DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

UNE METHODE D'OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS POUR LA SYNTHESE CONTINUE DES FILTRES RIF à PHASE LINEAIRE
A SUBGRADIENT METHOD FOR THE DESIGN OF INFINITE PRECISION LINEAR-PHASE FIR FILTERS

Brigitte JAUMARD, Michel MINOUX

CNET/PAA/TIM, 38-40 Rue du Général Leclerc - 92131 ISSY-LES-MOULINEAUX - FRANCE

RESUME

UNE METHODE D'OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS POUR LA SYNTHESE CONTINUE DES FILTRES RIF A PHASE LINEAIRE

B. JAUMARD. M. MINOUX,
Centre National d'Etudes des Télécommunications

On propose une nouvelle approche pour la résolution du problème de synthèse continue des filtres numériques RIF à phase linéaire avec une méthode d'optimisation par sous-gradients. On a mis au point un algorithme de sous-gradients qui est une extension des méthodes de descente aux fonctions non différentiables et qui intègre un certain nombre de résultats sur les méthodes de faisceaux. Des expériences numériques ont été réalisées pour en évaluer les performances par rapport aux méthodes classiques de résolution (algorithme de Remez et programmation linéaire, cf. KODEK et LIM). Pour la synthèse discrète, contrairement à l'algorithme de Remez qui impose d'arbitrer les coefficients dans un certain ordre, l'algorithme de sous-gradients laisse toute liberté pour le choix d'arbitrage des coefficients. Malgré l'utilisation de la propriété de convexité de la fonction d'évaluation pour cette nouvelle approche (propriété qui permet d'obtenir un gain en temps de calcul de l'ordre de 2 à 5 avec l'algorithme de Remez, cf. JAUMARD, MINOUX et SIOHAN (1984)), les expériences de calcul réalisées montrent que le libre arbitrage des coefficients n'améliore pas sensiblement les performances (cf. JAUMARD (1983), HENRY et JAUMARD (1984)).

SUMMARY

A SUBGRADIENT METHOD FOR THE DESIGN OF INFINITE PRECISION LINEAR-PHASE FIR FILTERS

B. JAUMARD, M. MINOUX,
Centre National d'Etudes des Télécommunications

We suggest a new approach to the problem of infinite precision linear-phase FIR based on a subgradient optimization method. We developped a subgradient algorithm which is an extension of descent methods for nonsmooth functions and which includes several results of bundle methods. Computational experiments have been conduct in order to evaluate the efficiency in comparison with the classical methods (Remez algorithm and linear programming, cf. KODEK and LIM). For finite precision design, as oppose to Remez algorithm for which the sequence of arbitration of the coefficients is fixed, the subgradient algorithm doesn't impose any order. In spite of the use of the convexity property of the evaluating function (which improves computing times by 2 to 5 in the Remez algorithm, cf. JAUMARD, MINOUX and SIOHAN (1984)), the computational experiments indicated that the free arbitration of the coefficients doesn't improve perceptibly the results (cf. JAUMARD (1983), HENRY and JAUMARD (1984)).

UNE METHODE D'OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS POUR LA SYNTHESE CONTINUE DES FILTRES RIF à PHASE LINEAIRE
A SUBGRADIENT METHOD FOR THE DESIGN OF INFINITE PRECISION LINEAR-PHASE FIR FILTERS

INTRODUCTION

Dans le domaine du filtrage numérique non récursif, la synthèse des filtres à phase linéaire est un problème qui a suscité de nombreuses études. Lorsque la réponse en amplitude du filtre doit s'inscrire dans un gabarit et qu'on cherche à déterminer la plus courte suite de coefficients permettant de satisfaire cette contrainte, on est confronté à un problème typique d'approximation au sens de Tchebycheff.

Une approche intrinsèquement adaptée à ce dernier problème fait appel à l'algorithme de Remez : cette approche est très souvent utilisée en raison de son efficacité, autant en termes de temps de calcul que d'encombrement mémoire.

Une seconde solution consiste, après discrétisation de la variable fréquentielle, à utiliser la programmation linéaire qui permet de résoudre le problème de façon aussi précise que l'algorithme de Remez. Toutefois les performances de vitesse et d'encombrement ne justifient cette approche que dans le cas où l'on doit satisfaire des contraintes supplémentaires, linéaires par rapport aux coefficients.

On définit dans ce papier une nouvelle méthode de résolution. Posant le problème d'approximation de Tchebycheff comme un problème d'optimisation non différentiable, on propose alors un algorithme de résolution utilisant la notion de sous-gradient.

FORMALISATION DU PROBLEME

En définissant δ_n comme l'erreur d'approximation, le problème de la synthèse continue des filtres numériques RIF à phase linéaire peut se formuler :

$$\delta_n = \min_{\{\text{coefficients } a\}} \left\{ \max_{f \in F} \left(W(f) \, . \, \left| D(f) - P_n(f) \right| \right) \right\}$$

où :

$P_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ 2\pi fk$ définit la réponse en fréquence,

F représente un ensemble discret de fréquences,
W(f) est une fonction réelle, continue et positive de pondération définie sur F,
D(f) définit la réponse en fréquence désirée supposée réelle et continue sur F.

Suivant la parité de la longueur N du filtre et la symétrie de la réponse en fréquence, on distingue 4 cas pour les filtres à phase linéaire. Pour chacun de ces 4 cas, la réponse en fréquence est définie à l'aide d'une bijection entre les coefficients a_k, k = 0, 1, ..., n-1 et la réponse impulsionnelle du filtre h_k, k = 0, 1, ..., N-1 et on peut réduire $P_n(f)$ à une somme de n termes (où n = N/2, (N-1)/2 ou (N+1)/2 suivant les cas) dans laquelle seule la première moitié de la réponse impulsionnelle apparaît explicitement. Par exemple, pour le cas où N est impair et la réponse en fréquence symétrique, on obtient les relations :

$$\begin{cases} a_0 = h_{n-1} \\ a_k = 2.h_{n-1-k} \end{cases} \qquad \text{avec } n-1 = (N-1)/2$$

et $P_n(f)$ se réécrit :

$$P_n(f) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos 2\pi kf$$

NOUVELLE METHODE DE RESOLUTION PROPOSEE : OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS

1. - Généralités

(Pour une présentation détaillée le lecteur pourra se reporter à MINOUX (1983)).

On s'intéresse au problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } \varphi(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où φ est une fonction continue, convexe et non partout différentiable.

Pour une fonction différentiable, le gradient de φ en un point x_0 est le vecteur $\nabla\varphi\ (x_0)$ de composantes :

$$\nabla\varphi_j\ (x_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\ (x_0).$$

Pour une fonction convexe non différentiable, on introduit la notion de sous-gradient pour généraliser la notion de gradient.

UNE METHODE D'OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS POUR LA SYNTHESE CONTINUE DES FILTRES RIF à PHASE LINEAIRE
A SUBGRADIENT METHOD FOR THE DESIGN OF INFINITE PRECISION LINEAR-PHASE FIR FILTERS

On appelle sous-gradient de φ en x_0 tout vecteur $\gamma(x_0)$ tel que :

$$\varphi(x) \geqq \varphi(x_0) + \gamma^t(x_0) \cdot (x - x_0)$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de φ en x_0 est un ensemble convexe, fermé, appelé sous-différentiel de φ en x_0 ; il est noté $\delta\varphi(x_0)$.

On montre que x^* est un optimum global du problème (P) si et seulement 0 est un élément de $\delta\varphi(x^*)$, ce qui constitue une extension de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du cas différentiable.

Les méthodes classiques d'optimisation non différentiable du problème (P) procèdent par itérations : elles consistent à former une suite $\{x^k\}$ de points convergeant vers un optimum global x^*. A chaque étape k, x^{k+1} est défini par :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$$

où d_k est une direction de déplacement. Dans le cas différentiable, en prenant $d_k = -\nabla\varphi(x^k)$, on obtient une direction de descente, c'est-à-dire une direction dans laquelle φ décroît à partir de x^k. Dans le cas non différentiable, les méthodes classique prennent encore $d_k = -\nabla\varphi(x^k)$ mais on n'a plus alors de propriété de descente et la convergence des algorithmes devient étroitement liée à la détermination du pas de déplacement λ_k dans la direction d_k.

L'efficacité de ces algorithmes dépend étroitement du conditionnement de la fonction à optimiser. Il peut être intéressant, pour accroître la vitesse de convergence, de s'intéresser à des extensions des méthodes de descente : dans ce cas la suite $\{\varphi(x^k)\}$ est monotone décroissante.

Parmi ces méthodes, on peut citer celle de LEMARECHAL (1978, 1980a, 1980b), de MINOUX (1982) et FUKUSHIMA (1984). C'est à partir de ces dernières que nous avons construit un algorithme de sous-gradients adapté à la résolution du problème de synthèse continue.

2. - Calcul d'un sous-gradient

D'un point de vue algorithmique la notion de sous-gradient n'a évidemment d'intérêt que si l'on est capable de calculer au moins un sous-gradient en un point quelconque.

Pour le problème d'optimisation de synthèse de filtres qui nous intéresse, ce calcul n'est possible qu'après discrétisation de la variable f sur un ensemble fini F. Le problème discrétisé s'écrit :

$$\delta_n = \min_a \left\{ \Delta(a) = \max_{f \in F} \left(W(f) \cdot | D(f) - P_n(f) | \right) \right\}$$

ce qui peut toujours se réécrire sous la forme :

$$\delta_n = \min_a \left\{ \Delta(a) = \max_{f \in F} (\alpha^t(f).a + \beta(f)) \right\} \qquad (Q)$$

avec :

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha^t(f) = \varepsilon.\left(W(f).G(0,f), \ldots, W(f).G(n-1,f)\right), \\ \beta(f) = -\ \varepsilon.W(f).D(f), \\ \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

On démontre que (cf. MINOUX (1983)) que le vecteur $g(f_0) = \alpha(f_0)$ est un sous-gradient de Δ en a, si f_0 est un point de f où $\Delta(f)$ atteint son maximum.

De plus, on montre que pour de telles fonctions Δ, le sous-différentiel est exactement défini par :

$$\Gamma = \left\{ \gamma = \sum_{j/f_j \in F} \lambda_j\, g(f_j) \ / \ \sum \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \text{ pour tout } j \right\}$$

3. - Définitions et propriétés complémentaires

L'algorithme proposé fait appel à la notion de η-sous-gradient dont nous rappelons ici la définition et les principales propriétés.

Soit η un nombre réel quelconque.

On dit que $\gamma \in \mathbb{R}^n$ est un η-sous-gradient d'une fonction φ au point x_0 si et seulement si :

$$\forall x \quad \varphi(x) \geqq \varphi(x_0) + \gamma^t(x_0) \cdot (x - x_0) - \eta$$

On notera $\delta_\eta\, \varphi\, (x_o)$ le η-sous-différentiel de φ en x_o, c'est-à-dire l'ensemble de tous les η-sous-gradients de f au point x_o.

Grâce à la notion de η-sous-gradient, on peut énoncer la condition nécessaire et suffisante d'optimalité à η près suivante :

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est une solution η-optimale de (P) si et seulement si $0 \in \delta_\eta\, \varphi(\bar{x})$.

On montre que, pour $\eta > 0$ donné, si un point y est suffisamment proche de x, alors un sous-gradient de f en y est un η-sous-gradient de f en x.

4. - Principe de l'algorithme

L'algorithme proposé est une généralisation des méthodes de descente et comporte à chaque itération :

- une recherche d'une direction de descente (plus exactement de η-descente)
- une optimisation unidimensionnelle dans cette direction.

On sait que le vecteur de norme minimale, combinaison linéaire convexe de l'ensemble des vecteurs du sous-différentiel exact de la fonction au point courant définit une direction de descente. Les travaux de LEMARECHAL (1981) ont montré qu'il était nécessaire de disposer d'une information sur le voisinage du point courant et non seulement d'une information locale (ce que donne le sous-différentiel) pour améliorer la convergence des algorithmes de sous-gradients, ce que l'on peut interpréter comme un lissage de la fonction en ses points de non différentiabilité.

L'algorithme que nous proposons consiste à construire directement (et non pas itérativement comme dans la plupart des algorithmes proposés dans la littérature) une approximation du η-sous-différentiel. Une détermination du η-sous-différentiel exact ne se justifie pas d'un point de vue précision et, par ailleurs, serait très coûteuse en temps de calcul. Par projection de l'origine sur l'enveloppe convexe de cet ensemble (= détermination du vecteur combinaison linéaire convexe de norme minimale), on en déduira une η-direction de descente que l'on prendra comme direction de déplacement.

5. - Construction d'un η-sous-différentiel approché

Réécrivons le problème (Q) :

$$\delta_n = \min_a \left\{ \Delta(a) = \max_{j \in J} \left(d_j\ (a) = g_j \cdot a + \beta_j \right) \right\} \qquad (Q')$$

où J est défini en bijection avec F.

Plaçons-nous au point courant a pour lequel nous supposerons que le maximum sur les fonctions d_j est atteint pour $j = j_o$:

$$\Delta\ (a) = d_{j_o}\ (a) = \max_j d_j\ (a)$$

Définissons :

- $I(a,\mu) = \left\{ j / d_j\ (a) = d_{j_o}\ (a) - \mu \right\}$
- $G_\mu\ (a) = \left\{ g_j / j \in I\ (a,\ \mu) \right\}$
- $p_j = d_{j_o}\ (x) - d_j\ (x), \quad j \in J$

$$\text{Soit } G_p = \left\{ g = \sum_{g_j \in G_\mu} \lambda_j\, g_j \ / \sum \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \right.$$
$$\left. \text{et } \sum \lambda_j\, p_j \leq \eta \right\}$$

On montre que G_p définit le η-sous-différentiel exact de Δ (a).

Soit G_e l'ensemble des vecteurs g_j pour lesquels la fonction $\Delta\ (a) = \max_j d_j(a)$ présente un extremum relatif. Posons $GU = G_e \cup G_\mu$.

Les expériences numériques réalisées ont montré que GU constitue une bonne "base" pour définir une approximation d'un η-sous-différentiel G_η défini comme :

$$G_\eta = \left\{ g = \sum_{j/g_j \in GU} \lambda_j\, g_j \ / \sum \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \right.$$
$$\left. \text{et } \sum \lambda_j\, p_j \leq \eta \right\}$$

6. - Construction de la direction de déplacement

De même que dans MINOUX (1982), la direction de déplacement va être défini comme la projection de l'origine sur l'enveloppe convexe de l'ensemble GU avec la contrainte supplémentaire $\sum_j \lambda_j\, p_j \leq \eta$.

On est alors amené à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \left\| \sum_j \lambda_j g_j \right\|^2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_j \lambda_j = 1,\ \sum_j \lambda_j p_j \leq \eta,\ \lambda_j \geq 0 \quad \forall_j \end{cases} \qquad \text{(PROJ)}$$

Pour résoudre le problème (PROJ) on introduit une pénalité π et on se ramène à :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \left\| \sum_j \lambda_j g_j \right\|^2 + \pi^2 \left(\sum_j \lambda_j p_j \right)^2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \quad \forall_j \end{cases} \qquad \text{(PEN)}$$

Il suffit alors de définir le vecteur $g'_j = (g_j, \pi p_j)$ $\forall_j$ pour se ramener à :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \left\| \sum_j \lambda_j g'_j \right\|^2 \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \quad \forall_j \end{cases}$$

ce qui permet alors d'utiliser la méthode de projections successives décrite dans MINOUX (1982) que l'on peut améliorer en y introduisant la méthode PARTAN (cf. HENRY et JAUMARD (1984)).

7. - L'algorithme proposé

Algorithme :

(a) Initialisation

Choisir : x point de départ,

η_0 tolérance de satisfaction des conditions d'optimalité,

π valeur initiale de la pénalité.

(b) Phase courante : calcul d'un optimum à η près

$k = 0$ (k est le nombre d'itérations pour η fixé),

si $\eta < \eta_0$ alors FIN, le point courant x est η-optimal

sinon augmenter π

fsi,

Initialiser le paramètre ε (tolérance de proximité du point obtenu à l'optimum).

(c) Itération courante : définition d'une direction de descente

(c1) $k \longleftarrow k+1$,

Déterminer GU (sous-différentiel approché),

Soit p le vecteur de pondération des éléments de GU.

(c2) Projeter l'origine sur l'enveloppe convexe de $GU \cup \{p\pi\}$,

Soit s la direction de déplacement obtenu,

si $\| s \| < \varepsilon$ alors le point courant est ε-optimal,

$\eta \leftarrow \sum \lambda_i p_i$,

retour en b)

sinon aller en d)

fsi

(d) Recherche unidimensionnelle

Effectuer la recherche unidimensionnelle au point courant x dans la direction s.

Aller en c).

8. - Résultats numériques

Pour évaluer les performances de l'algorithme proposé, on a comparé les résultats (temps de calcul et précision) avec l'algorithme de Remez sur les exemples types suivants :

Exemple	Ordre du filtre	Bandes de fréquence	Fréquence désirée	Pondération
1	15	0.0 -0.12 0.2 -0.34 0.42-0.5	1 0 1	1 1 1
2	25	0.0 -0.12 0.2 -0.34 0.42-0.5	1 0 1	1 1 1
3	15	0.0 -0.2 0.25-0.5	1 0	1 1
4	24	0.0 -0.8 0.16-0.49	1 0	1 1
5	25	0.1 -0.21 0.26-0.49	1 0	1 1
6	15	0.0 -0.12 0.2 -0.34 0.42-0.5	1 0 1	1 10 1

Tableau 1 : Définition des exemples de test

On a obtenu les résultats suivants :

UNE METHODE D'OPTIMISATION PAR SOUS-GRADIENTS POUR LA SYNTHESE CONTINUE DES FILTRES RIF à PHASE LINEAIRE
A SUBGRADIENT METHOD FOR THE DESIGN OF INFINITE PRECISION LINEAR-PHASE FIR FILTERS

EXEMPLE	REMEZ	SOUS-GRADIENTS
1	- 25.77 dB 0.211 x 10^{-3} S	- 25.77 dB 0.912 x 10^{-2} S
2	- 37.85 dB 0.447 x 10^{-3} S	- 37.83 dB 0.211 x 10^{-1} S
3	- 18.46 0.240 X 10^{-3}	- 18.44 0.796 x 10^{-2}
4	- 38.11 0.394 x 10^{-3}	- 38.04 0.111. x 10^{-1}
5	- 29.56 0.335 x 10^{-3}	- 28.29 0.121 x 10^{-1}
6	- 14.43 0.309 x 10^{-3}	- 13.02 0.678.10^{-3}

Tableau 2 : Résultats comparatifs.

CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent que pour des filtres d'ordre 30, la qualité de l'approximation obtenue avec l'algorithme de sous-gradients est équivalente à celle de Remez. Cependant, de même que pour HALLOT (1984), les temps de calcul varient dans un rapport de 8 à 40 et s'expliquent par un grand nombre d'itérations dans l'étape correspondant à la projection (qui n'a pas été adaptée à la spécificité du problème traité). Notons toutefois que l'algorithme proposé se généralise sans difficulté au cas des filtres bidimensionnels et que les premiers résultats obtenus donnent un rapport de temps de calcul plus faible par rapport aux autres méthodes de résolution.

BIBLIOGRAPHIE

FUKUSHIMA, M., (1984), A descent algorithm for nonsmooth convex optimization, Mathematical Programming 30, 163 - 175.

HALLOT, O.H.P., (1984), Metodos de otimização para sintese de filtros digitais, Thèse, Université Catholique de Rio de Janeiro, Août 1984.

HENRY, J.P. et B. JAUMARD, (1984), Synthèse continue et discrète des filtres RIF à phase linéaire : Nouvelle approche d'optimisation par sous-gradients, Note technique CNET/PAA/TIM/MTI/1368 et PAB/ETR/682.

JAUMARD, B., (1983), Application de la programmation en nombres entiers à la synthèse des filtres numériques, Mémoire d'ingénieur I.I.E.

JAUMARD, B., M. MINOUX et P. SIOHAN, (1983), Improvement of branch and bound methods for discrete FIR filter synthesis from a convexity property, Rapport de Recherche, Novembre 1983, soumis pour publication.

KODEK D., (1980), An algorithm for the design of optimal finite word-length FIR Digital Filters, Proceedings ICASSP - Denver.

KODEK D. et K. STEIGLITZ, (1981), Comparison of Optimal and Local Search Methods of Designing Finite Wordlength FIR Digital Filters, IEEE Trans. on CAS.

LAWRENCE, V.B. et A.C. SALAZAR, (1980), Finite Precision of Linear - Phase FIR Filters, The Bell System Technical Journal 59 (9).

LEMARECHAL, C., (1978), Bundle methods in nondifferentiable optimization, in : Nonsmooth Optimization, (Lemarechal et Mifflin editors), Pergamon Press, 79 - 102.

LEMARECHAL C., (1980a), Nondifferentiable optimization, in : Nonlinear Optimization, Theory and Algorithms, (Dixon, Spedicato, Szegö eds), Birkhaüsen, Boston.

LEMARECHAL C., (1980b), Extensions diverses des méthodes de gradient et applications, Thèse Doctorat ès Sc., Université Paris IX.

LIM, Y.C., (1982), Efficient special purpose linear programming for FIR filter design, ICAS 82, 792 - 795.

MINOUX, M., (1982), Un algorithme de sous-gradients pour la recherche d'un point satisfaisant les conditions d'optimalité en optimisation nondifférentiable, XI th International Symposium on Mathematical Programming, Bonn (RFA).

MINOUX, M., (1983), Programmation Mathématique - Théorie et algorithmes, Tomes 1 et 2, DUNOD.