

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

471



NICE du 20 au 24 MAI 1985

SEPARATION DE FREQUENCES MODULEES PROCHES PAR ANALYSE DE
WIGNER-VILLE AUTOREGRESSIVE

P. Flandrin

Laboratoire de Traitement du Signal LA 346 b CNRS ICPI 25 rue du Plat 69288 Lyon Cedex 02 et GRECO 69 SARTA.

RESUME

SUMMARY

On suggère une méthode hybride d'analyse spectrale évolutive adaptée aux signaux formés de composantes proches modulées en fréquence. Celle-ci se propose de combiner les avantages de la transformation de Wigner-Ville avec ceux de l'estimation spectrale par modélisation autorégressive.

On discute les particularités de la transformation de Wigner-Ville (repliement spectral, utilité du signal analytique, nécessité de lissages, influence des phases relatives entre composantes,...) devant être prises en compte dans la modélisation choisie.

L'approche heuristique proposée est illustrée sur un exemple particulier de simulation.

We suggest a hybrid method of evolutive spectral analysis aimed at the resolution of multicomponent time-varying signals. This new method is proposed for taking advantage of the high-resolution properties of both the non-parametric Wigner-Ville transform and parametric spectral estimators.

We discuss special features of the Wigner-Ville transform (aliasing, necessity of using the analytical signal, smoothings, phase shift between components,...) which are to be taken into account in the modeling.

The proposed approach is illustrated on a peculiar simulation example.



1. Introduction.

Les notions de spectre et d'analyse spectrale sont par principe adaptées à des situations stationnaires. Ainsi, si l'on considère l'observation sur une durée limitée de deux sinusoides pures noyées dans un bruit stationnaire, on peut chercher à construire des estimateurs spectraux permettant de "résoudre" des composantes très proches. Quoique la notion de résolution soit délicate, on peut dire que les techniques classiques non-paramétriques à base de transformée de Fourier présentent dans un tel cas une limite fixée essentiellement par la durée finie d'analyse. Une façon d'améliorer cette situation est d'utiliser des estimateurs paramétriques (par exemple autorégressifs AR) réalisant en fait, implicitement et par la modélisation choisie, une extrapolation de la fonction de corrélation en dehors du support correspondant à l'observation [1,2].

Si l'on envisage maintenant une situation non-stationnaire (par exemple des fréquences modulées), le concept même de spectre perd de sa pertinence et doit laisser place à une notion de "spectre évolutif". La définition d'une telle notion n'est en général pas unique et a souvent donné lieu à une première approche : l'analyse spectrale globale est remplacée par une succession d'analyses spectrales partielles réalisées sur des fenêtres d'observation suffisamment courtes pour que le signal y soit supposé stationnaire. Lorsqu'une telle analyse est conduite de manière non-paramétrique, un compromis est à trouver sur la largeur des fenêtres d'analyse puisque les exigences de résolution fréquentielle et de quasi-stationnarité sont contradictoires. Une résolution accrue est alors possible en réalisant une estimation paramétrique susceptible de travailler sur de courtes fenêtres [3]. Le pouvoir de séparation de deux fréquences modulées proches reste cependant dépendant des pentes de modulation [3].

En analyse temps-fréquence non-paramétrique, on sait alors qu'il existe une alternative avantageuse à de telles densités spectrales à court terme (DSCT) : les distributions pseudo-Wigner-Ville lissées (DPWVL) [4,5]. En effet, on montre que, outre un grand nombre de propriétés physiques souhaitables, une DPWVL possède l'avantage de se comporter vis-à-vis d'une modulation de fréquence linéaire comme une DSCT vis-à-vis d'une fréquence pure [6]. Réduisant alors le compromis inhérent aux DSCT d'un ordre de grandeur, l'idée proposée ici est d'obtenir une modélisation de la DPWVL de façon à transposer à cette méthode, en général supérieure aux DSCT, les avantages que la modélisation apporte à ces dernières.

2. DSCT et DPWVL.

Par définition, on conviendra d'appeler DSCT (resp. DPWVL) à temps discret les quantités S_x (resp. W_x) :

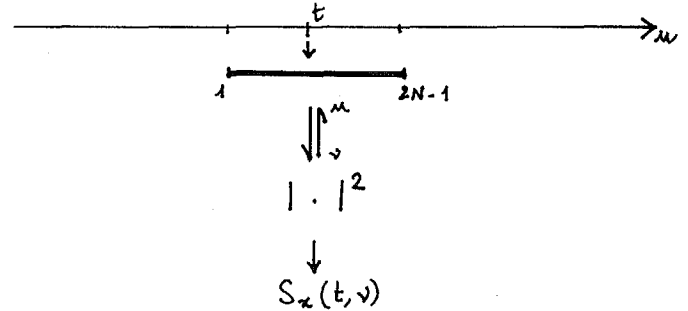
$$S_x(t, \nu) = \left| \sum_{u=-N+1}^{N-1} x(u) h_N(u-t) e^{-i2\pi\nu u} \right|^2 \quad (1)$$

$$W_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} |h_N(\tau)|^2 \sum_{k=-M+1}^{M-1} g_M(k) x(t+k\tau) x^*(t+k\tau) e^{-i4\pi\nu\tau} \quad (2)$$

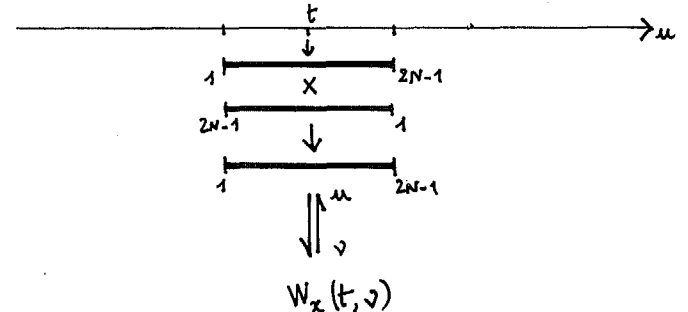
où x est le signal analysé, h_N une fenêtre glissante d'analyse de $2N-1$ points et g_M une fenêtre de lissage de $2M-1$ points.

Posant dans un premier temps $M=1$, il est facile de comparer (1) et (2) en tant qu'analyses à court ter-

me puisque S_x réalise le module carré de la transformée de Fourier de tranches prélevées sur le signal :



alors que W_x réalise la transformée de Wigner-Ville, i.e. la transformée de Fourier, non de la tranche elle-même, mais de son produit avec son image en miroir :



L'introduction d'un lissage ($M>1$) revient simplement à moyenner, autour de la date de travail, de tels vecteurs obtenus par produit retourné.

On voit donc que W_x est obtenu par transformation de Fourier portant sur une transformation bilinéaire des données : c'est ceci qui justifie le bon comportement de la DPWVL vis-à-vis des lois de modulation de fréquence linéaires [6] :

$$x(t) = e^{i\pi\alpha t^2} \xrightarrow[M=1]{N=\infty} W_x(t, \nu) = \delta(\nu - \alpha t) \psi_\alpha(3)$$

En contrepartie, cette même structure bilinéaire crée des termes d'interférence [7] interdisant en général d'interpréter directement le gain en résolution fréquentielle sur une composante en termes de pouvoir de séparation de deux composantes. Nous allons illustrer ceci sur un exemple.

3. Un exemple.

Considérons le signal :

$$x(t) = e^{i2\pi(\varphi_1 + \nu_1 t + \frac{\alpha}{2} t^2)} + e^{i2\pi(\varphi_2 + \nu_2 t + \frac{\alpha}{2} t^2)} \quad (4)$$

pouvant représenter l'approximation linéaire d'une modulation de fréquence sur une fenêtre d'analyse.

A l'instant $t=0$, une représentation idéale en serait :

$$R(t, \nu) = \delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu - \nu_2)$$

Si l'on considère en fait une fenêtre d'analyse gauss-



siennne :

$$h(t) = e^{-\pi \gamma t^2}$$

on montre que l'on a, dans le cas continu ($\mu^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma}$):

$$\begin{aligned} S_{\pi}(0, \nu) \propto & e^{-\frac{2\pi}{\gamma} \frac{1}{\mu^2} (\nu - \nu_1)^2} + e^{-\frac{2\pi}{\gamma} \frac{1}{\mu^2} (\nu - \nu_2)^2} + \\ & + 2e^{-\frac{\pi}{2\gamma} \frac{1}{\mu^2} (\nu_1 - \nu_2)^2} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\gamma} \frac{1}{\mu^2} (\nu - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2})^2} \cdot \cos \left[\frac{\alpha}{\mu^2} (\nu_1 - \nu_2) \left(\nu - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \right] \cdot \cos \left[\frac{\alpha}{\mu^2} (\nu_1 - \nu_2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} W_{\pi}(0, \nu) \propto & e^{-\frac{2\pi}{\gamma} (\nu - \nu_1)^2} + e^{-\frac{2\pi}{\gamma} (\nu - \nu_2)^2} + \\ & + 2e^{-\frac{2\pi}{\gamma} (\nu - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2})^2} \cdot \cos [2\pi (\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \quad (6)$$

On voit donc sur (6) que W_{π} ne dépend pas de la pente de modulation α mais qu'un terme d'interférences (II) existe, dépendant essentiellement des phases relatives $\varphi_1 - \varphi_2$, quel que soit l'écartement fréquentiel. $\delta \nu = \nu_1 - \nu_2$.

La DSCT (5) dépend par contre de α et son terme d'interférences (II) tend vers 0 lorsque $\delta \nu \rightarrow \infty$.

La fig.1a-d illustre la différence de ces comportements lorsque α varie et lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Ceci montre la difficulté d'approcher, dans le plan temps-fréquence, la séparation de composantes multiples par l'intermédiaire de la visualisation d'une représentation temps-fréquence.

4. Limitations et précautions d'emploi de la DPWVL.

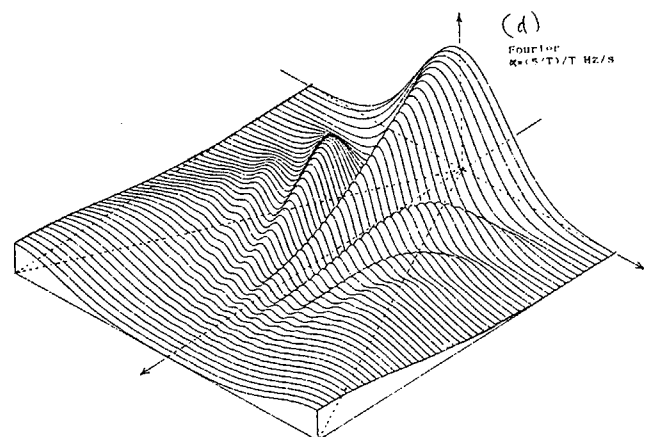
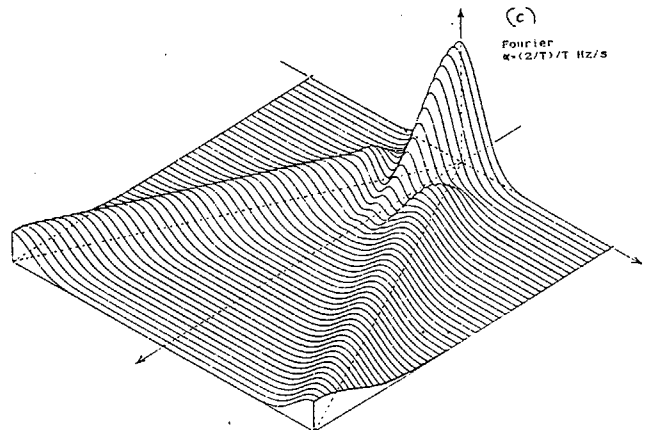
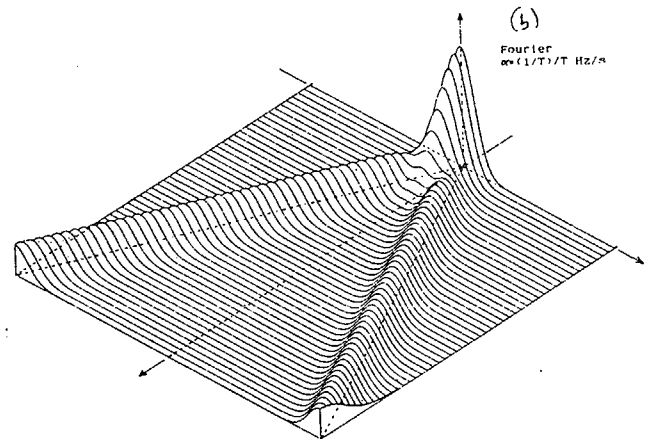
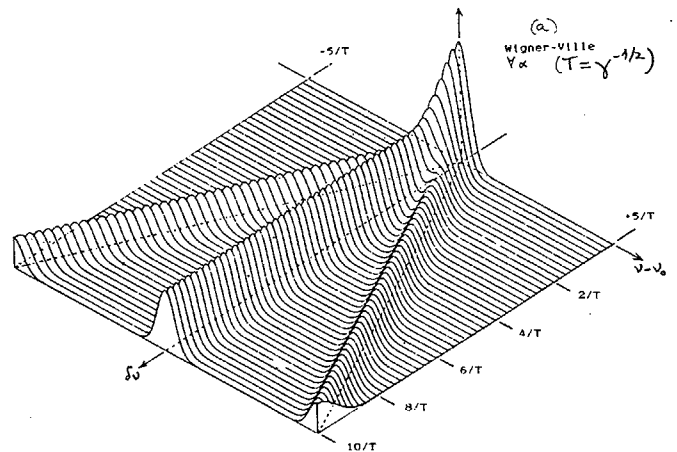
(i) En analyse non-paramétrique par S_{π} , le compromis entre largeur de fenêtre d'analyse et pente de modulation conduit à une limite théorique de résolution (dite de Storey) de l'ordre de (cf e.g. [8]) :

$$\delta \nu_{\text{Storey}} \sim \alpha^{1/2}$$

Une notion semblable est difficile à définir pour W_{π} puisque la pente de modulation n'intervient plus mais que les phases relatives instantanées sont prépondérantes dans la création d'un terme d'interférence entre composantes. Une solution partielle à ce problème est d'utiliser des lissages ($M > 1$) [9];

(ii) Ces termes d'interférence provenant de la structure bilinéaire de la transformation, il en apparaîtra également autour de la fréquence nulle, dus à l'interaction entre fréquences positives et négatives. Un moyen d'éviter de tels termes est de travailler sur le signal analytique associé au signal réel à analyser ;

(iii) L'emploi du signal analytique présente alors un autre avantage : celui d'éviter tout repliement spectral dans la version discrète (2) sans suréchantillonnage. En raison de la périodicité de (2), travailler sur le signal réel nécessiterait sinon de suréchantillonner d'un facteur au moins égal à deux [10].





5. Modélisation.

La méthode proposée ici consiste à réaliser une modélisation AR non sur une tranche d'analyse (comme dans les méthodes à court terme classiques) mais sur le noyau de Wigner-Ville associé, i.e. le produit de la tranche d'analyse par son image en miroir.

Cette transformation bilinéaire des données conduit donc à réaliser l'estimation du module de la DPWV (dont on sait qu'elle peut présenter des valeurs négatives), quantité que l'on peut alors comparer aux DSCT pour les propriétés de séparation.

L'approche suggérée ici nécessiterait une étude théorique qui n'a pas encore été conduite. Ceci pourrait en particulier permettre de choisir des procédures d'estimation adaptées à la structure particulière d'un noyau de Wigner-Ville ou de particulariser la modélisation à un tel noyau.

A titre de simple illustration, la Fig.2 présente les résultats d'une simulation comparant les transformations de Fourier et de Wigner-Ville par les méthodes non paramétriques et paramétriques suggérées. Les coefficients autorégressifs ont été estimés par la méthode de Burg [1].

Le signal test choisi est formé de deux modulations linéaires de fréquence de pente :

$$\alpha = 1181 \text{ Hz/s}$$

échantillonnées à 1 ms et non bruitées.

Les fréquences instantanées et le déphasage relatif au point considéré sont :

$$v_1 = 124.5 \text{ Hz} ; \quad v_2 = 134.5 \text{ Hz} ; \quad 2\pi(\varphi_1 - \varphi_2) \approx \frac{\pi}{4}$$

L'écart fréquentiel est donc tel que :

$$\Delta v = 10 \text{ Hz} \approx \Delta v_{\text{STO}} / 3$$

Pour chaque essai, T représente la durée de la fenêtre d'analyse en ms (ou de manière équivalente le nombre de points de la fenêtre rectangulaire k_N utilisée), L la largeur du lissage temporel et p l'ordre du modèle autorégressif. La position des fréquences instantanées est repérée par les traits verticaux.

Lorsque T est large (Fig.2a) l'analyse de Fourier fournit une densité spectrale moyennant l'ensemble des contributions fréquentielles balayant la bande du signal. La modélisation AR tend alors à placer ses pôles de telle sorte qu'ils occupent au mieux cette bande spectrale. La position des pics n'est pas caractéristique des fréquences instantanées et il n'y a évidemment pas séparation.

Par contre, et pour la même fenêtre d'analyse, l'analyse de Wigner-Ville (Figs.2b-d) concentre de l'énergie sur les fréquences instantanées analysées. La Fig.2b obtenue sans lissage et avec le signal réel, illustre les deux problèmes évoqués de repliement spectral et de termes d'interférence en basses fréquences : les composantes présentes arrivent cependant à être séparées dès l'ordre 8 et une surdétermination de l'ordre n'affecte que peu leur caractérisation.

Une première amélioration est apportée par un lissage portant sur le signal réel (Fig.2c), réduisant ainsi les termes basses fréquences et améliorant l'estimation. Une possibilité supplémentaire d'amélioration est alors offerte en travaillant sur le signal analytique avec lissage (Fig.2d).

La fenêtre utilisée dans ces quatre cas étant trop large pour une analyse de Fourier, les Figs.2e-f comparent les analyses de Fourier et Wigner-Ville lorsque $T \approx \alpha^{-1/2}$, soit la largeur optimale (vis-à-vis de Δv_{STO}) d'une analyse de Fourier à court terme. Ceci

améliore certainement l'analyse de type Fourier et, quoique les deux composantes ne puissent ici être séparées sur la densité spectrale, il semblerait qu'une représentation des pôles y parviendrait [3].

Beaucoup de paramètres influencent les résultats. Ils ont trait tant à la nature du signal (déphasage instantané entre composantes, amplitude relative, rapport signal/bruit,...) qu'à celle de l'estimation (choix du modèle, de l'ordre,...) et une étude plus poussée en est évidemment nécessaire. Sans prétendre à aucune généralité, cet exemple très particulier montre cependant comment l'analyse de type Wigner-Ville permet de s'affranchir de certaines limitations inhérentes aux analyses de Fourier à court terme conventionnelles. Ceci se fait au prix de nouvelles contraintes pouvant cependant être réduites et conduisant à des estimations intéressantes.

6. Conclusion.

Beaucoup de problèmes restent posés par la méthode hybride suggérée ici. Une première catégorie de problèmes concerne les définitions : spectre évolutif, résolution dans le plan temps-fréquence. Une deuxième catégorie pose des problèmes d'estimation. Utilisant le fait maintenant bien connu que, dans un grand nombre de cas, une analyse de type Wigner-Ville est plus performante qu'une analyse de type Fourier à court terme, nous avons proposé d'étendre à la première les améliorations que les modélisations ont déjà apportées à la seconde. Dépassant le cadre heuristique discuté ici, il est maintenant nécessaire d'étudier comment une modélisation se transpose d'un noyau de Fourier à un noyau de Wigner-Ville, ou encore de caractériser les classes de processus dont le noyau de Wigner-Ville associé admet de telles modélisations. Ceci devrait permettre d'améliorer la procédure d'estimation présentée ici en la rendant plus spécifique du problème envisagé.

6. Références.

- [1] S.M. Kay, S.L. Marple Jr : "Spectrum analysis - A modern perspective", Proc. IEEE **69**, 11, 1380-1418 (1981).
- [2] J.L. Lacoume, M. Gharbi, C. Latombe, J.L. Nicolas : "Close frequency resolution by maximum entropy spectral estimators", IEEE Trans. on ASSP **32**, 5, 977-984 (1984).
- [3] N. Martin : "Développements de méthodes d'analyse spectrale autorégressive. Applications à des signaux réels non-stationnaires ou à n dimensions", Thèse D.I., INPG Grenoble (1984).
- [4] W. Martin, P. Flandrin : "Analysis of non-stationary processes : short-time periodograms versus a pseudo-Wigner estimator", in : "Signal Processing : theories and applications II", H. Schüssler (ed.) 455-458 (1983).
- [5] P. Flandrin, B. Escudié : "Principe et mise en oeuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville", soumis Traitement du Signal.
- [6] P. Flandrin, B. Escudié : "An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution", Sig. Proc. **6**, 1, 27-36 (1984).
- [7] F. Hlawatsch : "Interference terms in the Wigner distribution", in : "Digital signal processing-84", V. Cappellini, A.G. Constantinides (eds) 363-367 (1984).
- [8] K. Kodera, R. Gendrin, C. de Villedeary : "Analysis of time-varying signals with small BT values", IEEE Trans. on ASSP **26**, 1 (1978).
- [9] P. Flandrin : "Some features of time-frequency representations of multicomponent signals", ICASSP-84, 41B4.1-41B4.4. San Diego (1984).
- [10] T.A.C.M. Claassen, W.F.G. Mecklenbräuker : "The Wigner distribution - A tool for time-frequency signal analysis", Philips J.Res. **35**, 4-5, 276-300 (1980).



SEPARATION DE FREQUENCES MODULEES PROCHES PAR ANALYSE DE WIGNER-VILLE AUTOREGRESSIVE

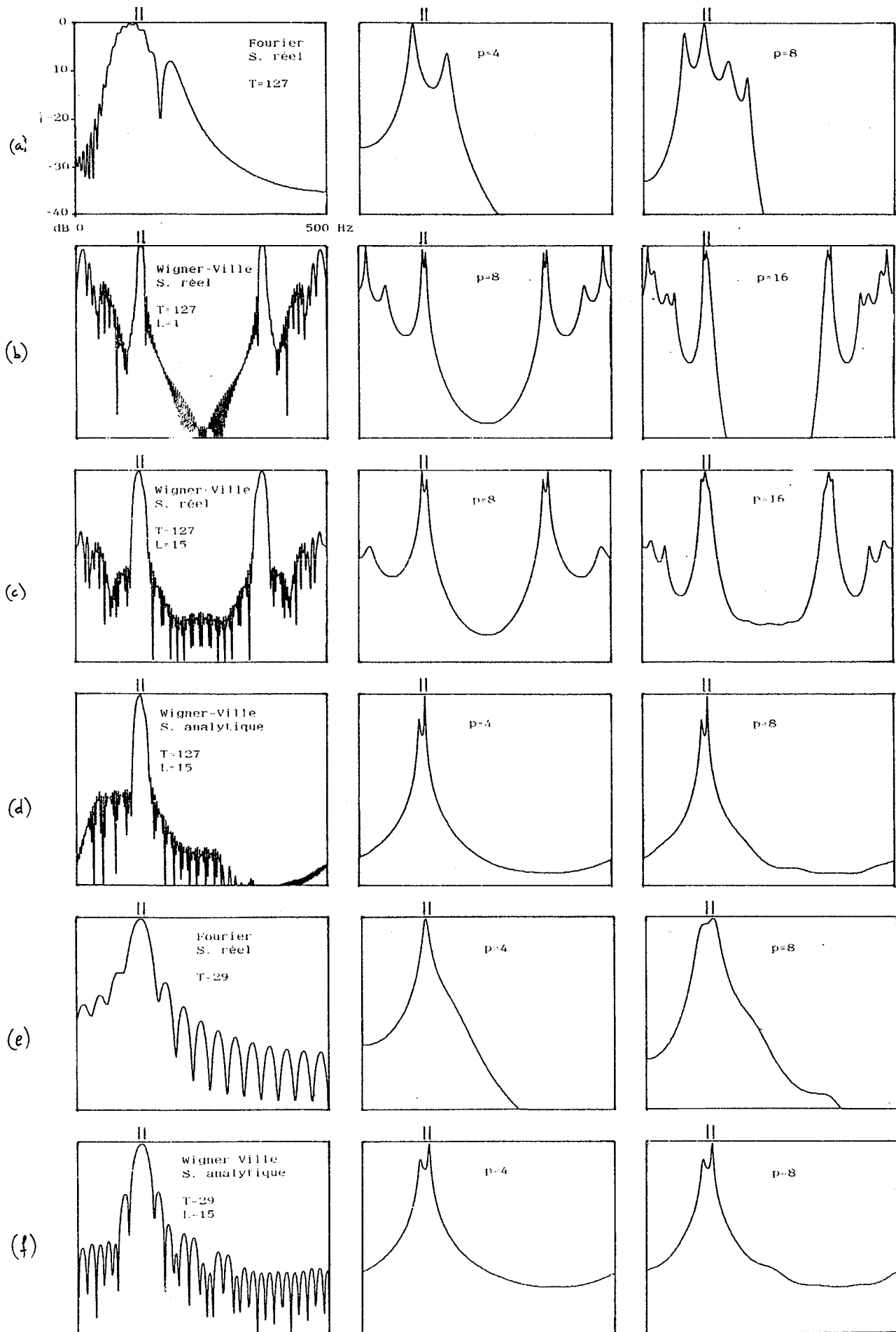


Fig.

