusôides composant le signal. Les filtres utilisés dans la première version de l'égaliseur [III] sont des filtres numériques récurifs dont la transformée en z de la réponse impulsionnelle est obtenue à partir de la fonction de transfert d'un filtre analogique passe-bande de type BUTTERWORTH [V]. Ce type de filtre a l'avantage d'être insensible à la position réelle des fréquences [il suffit que l'erreur d'estimation soit inférieure à la demi bande passante du filtre] et élimine les composantes spectrales du bruit perturbateur situées à l'extérieur de cette bande. Dans ces conditions, sur chaque voie, le rapport signal-à-bruit est très favorable. En revanche ces filtres étant récurifs, ils présentent des durées de transitoires considérables, de l'ordre de 10 fois la durée nécessaire pour mettre en oeuvre la méthode d'analyse spectrale.

Le présent travail consiste à définir une classe de filtres non récurifs de mémoire équivalente au temps d'analyse spectrale. Différentes approches ont été envisagées et comparées entre elles. Une présentation utilisant le signal analytique associé au signal "référence-bruit" a été retenue pour simplifier les notations de l'exposé. Les calculs et les exploitations numériques ont cependant été menés à partir de la seule connaissance du signal réel, la mise en oeuvre du filtre complexe nécessitant la connaissance, donc l'estimation du signal en quadrature de la "référence-bruit".

II - MISE EN PLACE DU PROBLEME

Dans cette partie, nous nous proposons de caractériser le comportement du filtre, dans la représentation complexe et dans la représentation réelle.

A - Expression de la puissance moyenne du signal en sortie du filtre - Représentation complexe

On suppose que la référence-bruit X(t) se compose de p fréquences (ν<sub>1</sub>, ν<sub>2</sub>, .. ν<sub>p</sub>) éventuellement perturbées additionnellement par un bruit stationnaire au second ordre.

$$X(t) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi\nu_i t + \varphi_i) + B(t)$$

Le signal analytique S(t), associé à X(t) s'écrit alors :

$$S(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j\varphi_i} e^{2\pi j\nu_i t} + B_1(t)$$

Après échantillonnage à la cadence Δ, il vient :

$$X_q = X(q\Delta) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi\nu_i q\Delta + \varphi_i) + B(q\Delta)$$

$$S_q = S(q\Delta) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{2\pi j\nu_i \Delta q} + B_1(q\Delta);$$

$$\alpha_i = A_i e^{j\varphi_i}$$

ν<sub>max</sub> étant la fréquence maximum du signal X(t), on appelle sh (coefficient de Shannon) la quantité :  
sh = 1/(ν<sub>max</sub> Δ)

On se propose de définir un filtre non récurif et homogène à n<sub>1</sub> coefficients, rejetant p-1 des fréquences présentes dans X(t).

On suppose que les amplitudes A<sub>i</sub> sont des variables aléatoires indépendantes et centrées. Dans ces conditions :

$$E \{ A_i A_j \} = E \{ A_i^2 \} \delta_{ij}; \quad E \{ \alpha_i \alpha_j^* \} = E \{ A_i^2 \} \delta_{ij}$$

Soit f le vecteur des coefficients complexes du filtre,

$$f^T = [f_{n-1} \dots f_0]$$

La sortie du filtre à l'instant q s'écrit alors

$$\eta_q = f^T S_q$$

Expression dans laquelle

$$f^+ = [f_{n-1}^* \dots f_0^*]$$

$$S_q = [S_{q-n+1}, \dots, S_q]$$

Dans ces conditions, la puissance moyenne en sortie du filtre s'écrit : E { |η<sub>q</sub>|<sup>2</sup> }

On montre alors que

$$E \{ | \eta_q |^2 \} = f^+ \Gamma_{ss} f, \text{ expression dans laquelle}$$

$$\Gamma_{ss} = E \{ S_q S_q^+ \}$$

En posant

$$z_k^T = [1 \quad e^{2\pi j\nu_k \Delta} \quad \dots \quad e^{2\pi j\nu_k (n-1)\Delta}]$$

Il vient :

$$E \{ | \eta_q |^2 \} = \sum_{k=1}^p E \{ A_k^2 \} f^+ z_k z_k^+ f + f^+ \Gamma_{B_1} f \quad (1)$$

Γ<sub>B<sub>1</sub></sub> étant la matrice de corrélation du bruit B<sub>1</sub>.

B - Expression de la puissance moyenne du signal en sortie du filtre - Représentation réelle

Le filtre réel qui agit sur X(t), équivalent au filtre complexe agissant sur le signal S(t), donc sur X(t) et sur son signal en quadrature possède 2n<sub>1</sub> coefficients g<sub>2n-1</sub> .. g<sub>0</sub>

En posant

$$g^T = [g_{2n-1}, \dots, g_0]$$

$$X_q^T = [X_{q-2n+1}, \dots, X_q]$$

La sortie Y à l'instant q s'écrit :

$$Y_q = g^T X_q$$

La puissance moyenne en sortie du filtre est alors

$$E \{ Y_q^2 \} = \frac{1}{2} E \{ | \eta_q |^2 \}$$

Afin de simplifier les notations, nous posons désormais n = 2n<sub>1</sub>. Le filtre réel se compose de n coefficients notés g<sub>n-1</sub>, .. g<sub>0</sub>.

Le schéma du filtre est alors le suivant :

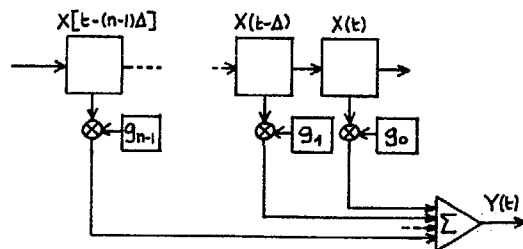


Figure 1

Lorsque le signal X(t) ne se compose que d'une sinusoïde de pulsation ω<sub>k</sub> = 2πν<sub>k</sub>, soit X(t) = A<sub>k</sub> cos ω<sub>k</sub>t, le signal de sortie Y(t) s'écrit : Y(t) = A<sub>k</sub> [ A(g, ω<sub>k</sub>, Δ) cos ω<sub>k</sub>t + B(g, ω<sub>k</sub>, Δ) sin ω<sub>k</sub>t ] expression dans laquelle

ETUDE D'UN FILTRE REJECTEUR DE RAIES  
A REPOSE IMPULSIONNELLE FINIE

$$A(g, \omega_k, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \cos \omega_k i \Delta \quad (2)$$

$$B(g, \omega_k, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \sin \omega_k i \Delta$$

Ce calcul a été conduit en supposant qu'à l'instant t, la phase de X(t) est nulle. Ceci ne gêne en rien la validité des conclusions ultérieures, le calcul de la puissance moyenne de Y(t) étant indépendant de cette phase.

Cette puissance moyenne Pk est égale à

$$P_k = \frac{A_k}{2} [ A^2(g, \omega_k, \Delta) + B^2(g, \omega_k, \Delta) ]$$

Lorsque X(t) est la somme de p sinusoïdes additivement perturbées par un bruit B(t), Y(t) a pour puissance moyenne

$$P_T = \sum_{k=1}^p P_k + P_F,$$

P<sub>F</sub> étant la puissance du bruit B<sub>F</sub>(t), résultat du filtrage de B(t) par le filtre rejecteur. Lorsque B(t) est un bruit blanc de densité spectrale  $\sigma_B^2$ ,

$$P_F = \sigma_B^2 \sum_{i=0}^{n-1} g_i^2$$

III - MISE EN OEUVRE DE DEUX SOLUTIONS AU PROBLEME DE REJECTION DE RAIES

A - Première approche :

Elle consiste à annuler le gain complexe (donc la composante de la puissance moyenne de Y(t) aux fréquences  $\omega_k$  à rejeter et à rendre maximum le rapport signal à bruit S/B à la fréquence à laisser passer. A partir des relations établies en représentation complexe (1) il vient

$$\begin{cases} f^+ z_k = 0 & \forall \text{ fréquences à rejeter} \\ \frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B,B} f} \text{ maximum pour la fréquence } \omega_k \text{ à laisser passer} \end{cases} \quad (3)$$

L'expression à maximiser étant une fraction rationnelle vis-à-vis des coefficients f<sub>i</sub>, on a simplifié le problème en recherchant un filtre sous-optimal, solution du problème consistant à rendre maximum  $\frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B,B} f}$  pour la fréquence  $\omega_k$  à laisser passer sous la contrainte d'obtenir une puissance de bruit en sortie constante (par exemple égale à 1).

Lorsque le bruit B<sub>1</sub>(t) est blanc, de densité spectrale de puissance moyenne  $\sigma_{B_1}^2$ ,

$$I_{B_1, B_1} = \sigma_{B_1}^2 I \quad \text{et} \quad \frac{f^+ I_{B_1, B_1} f}{f^+ I_{B_1, B_1} f} = \sigma_{B_1}^2 \sum_{k=1}^{n-1} |F_k|^2$$

Dans ces conditions, le système (3) est remplacé par :

$$\begin{cases} f^+ z_k = 0 & \forall \text{ fréquences à rejeter.} \\ \sigma_{B_1}^2 \sum_{k=1}^{n-1} |F_k|^2 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

$\frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$  maximum pour la fréquence  $\omega_k$  à laisser passer.

En représentation réelle le système d'équations équivalent au système (4) est obtenu en écrivant que P<sub>1</sub> = 0, P<sub>2</sub> = 0, .. P<sub>p</sub> = 0  $\forall$  fréquence à rejeter P<sub>B</sub> = 1 (puissance du bruit en sortie) (5) P<sub>k</sub> maximum pour la fréquence  $\omega_k$  à laisser passer. En pratique la condition P<sub>j</sub> = 0 est équivalente à l'ensemble des deux conditions.

$$A(g, \omega_k, \Delta) = 0 \quad B(g, \omega_k, \Delta) = 0$$

La résolution du système (5) est obtenue en utilisant la méthode de Lagrange. Le Lagrangien Q(g) s'écrit

$$Q(g) = P_k + \lambda_b [ \sigma_B^2 \sum_{i=0}^{n-1} g_i^2 - 1 ] + \sum_{i=1}^p \lambda_{i1} [ \lambda_{i1} A(g, \omega_i, \Delta) + \lambda_{i2} B(g, \omega_i, \Delta) ] \quad (6)$$

Les coefficients g<sub>i</sub> sont donc solution du système de 2p+n-1 équations :

$$\frac{\partial Q}{\partial g_0} = 0, \dots, \frac{\partial Q}{\partial g_{n-1}} = 0, \quad A(g, \omega_i, \Delta) = 0 \quad B(g, \omega_i, \Delta) = 0 \quad i=1, \dots, p$$

$$\sigma_B^2 \sum_{i=0}^{n-1} g_i^2 = 1$$

Les 2p+n-2 premières équations sont linéaires vis-à-vis des inconnues. En revanche, la dernière équation est une relation quadratique. Les techniques de résolution des systèmes linéaires ne sont donc pas utilisables directement. Nous avons cependant écrit ce système sous une forme qui permet de le décrire en tant que système linéaire vis-à-vis des 2p-2 inconnues (g<sub>0</sub>, .. g<sub>n-1</sub>,  $\lambda_{i1}$ ,  $\lambda_{i2}$ ), l'inconnue  $\lambda_b$  devenant un paramètre de la matrice du système

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda_b \sigma_B^2 & \cos \omega_k \Delta & \cos 2\omega_k \Delta & \dots & \cos[(n-1)\omega_k \Delta] & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \cos \omega_k \Delta & 1+2\lambda_b \sigma_B^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos[(n-1)\omega_k \Delta] & \dots & \dots & \dots & 1+2\lambda_b \sigma_B^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \omega_p \Delta & \dots & \dots & \dots & \cos[(n-1)\omega_p \Delta] & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sin \omega_p \Delta & \dots & \dots & \dots & \sin[(n-1)\omega_p \Delta] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \omega_1 \Delta & \dots & \dots & \dots & \cos[(n-1)\omega_1 \Delta] & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sin \omega_1 \Delta & \dots & \dots & \dots & \sin[(n-1)\omega_1 \Delta] & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ \dots \\ g_{n-1} \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \dots \\ \lambda_{p1} \\ \lambda_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ce système s'écrit donc

$$M(\lambda_b) \begin{bmatrix} g_0 \\ \dots \\ \lambda_{p2} \end{bmatrix} = 0$$

Il n'aura donc de solutions non nulles que lorsque  $\det \{ M(\lambda_b) \} = 0$

Dans ces conditions, le filtre optimal est obtenu, -en recherchant les valeurs de  $\lambda_b$  qui annulent le déterminant de M

-en résolvant le système matriciel (7) pour chaque valeur de  $\lambda_b$  trouvée. Tous les jeux de coefficients {g<sub>i</sub>}, solutions de (7) étant proportionnels entre eux, le jeu correspondant au filtre recherché est obtenu en imposant la relation

$$\sigma_B^2 \sum g_i^2 = 1.$$

Cette méthode comporte cependant les inconvénients suivants :

- nécessité d'utiliser une technique numérique pour rechercher les zéros du déterminant de M.
- possibilité d'obtention de plusieurs racines  $\lambda_b$ , d'où nécessité de rechercher expérimentalement la solution optimale.
- Difficultés de mise en oeuvre directe de l'algorithme correspondant à un cas donné (p raies, n coefficients) à partir de l'algorithme établi pour un autre cas (p<sub>1</sub> raies, n<sub>1</sub> coefficients).

B - Deuxième approche

L'idée utilisée est parallèle à celle développée par M. LAGUNAS [VI] dans le cadre de ses études sur l'analyse spectrale. Elle consiste à minimiser la puissance totale en sortie du filtre sous la contrainte d'un gain constant pour la fréquence à laisser passer. Ce gain a été choisi égal à 1.

Cette puissance moyenne s'écrit :

$$P_T = \frac{1}{2} E\{|\eta|^2\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p E\{A_k^2\} \frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B_1, B_1} f} + \frac{1}{2} \frac{f^+ I_{B_1, B_1} f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f^+ I_{B_1, B_1} f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$$

Le vecteur f est donc obtenu en écrivant que  $\frac{f^+ I_{B_1, B_1} f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$  est minimum (8)

sous la condition que  $\frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$  soit constant pour la raie de fréquence  $\omega_k$

L'argument de  $\frac{f^+ z_k z_k^+ f}{f^+ I_{B_1, B_1} f}$  caractérise le déphasage entre un échantillon de la composante de fréquence  $\omega_k$  de l'entrée S(t) et l'échantillon de même rang de la filtrée de cette composante. En cherchant dans la représentation réelle, l'équivalent de cette condition (8), nous aboutissons en général à une équation quadratique vis-à-vis des coefficients inconnus.

Cependant, en nous imposant un déphasage nul entre ces deux échantillons, cette relation quadratique est équivalente à un ensemble de deux relations linéaires. Dans la représentation complexe, elle s'exprime par la condition



ETUDE D'UN FILTRE REJECTEUR DE RAIES  
A REPOSE IMPULSIONNELLE FINIE

2ème approche

Le rapport  $[S/B]_s$  défini précédemment n'est significatif que lorsque les zéros du gain complexe sont positionnés exactement sur les valeurs de fréquences présentes dans le signal. Cette méthode n'assurant pas des zéros mais des minimums du gain, il faut donc tenir compte des puissances résiduelles et redéfinir

$$[S/B]_s = \frac{\text{Puissance en sortie de la raie non filtrée}}{\text{Puissance en sortie du bruit + somme des puissances résiduelles}}$$

soit  $[S/B]_s = \frac{[P_k]_s}{\sigma_B^2 \sum g_k^2 + \sum_{j=1}^p [P_j]_s}$  expression dans laquelle

$[P_i]_s$  représente la puissance en sortie de la composante  $\nu_i$ . Dans ces conditions, les valeurs corrigées de fréquence  $\nu_i$  du rapport  $[S/B]_s$  sont respectivement 22.9 et 1.5.

Lorsque pour un écart  $(\nu_4 - \nu_2)$  constant la puissance d'entrée du bruit augmente, le rapport  $[S/B]_s$  diminue. En effet, quelle que soit la configuration, le numérateur de ce rapport est constant et le dénominateur croît proportionnellement à la puissance du bruit.

Pour une puissance de bruit constante en entrée, ce rapport diminue avec l'écart  $(\nu_4 - \nu_2)$ . En effet si  $\sigma_B^2$  augmente, les zéros de puissance ne sont pas toujours assurés, et par conséquent la puissance liée au résidu de filtrage augmente, ainsi que le rapport  $[S/B]_s$ .

C - Conclusions

La seconde approche plus simple à réaliser, a été retenue.

V - SENSIBILITE ET ROBUSTESSE DE LA METHODE

A - Sensibilité

Les courbes précédentes ont été obtenues en reconstruisant  $\int_{-1}^1 xx$  à partir des valeurs exactes des fréquences contenues dans  $X(t)$ .

Les performances sont dégradées si  $\int_{-1}^1 xx$  est estimée à partir des échantillons de  $X(t)$  - la fréquence  $\nu_k$  non éliminée est remplacée par  $\hat{\nu}_k$ , obtenue à partir de l'analyse spectrale.

Dans ces conditions, tout se passe comme si le système tentait de mettre un zéro de gain en  $\nu_k$ , tout en rendant constant le gain en  $\hat{\nu}_k$ . Si  $\nu_k - \hat{\nu}_k$  est plus faible que la résolution fréquentielle du système, la méthode sera peu efficace et le gain en  $\nu_k$  sera peu différent de sa valeur en  $\hat{\nu}_k$ , ce que nous cherchons à obtenir. Lorsque  $\nu_k - \hat{\nu}_k$  est trop grand, il faut agir sur la mémoire du filtre ou sur la puissance du bruit à l'entrée (en ajoutant par exemple un bruit) afin de rendre moins bonne cette résolution. Lorsque  $X(t)$  se compose de  $p$  fréquences pures, le bruit perturbateur étant blanc, de d.s.p.m.  $Q_b$ ,

$$\int_{-1}^1 ss = \sum_{m=1}^p Q_m \frac{z_m^+}{z_m^-} + Q_b \underline{1} \quad (11)$$

Le filtre qui élimine toutes les raies à l'exception de  $\nu_k$  possède un vecteur de coefficients tel que

$$f = \left[ \frac{\hat{z}_k^*}{\hat{z}_k^+ + \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k} \right]; \hat{z}_k = e^{2n j \nu_k \Delta}; \hat{z}_k^T = [1, \hat{z}_k, \dots, \hat{z}_k^{n-1}]$$

La puissance moyenne  $P_F$  de  $\eta_q$ , sortie du filtre rejecteur s'écrit alors :

$$P_F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ss F = \sum_{m=1}^p Q_m \frac{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_m|^2}{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k|^2} + Q_b \frac{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k|^2}{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k|^2} \quad (13)$$

L'expression  $[PF_s]_m = \frac{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_m|^2}{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k|^2}$  représente la valeur du module carré du gain complexe du filtre en  $\nu_m$ . De même, l'expression

$$[PF_B] = \frac{\int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k}{|\hat{z}_k^+ \int_{-1}^1 ss^{-1} \hat{z}_k|^2}$$

représente la valeur de l'intégrale du module carré du gain du filtre. Dans le cas général, l'étude analytique est complexe car demande le calcul de  $\int_{-1}^1 ss^{-1}$ . Celui-ci est possible lorsque  $X(t)$  est constitué d'une seule raie de fréquence  $\nu_0$ , bruitée.

$$\int_{-1}^1 ss = Q_0 \frac{z_0^+}{z_0^-} + Q_b \underline{1}$$

L'étude permet alors une première analyse du fonctionnement du système lorsque l'écart fréquentiel entre les composantes de  $X(t)$  est supérieur à la résolution fréquentielle.

En utilisant la formule Woodburry [VII] qui permet le calcul de  $\int_{-1}^1 ss^{-1}$ ,

$$\int_{-1}^1 ss^{-1} = \frac{1}{Q_b} - \frac{Q_0}{Q_b} \frac{z_0^+}{Q_b + n Q_0} \quad (15)$$

En posant  $\psi_0 = \pi(\nu_0 - \hat{\nu}_0) \Delta$   $R = \frac{Q_b}{Q_0}$  (16)

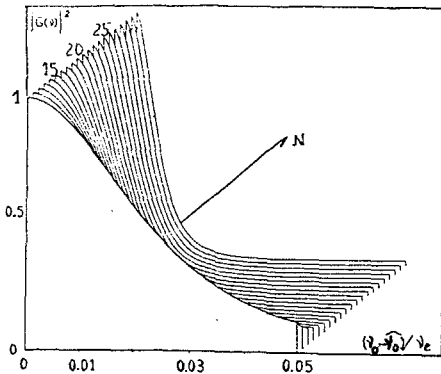
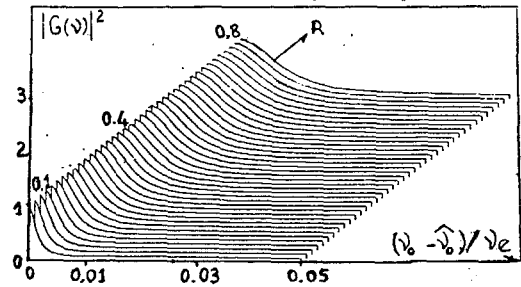
$$[PF_s]_0 = \frac{\sin^2(n\psi_0)}{\sin^2 \psi_0} \frac{R^2}{[nR + n^2 - \frac{\sin^2(n\psi_0)}{\sin^2 \psi_0}]^2} \quad (17)$$

$$[PF_B] = \frac{(n+2R) \frac{\sin^2(n\psi_0)}{\sin^2 \psi_0} + n(n+R)^2 \sin^2 \psi_0}{[nR + n^2 - \frac{\sin^2(n\psi_0)}{\sin^2 \psi_0}]^2}$$

Lorsque l'erreur d'estimation, caractérisée par  $\psi_0$  augmente,  $[PF_s]_0$  diminue. Pour  $2n \gg R$ , le développement limité de  $[PF_s]_0$  s'écrit  $2n [PF_s]_0 =$

$$1 - \frac{2}{3} n(n^2-1) \frac{\psi_0^2}{R} + \dots$$

Un défaut d'estimation de  $\nu_0$  peut alors être compensé par un accroissement de  $R$ , éventuellement par introduction d'un bruit synthétique.



La figure 6 représente pour différentes valeurs du rapport bruit à signal en entrée, l'évolution du module carré du gain complexe du filtre de mémoire 25, en  $\nu_0$ , en fonction de  $\frac{\nu_0 - \hat{\nu}_0}{\nu_e}$ . Les résultats

établis en calculant les valeurs asymptotiques sont confirmés : le gain complexe décroît à partir de 1, d'autant moins vite que  $R$  est grand.

La figure 7 représente pour différentes valeurs de  $n$ , mémoire du filtre, l'évolution du module carré du gain complexe du filtre pour  $R = 0,4$ , en fonction de





ETUDE D'UN FILTRE REJECTEUR DE RAIES  
A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

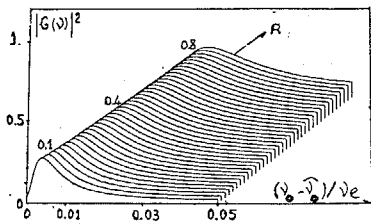


Fig 8

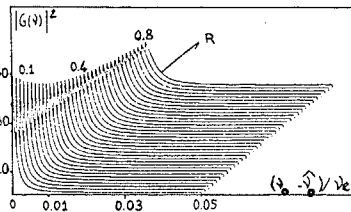


Fig 9

La figure 8 représente l'évolution de la puissance du bruit en sortie  $Q_B \cdot P_{FB}$ , pour un filtre de mémoire  $n=25$ . Cette puissance varie peu en fonction de  $R$  (dès que  $n \gg 2R$ ). Les courbes présentent un maximum dont l'abscisse et l'ordonnée sont à peu près constantes (dans les mêmes conditions).

La figure 9, plus significative représente l'évolution du rapport signal-à-bruit en sortie  $(L_{PFs})_0 / (P_{FB} \cdot R)$

Ce réseau résume les performances du dispositif en fonction de  $n$ ,  $v_0 - v_c$  et  $R$ , et permet donc un choix des paramètres pour une situation donnée.

Ces réseaux de courbes constituent des abaques qui permettent de déterminer la mémoire  $n$  du filtre et  $R$  éventuellement modifié par addition d'un bruit artificiel en entrée, compte-tenu de l'erreur d'estimation  $(v_0 - \hat{v}_0)$ .

**B - Robustesse de la méthode**

Nous avons vu que le rajout d'un bruit artificiel en entrée du filtre améliorerait sensiblement les résultats. Dans une deuxième étape nous avons introduit une constante additive sur la diagonale de la matrice de corrélation du signal.

$$\underline{\Gamma}_{SS} = \sum_{m=1}^P Q_m \underline{z}_m \underline{z}_m^+ + Q_B (1 + \alpha) \underline{I}$$

Cette constante joue le rôle d'un bruit blanc, mais ne dégrade pas le rapport signal-à-bruit d'entrée ni la résolution fréquentielle du système. Quand  $\alpha Q_B > 10$  la méthode devient très robuste. En effet le module carré du gain complexe est sensiblement égal à 1 en  $v_k$  et  $\hat{v}_k$ , ce que nous désirons obtenir. De plus l'allure de cette courbe se rapproche de celle d'un filtre analogique Passe-Bande classique, c'est-à-dire qu'elle ne présente qu'un seul lobe centré autour de  $v_k$  et  $\hat{v}_k$  [fig. 10]. La somme des carrés des coefficients décroît quand  $Q_B$  augmente et tend vers une constante. Ceci a été vérifié numériquement. Le rapport signal-à-bruit en sortie varie avec  $Q_B \alpha$  par l'intermédiaire de la  $\sum g_k^2$  et par conséquent est meilleur quand cette constante est grande

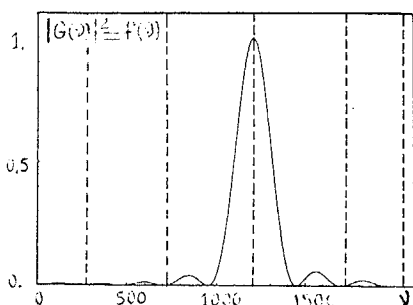


Figure 10

CONCLUSION

Le problème posé doit nous conduire à une solution optimale si nous utilisons une matrice de corrélation correctement estimée. Cette matrice calculée à partir des échantillons du signal d'entrée est entachée d'erreurs d'estimation engendrant une solution sous-optimale rendant la méthode très sensible. En rajoutant une constante sur la diagonale de la matrice de corrélation nous rendons la méthode robuste. L'utilisation de la matrice de corrélation du signal d'entrée nécessaire à l'analyse spectrale de PISARENKO conduit à une mise en oeuvre simple.

Le système proposé constitue alors une bonne méthode de rejection.

BIBLIOGRAPHIE

- [I] Application du corrélofiltre à l'élimination de raies en présence de bruit stationnaire. D. BAUDOIS, A. SILVENT. 7ème Colloque GRETSI Nice, 1979 [18/1-18/8]
- [II] Etude théorique et expérimentale du corrélofiltre. D. BAUDOIS, W. KOFMAN, A. SILVENT. 8ème Colloque GRETSI Nice, 1981
- [III] Etude d'un égaliseur de raies. D. BAUDOIS, E. MOISAN, A. SILVENT, J.C. BALLUET. 9ème Colloque GRETSI Nice, 1983
- [IV] The retrieval of harmonics from a covariance function. V.F PISARENKO. Geophysics 33, 1973
- [V] Les opérateurs cepstres - Application à la séparation d'échos rapprochés. J.C. BALLUET : Thèse de Docteur Ing. Grenoble, Fév. 1979.
- [VI] An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation. Miguel A. LAGUNAS HERNANDEZ. IEEE Transactions on ASSP n°3 Fév. 1984 (pp.170-173)
- [VII] Adaptive array principles : J.E. HUDSON. IEEE Electromagnetic waves series 1981
- [VIII] Iterative inverse filtering approach to the estimation of frequencies of noisy sinusoid. MIROSLAV R. HATAUSEK, SRDJAN S. STANKOVIC and DRAGOLJUB V. RADOVIC. IEEE Transactions on ASSP-31 n°6-Nov. 1983
- [IX] Adaptive Noise Cancelling : Principles and Applications BERNARD WIDROW - John GLOVER. IEEE Transactions VO. 63 NOIZ Décembre 1975
- [X] Adaptive Tracking of multiple sinusoids whose power levels are widely separated. WILLIAM S. HODGKISS and JOE A. PRESLEY. IEEE Transactions VOL ASSP 29 n°3 Juin 1981
- [XI] Adaptive arrays can be used separate communication signals. CHARLES M. HACKETT JR. IEEE Transactions VOL.AES-17 n°2 Mars 1981.