DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET ESTIMATION DE RETARDS

Jean-Jacques FUCHS

UNIVERSITE DE RENNES I, IRISA, Campus de BEAULIEU, 35042 RENNES-CEDEX FRANCE

RESUME

On propose une méthode originale d'estimation de retards dans le cas de plusieurs sources de spectres inconnus. Les signaux reçus par les capteurs sont modélisés comme la somme de versions atténuées et retardées des signaux émis par les sources et de bruits (blancs) additifs.

L'exposé se décompose nettement en deux parties. Dans la première, une modélisation discrète, globale est obtenue sous forme de représentation d'état, dans la seconde le modèle précédent est utilisé pour arriver de manière assez naturelle à une méthode d'estimation de retards.

On suppose que les signaux continus émis par les sources possèdent des spectres rationnels. L'effet des atténuations et des retards se traduit alors sans difficulté sur les fonctions de covariance continues associées. Un modèle discret global est obtenu, sous forme de représentation d'état, à partir du modèle continu global. L'avantage de cette approche est d'une part d'être systématique et d'autre part d'être parfaitement insensible à la présence de retards entiers ou non-entiers.

Cette partie, dans la mesure où elle permet d'obtenir un modèle de simulation cohérent et exact, nous semble intéressante en soi, de plus elle mène à une méthode originale d'estimation de retards.

Cette méthode utilise comme unique entrée un modèle paramétrique de l'information de covariance contenue dans les données et peut être vue comme une méthode d'intercovariance paramétrique généralisée. La difficulté inhérente à ces approches en présence de plusieurs sources est tournée grâce à un schéma de découplage qui permet d'isoler les contributions de chaque "source élémentaire" à la fonction de covariance globale. Des résultats de simulation sont présentés.

*Etude réalisée dans le cadre d'une convention avec la DCAN - TOULON.

SUMMARY

We propose a new method for time differences of arrival (TDOA's) estimation of multiple sources whose spectra are unknown. In a first part, we show how state-space techniques can be used to easily arrive at an exact discrete global model of the transfer between the source inputs and sensor outputs for sources having rational spectra and for integer and non-integer delays. This part is of interest by itself - e.g. for simulation purposes - but it also leads in a natural way to an original TDOA's estimation procedure presented in the second part of the paper. A condensed parametric model of the covariance information is the unique input to what can be seen as a generalized parametric covariance method. The difficulties inherent to these methods in the presence of several sources are easily turned around by a decoupling scheme which isolates the contributions of the individual, elementary sources. Simulation results are presented.

I. INTRODUCTION

Dans beaucoup de domaines, il est intéressant de savoir localiser des sources radiantes à l'aide de mesures réalisées par un ensemble de capteurs. Les signaux reçus par les capteurs sont en général modélisés comme la somme de versions atténuées et retardées des signaux émis par les sources et de bruits additifs. Il est alors possible de localiser les sources à partir de la connaissance des retards entre les instants d'arrivée du front d'onde issu d'une source sur les différents capteurs.

Des algorithmes d'estimation de retards ont principalement été développés dans le cas d'une source unique aussi bien à l'aide d'approches fréquentielles [1] que d'approches temporelles [2]. Le cas de sources multiples est, en général, traité dans le domaine fréquentiel par décomposition modale de la matrice de densité spectrale. Ces méthodes identifient directement l'azimuth des sources [3,4,5]. La présence de plusieurs sources compliquent singulièrement le problème de l'estimation des retards et relativement peu d'études ont été réalisées dans ce domaine [6,7,8,9] que nous abordons dans cet exposé.

Pour simplifier l'exposé nous nous limitons au cas où deux sources illuminent deux capteurs, l'extension au cas général ne présente pas de difficultés théoriques supplémentaires. Le modèle continu que nous allons utiliser est le suivant :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= s_1(t) + s_2(t) + n_1(t) \\ y_2(t) &= g_1 s_1(t-d_1) + g_2 s_2(t-d_2) + n_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

avec :

- $s_i(t)$, $i = 1,2$: signaux décorrélés émis par les sources (processus stochastique continu à spectre rationnel)
- d_i, $i = 1,2$:"retards" à identifier
- g_i, $i = 1,2$: atténuations
- $n_i(t)$, $i= 1,2$: bruits additifs décorrélés spatialement (supposés blancs, en général)
- $y_i(t)$, $i = 1,2$: sorties des capteurs.

Une telle modélisation implique par ailleurs des hypothèses sur le milieu et la propagation que nous supposons vérifiées dans la suite pour mener à bien notre analyse.

La deuxième partie de l'exposé est consacrée à l'obtention d'un modèle discret équivalent à (1). Ce point n'a, curieusement, pas été abordé dans [6,7,8]. Nous développons un algorithme qui permet d'obtenir de manière systématique une représentation d'état discrète strictement équivalente à (1). Il s'agit d'un algorithme de réalisation stochastique basé sur les fonctions de covariance des processus continus. Cette approche élimine complètement les difficultés (insurmontables) que l'on rencontre quand on essaie de modéliser un retard non entier en partant d'un modèle du signal-source déjà discrétisé [7]. Il suffit en fait de savoir modéliser le cas d'une source et de deux capteurs, puisque les signaux émis par les sources sont supposés décorrélés. Nous regarderons de près les propriétés de ce modèle puisqu'elles seront utilisées dans la suite.

Dans la troisième partie, nous présentons l'algorithme d'estimation des retards. Il découle assez naturellement du modèle obtenu plus haut et peut être vu comme une méthode d'intercovariance généralisée. La difficulté essentielle induite par la présence de sources multiples est surmontée par un mécanisme qui isole la contribution de chaque source sur les différents capteurs. On est alors ramené au cas simple d'une source unique éclairant l'ensemble des capteurs.

Dans une dernière partie nous présentons quelques résultats de simulations, avant de conclure sur les nombreux problèmes théoriques et pratiques qui apparaissent quand on sort du cadre idéalisé dans lequel on s'est placé.

II. REPRÉSENTATION D'ÉTAT DISCRÈTE

II-1- INTRODUCTION

Comme nous supposons décorrélés entre eux les différents signaux-sources et les bruits de mesure additifs, il suffit de savoir discrétiser séparément le modèle de chacune des sources et de chacun des bruits. Chacun des bruits est un processus scalaire et ne pose donc pas de difficulté.

Considérons alors :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= s(t) \\ y_2(t) &= s(t-d) \end{aligned} \qquad (2)$$

où $s(t)$ est un processus continu à spectre rationnel dont la fonction de covariance est notée $r(\tau)$.

Il suffirait par ailleurs de savoir obtenir un modèle discret de (2) pour $0 < d < 1$. Mais le modèle pour d quelconque nous sera utile dans le développement de l'algorithme d'estimation des retards, nous traiterons donc le cas général.

Pour que les sorties $\{y_{i,k} \,;\, k\in Z \,;\, i = 1,2\}$ du modèle discret possèdent les mêmes propriétés statistiques (au deuxième ordre) que les signaux continus $\{y_i(t) \,;\, t\in R \,;\, i = 1,2\}$ aux instants d'échantillonnage $t = k$, il suffit avec nos hypothèses qu'il y ait identité entre $R(\tau)$ la matrice de covariance du processus vectoriel : $Y(t) = [y_1(t)\ y_2(t)]^T$:

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} r(\tau) & r(\tau+d) \\ r(\tau-d) & r(\tau) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

et la suite de matrices de covariance $\{R_k \,;\, k\in Z\}$ du processus vectoriel discrétisé Y_k :

$$R_k \equiv R(t)\big|_{t=k} \qquad k\in Z \qquad (4)$$

Après avoir rappelé la manière d'obtenir une représentation d'état discrète pour $Y(t)$ (2) à l'aide d'un algorithme de réalisation stochastique basé sur les fonctions de covariance, nous en étudierons certaines propriétés propres à notre contexte et conclurons sur l'extension au modèle général (1).

II-2- ALGORITHME DE REALISATION STOCHASTIQUE

Soit $\mathbb{H}_1^N$ la matrice de Hankel (bloc (2,2)) de dimension (2N,2N) associée à la suite de matrices de covariance R_k(3,4) :

$$\mathbb{H}_j^N = \begin{bmatrix} R_j & R_{j+1} & R_{j+N-1} \\ R_{j+1} & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ R_{j+N-1} & \cdot\ \cdot & R_{j+2N-2} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Le rang -noté n- de cette matrice est indépendant de N pour N suffisamment grand. Elle peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathbb{H}_1^N = \mathcal{O}_1^N \mathcal{C}_1^N \quad ; \quad \mathcal{O}_1^N(2N,n) \quad ; \mathcal{C}_1^N(n,2N) \qquad (6)$$

Cette factorisation n'est pas unique, mais détermine de manière unique les matrices F(n,n) ; H(2,n) et G(n,2) vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^N &= [H^T (HF)^T \ldots\ldots (HF^{N-1})^T]^T \\ \mathcal{C}_1^N &= [G \; FG \quad \ldots\ldots \; F^{N-1} \; G] \end{aligned} \qquad (7)$$

On a alors :

$$R_k = HF^{k-1} G \qquad k \geq 1 \qquad (8)$$

L'algorithme de Ho [10] permet d'obtenir une telle factorisation (6). Pour compléter la représentation d'état recherchée :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F X_k + K V_k \\ Y_k &= H X_k + V_k \end{aligned} \qquad (9)$$

c.a.d. le "filtre de Kalman" correspondant à la factorisation (6) on peut utiliser l'algorithme de Faure [11]. Notons R la variance de l'innovation V_k, un bruit blanc vectoriel et R(z) la transformée en z bilatère de R(τ) (3) la fonction de covariance du processus vectoriel continu Y(t). La factorisation (6) de la matrice de Hankel (5) correspond alors à une décomposition additive de R(z) (8) :

$$R(z) = G(z) + G(z^{-1})^T + R_o$$

où

$$G(z) = H(zI - F)^{-1} G \qquad (10)$$

alors que la représentation d'état (9) correspond à une décomposition multiplicative :

$$R(z) = H(z) \; R \; H(z^{-1})^T$$

où

$$H(z) = H(zI - F)^{-1} K + I \qquad (11)$$

II-3- PROPRIETES DE LA REPRESENTATION D'ETAT

La discrétisation proposée repose entièrement sur r(τ) la fonction de covariance du processus scalaire continu s(t), le signal-source dont nous avons supposé le spectre rationnel. On peut alors songer à s(t) comme étant la sortie d'un filtre rationnel attaqué par un bruit blanc continu (de variance infinie). Le signal s(t) étant supposé de puissance finie, le filtre rationnel qui le génère, sera strictement propre. Appelons alors p le degré de son dénominateur. Le modèle discret de ce processus scalaire s(t) est alors un processus ARMA (p,p-1) et la représentation d'état associée sera de dimension p. (On peut rappeler l'apparition systématique de (p-1) zéros lors de la discrétisation).

La dimension -notée n- de la représentation d'état (9) du processus vectoriel qui nous intéresse, donnée par le rang de la matrice de Hankel $\mathbb{H}_1^N$ (5) vérifie alors :

$$n = \begin{cases} p & \text{pour} \quad |d| \leq 1 \\ p+1 & \text{pour} \quad 1 < |d| \leq 2 \\ p+2 & \text{pour} \quad 2 < |d| \leq 3 \\ \ldots \end{cases} \qquad (12)$$

Nous ne démontrons pas ce résultat [9] qui indique donc que la dimension n de l'état d'une représentation minimale dépend du retard d. On établit [9] par ailleurs que :

$$\text{rang } \mathbb{H}_j^N = p \qquad \text{pour} \qquad j \geq |d| \qquad (13)$$

$$j \in \mathbb{N} \quad ; \quad d \in \mathbb{R} \quad .$$

On imagine que les propriétés (12,13) puissent -en théorie- être utilisées pour obtenir la partie entière du retard par inspection du rang de $\mathbb{H}_j^N$ pour j = 1,2,3,.... Dans le cas général, plusieurs sources et plusieurs capteurs, elles permettent également -en théorie- d'identifier le nombre de sources présentes. Mais il s'avère que ces propriétés théoriques sont essentiellement non-robustes dans la pratique : les variations de rang des matrices $\mathbb{H}_j^N$ j = 1,2,... sont indiscernables sur ces mêmes matrices quand elles sont estimées à l'aide d'un nombre fini d'observations $\{Y_k\}$. Ce manque de robustesse est relativement prévisible théoriquement [9].

On peut également déduire du développement précédent la propriété suivante [9] : la matrice de variance R de l'innovation V_k (9) est plein :

$$R = E\{V_k \; V_k^T\} > 0$$

sauf pour un retard d entier.

Cette propriété n'est pas utilisée dans la suite, mais elle explique, notamment, pourquoi il est difficile -pour ne pas dire impossible- de modéliser un retard non entier en partant d'un modèle scalaire déjà discrétisé (ARMA).

II-4- EXTENSION AU CAS GENERAL

Dans un but de simulation, il est bien sûr suffisant de savoir modéliser la contribution de chaque source prise isolément et de chaque bruit de mesure. C'était l'objet du paragraphe II.2, dont l'algorithme s'étend d'ailleurs sans difficulté à un nombre quelconque de capteurs.

Au lieu de modéliser séparément chaque source, on peut également obtenir directement un modèle global. Il suffit pour cela de construire la matrice de Hankel associée à la suite de matrices de covariance globale obtenue en additionnant les suites associées à chacune des sources, en tenant compte des atténuations. Les bruits additifs décorrélés spatialement et blancs ne viennent perturber que la diagonale de la matrice de variance R_o.

Comme cette modélisation sera utilisée dans la suite, regardons d'un peu plus près comment se généralisent les propriétés (12,13) de rang à la matrice de Hankel globale $\mathbb{H}_1^N$, la seule identifiable par l'expérimentateur.

Le rang de cette matrice est donné par la somme de trois termes :

- le premier correspond à la contribution des processus stochastiques-sources. Il est, en général, égal à la somme des ordres de ces processus (p_1+p_2 dans notre cas (1)).

- le deuxième correspond à l'augmentation de rang induite par les retards. La propriété (12) est à généraliser avec prudence [9]. Comme, par manque de robustesse, elle n'est pas utilisée dans la suite nous ne discutons pas son extension.

- le troisième correspond aux bruits de mesure additifs. Il est nul pour des bruits blancs.

La propriété (13) -qui indique comment se prémunir contre l'augmentation de rang due aux retards- se généralise aisément. Dans notre cas (1), en notant Δ, un majorant entier des valeurs absolues des retards présents :

$$\Delta \geq \max\{|d_1|, |d_2|\} \qquad (14)$$

elle s'écrit :

$$\text{rg } \mathbb{H}_j^N = p_1 + p_2 \qquad \forall \; j \geq \Delta \qquad (15)$$

III. ESTIMATION DES RETARDS

Il s'agit à partir des mesures bruitées, discrètes $\{Y_k ; k = 1 \text{ à } K\}$ d'estimer le nombre de sources présentes et les retards associés. Nous utilisons le développement du chapitre précédent pour obtenir dans une première étape un modèle paramétrique des mesures qui correspond à (10) la décomposition additive de la fonction de covariance. Dans une deuxième étape, les retards sont estimés à l'aide de ce seul modèle.

Rappelons que nous considérons le cas (1) où deux capteurs sont éclairés par des sources décorrélées (rationnelles d'ordre p_i) et où les bruits additifs sont blancs.

III-1- MODELE PARAMETRIQUE DES DONNEES

Appelons Γ_i, $i = 1,2,\ldots$ les estimées des matrices (2,2) de covariance : $R_i = E(Y_k Y_{k-i}^T)$ obtenues à partir des mesures $\{Y_k ; k = 1 \text{ à } K\}$. Les matrices (5) de Hankel estimées, notées $\hat{\mathbb{H}}_j^N$, $j = 1,2,\ldots$, construites à l'aide des matrices Γ_i sont en général de rang plein. Nous avons étudié au § II.4, le rang des matrices $\mathbb{H}_j^N$ "exactes" correspondantes. L'augmentation de rang induite par les retards étant indiscernable dans la pratique, nous supposons, dans la suite, connaître un majorant entier (14) -noté Δ- de l'ensemble des valeurs absolues des retards à identifier. Ce majorant est principalement fonction de la vitesse de propagation des ondes et des distances entre capteurs.

En vue d'obtenir une factorisation (6) approchée de $\hat{\mathbb{H}}_\Delta^N$, nous décomposons cette matrice en valeurs et vecteurs singuliers [12] :

$$\hat{\mathbb{H}}_\Delta^N = U \Sigma V^T = \sum_1^{2N} \sigma_i u_i v_i^T \tag{16}$$

où les matrices U et V de colonnes u_i et v_i, sont orthogonales et Σ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux -les valeurs singulières- sont positifs et ordonnés :

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots . \sigma_{2N} \geqslant 0$$

Le vrai rang de cette matrice est (15) : $n \stackrel{\Delta}{=} p_1 + p_2$. On peut donc s'attendre, notamment si K, le nombre d'observations, est grand, à voir un écart assez important entre σ_n et σ_{n+1}. La détermination du rang de cette matrice peut être réalisée de diverses manières [9,13]. L'extension de critère du type Akaike ou Rissanen ne semble cependant pas triviale. Pour les simulations décrites plus loin (K = 1000, N = 30), le rang exact a en général été trouvé. A cet endroit de l'algorithme il est, en fait, préférable de surestimer le rang, car il apparaît qu'une surestimation est décelable dans la suite de la procédure d'estimation des retards.

Utilisant maintenant une approximation proposée dans [14], nous construisons une matrice de Hankel approchée -notée $\bar{\mathbb{H}}_\Delta^N$- en ne retenant que les $\hat{n}$ premiers triplets dans (16) ; où $\hat{n}$ est l'estimée du vrai rang n.

$$\bar{\mathbb{H}}_\Delta^N = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \sigma_i u_i v_i^T = \bar{U} \bar{\Sigma} \bar{V}^T \tag{17}$$

avec : $\bar{U}(2N,\hat{n})$; $\bar{V}(2N,\hat{n})$ et $\bar{\Sigma}(\hat{n},\hat{n})$.

Cette matrice reconstruite n'est plus Hankel par bloc et la factorisation (6) :

$$\bar{\mathbb{H}}_\Delta^N = \hat{\mathcal{O}}^N \hat{\mathcal{C}}^N$$

avec

$$\hat{\mathcal{C}}^N = \bar{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \bar{V}^T \quad ; \quad \hat{\mathcal{O}}^N = \bar{U} \bar{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

mène à des matrices $\hat{\mathcal{O}}^N$ et $\hat{\mathcal{C}}^N$ qui ne possèdent pas la structure attendue (7). On identifie alors les matrices $\bar{H}(2,\hat{n})$, $F(\hat{n},\hat{n})$ et $\bar{G}(\hat{n},2)$ (7) au sens des moindres carrés de la manière suivante : [14,15] :

$$\bar{H} = \text{premier bloc-ligne de } \hat{\mathcal{O}}^N$$

$$\bar{G} = \text{premier bloc-colonne de } \hat{\mathcal{C}}^N \tag{19}$$

$$\text{et} \quad F = \hat{\mathcal{O}}^{+} \hat{\mathcal{O}}^{\uparrow}$$

où $\hat{\mathcal{O}}^{+} = \bar{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \bar{U}^T$ est la pseudo-inverse de $\hat{\mathcal{O}}^N$ et $\hat{\mathcal{O}}^{\uparrow}$ est obtenu en décalant $\hat{\mathcal{O}}^N$ d'une bloc-ligne vers le haut et en introduisant une bloc-ligne nulle dans le bas.

Par analogie avec (8) nous pouvons maintenant définir des matrices approchées -notées $\bar{\Gamma}_i$- des matrices de covariance estimées Γ_i :

$$\bar{\Gamma}_{\Delta+i} = \bar{H} F^i \bar{G} \qquad i \geqslant 0 \tag{20}$$

Remarques :

- La présence de Δ, justifie l'utilisation de barres sur H et G dans (20) qui est à comparer à (8).

- L'approche décrite ici est, mise à part la présence de Δ, une procédure relativement classique remplaçant l'algorithme de Ho [10] comme pour être peu robuste.

- Nous pourrions maintenant poursuivre la démarche décrite au chapitre II pour obtenir une représentation d'état, mais cela ne nous aiderait guère, vue la manière compliquée dont les retards interviennent dans un tel modèle. Cette deuxième phase (l'algorithme de Faure) est par ailleurs connue pour être numériquement mal conditionnée.

- Le modèle paramétrique ($\bar{H}$, F, $\bar{G}$) contient toute l'information que nous allons utiliser dans la suite pour estimer le nombre de sources et les retards. Le fait de ne par utiliser Γ_0 à $\Gamma_{\Delta-1}$ pour identifier ce modèle présente des avantages et des inconvénients :
- il protège le modèle contre les bruits de mesure blancs (ou d'ailleurs du type moyenne glissante d'ordre inférieur à Δ) qui n'affectent directement que la diagonale de l'estimée Γ_0 de R_0 ; - il permet l'utilisation des inter-covariances d'ordre supérieures à Δ dans l'estimation du modèle ; - par contre il exclue l'utilisation des Δ premiers points des inter-covariances qui contiennent une information précieuse sur les retards .

III-2- ALGORITHME D'ESTIMATION DES RETARDS

La matrice F du modèle paramétrique estimé (20) est maintenant bloc-diagonalisée par une matrice T de changement de base réelle. Les blocs diagonaux sont de dimensions (1,1) ou (2,2) suivant la nature, réelles ou complexes, des valeurs propres de F qui sont supposées simples. Notons F_k un des blocs et $\bar{H}_k$ et $\bar{G}_k$, respectivement, les blocs correspondants de $\bar{H}T$ et $T^{-1}\bar{G}$ et appelons m le nombre de blocs. La relation (20) s'écrit maintenant :

$$\bar{\Gamma}_{\Delta+i} = \sum_{k=1}^{m} \bar{\Gamma}_{\Delta+i}^{(k)} \qquad i \geqslant 0$$

où

$$\bar{\Gamma}_{\Delta+i}^{(k)} = \bar{H}_k F_k^i \bar{G}_k \tag{21}$$

Cette opération a pour effet de "découpler" la suite de matrices de covariance (20) en la somme de m sous-suites appelées élémentaires. Chacune d'elles est considérée comme issue d'une source "élémentaire". L'algorithme d'estimation des retards décrit ci-dessous est appliqué à chacune de ces m suites et va fournir dans notre cas (2 capteurs) m couples : (retard, atténuation). Dans une deuxième étape ces m couples sont examinés et ceux dont les valeurs sont voisines sont regroupés et déclarés correspondre à une source unique.

Nous décrivons l'algorithme dans le cas d'une suite $\{\Gamma^{(k)}_{\Delta+i}\ ;\ i \geqslant 0\ ;\ k \text{ fixé}\}$ associée à deux valeurs propres complexes conjuguées de F. Posons alors :

$$\det(zI - F_k) = z^2 + \alpha z + \beta$$

$$\bar{G}_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Gamma}^{(k)}_{\Delta+i}\, z^{-i} = z\, \bar{H}_k (zI - F_k)^{-1}\, \bar{G}_k$$

$$= \frac{Az^2 + Bz}{z^2 + \alpha z + \beta} \qquad (22)$$

où A et B sont des matrices réelles (2,2). En absence d'erreur d'estimation $\bar{G}_k(t)$, la transformée en z inverse de $\bar{G}_k(z)$ aurait la structure d'une matrice de covariance de la forme (cf. (3)) :

$$\hat{G}(t) = \begin{bmatrix} \hat{r}(t+\Delta) & \sqrt{g}\ \hat{r}(t+\Delta+d) \\ \sqrt{g}\ \hat{r}(t+\Delta-d) & g\ \hat{r}(t+\Delta) \end{bmatrix} \qquad (23)$$

avec $\hat{r}(t)$ la fonction de covariance d'un processus ARMA (2,1), d le retard et g l'atténuation. Dans la pratique, l'estimée $\bar{G}_k(t)$ n'a pas cette structure et la procédure d'estimation proposée consiste à adapter au mieux une telle matrice (23) à $\bar{G}_k(t)$.

Si on observe que les 4 composantes $\bar{g}_{ij}(z)$ de $\bar{G}_k(z)$ ont même dénominateur, il semble naturel de se limiter à des matrices candidates ayant également ce dénominateur. Ceci revient à ne considérer que des processus ARMA (2,1) dont les transformées en z de la fonction de covariance décalée de Δ, $\hat{r}(t+\Delta)$, dépendent de 2 paramètres a et b :

$$\hat{g}_{11}(z) = \frac{az^2 + bz}{z^2 + \alpha z + \beta} \qquad (24)$$

On est ainsi amené à une optimisation par rapport à 4 paramètres (a, b, g, d). Le critère que nous minimisons est le suivant :

$$J(a,b,g,d) = \sum_{i,j=1}^{2} \{ \sum_{k=o}^{\infty} (\bar{g}_{ij}(k) - \hat{g}_{ij}(k,.))^2 \} \qquad (25)$$

Ce critère présente l'avantage de se calculer facilement de manière analytique. Cependant, sauf dans le cas d'une source élémentaire à un pole réel simple, sa minimisation est à effectuer de manière itérative [9].

Dans une première étape des estimées initiales de a, b et g sont obtenues en ne conservant que les termes diagonaux (i = j = 1,2) dans (25). Ces estimées permettent également de calculer la variance de $\hat{r}(o)$ de la source élémentaire considérée. Si cette variance est inférieure à un certain seuil, négative ou si elle ne correspond pas à un maximum de la fonction de covariance, on décide de diminuer l'estimée $\hat{n}$ du rang de la matrice de Hankel et l'on calcule un nouveau triplet $(\bar{H}, F, \bar{G})$ (17,18,19).

IV. RÉSULTATS DE SIMULATION

IV.1. <u>RESUME DE LA PROCEDURE PROPOSEE</u>

a) à partir des données vectorielles Y_k, on estime Γ_i les matrices de covariance $E(Y_k\, Y^T_{k-i})$.

b) on construit à l'aide de ces estimées la matrice bloc-Hankel (5) : $\mathbb{H}^N_\Delta$ où Δ(14) est un majorant entier des retards. La dimension (2N) de cette matrice carrée est à choisir en fonction du rapport signal à bruit présumé, du nombre de données .....

c) on réalise la décomposition en valeurs singulières de $\mathbb{H}^N_\Delta$ et on estime son rang $\hat{n}$.

d) on réalise la factorisation (18,19) de la matrice $\bar{H}^N_\Delta$ (17) de rang $\hat{n}$ pour en déduire le triplet $(\bar{H}, F, \bar{G})$.

e) on bloc-diagonalise la matrice F.

f) sur chacun des triplets élémentaires (21) $(\bar{H}_k, F_k, \bar{G}_k)$ on minimise le critère (25).

g) on regroupe les triplets ayant des atténuations et retards voisins et on peut recommencer la minimisation d'un critère analogue sous contraintes-égalités pour tenir compte des regroupements.

IV-2- <u>RESULTATS</u>

La procédure est testée sur des simulations. Les exemples choisis sont similaires à ceux considérés dans [6,7]. Les paramètres communs à toutes les simulations sont : - période d'échantillonnage unité ; - pas d'atténuation $g_i = 1$, i = 1,2 ; - nombre de données K = 1000. La valeur de Δ (14) est en général $\Delta = 3$, et celle de N est N = 30, la dimension de $\mathbb{H}^N_\Delta = \mathbb{H}^{30}_3$ est (60,60).

IV-2-1- *Chevauchement des densités spectrales*

Cet exemple est traité dans [6] et [7]. On simule 20 réalisations indépendantes. Il y a deux capteurs et deux sources modélisées par des processus AR (2) de même bande passante (0.025 Hz) et de fréquences centrales 0.15 Hz et .17 Hz. La puissance des sources est égale à 1 et le rapport signal à bruit est de - 6 dB pour chaque source. Les dénominateurs des deux modèles sont :

$$d_1(z) = 1 - 1.096\ z^{-1} + 0.87\ z^{-2}$$

$$d_2(z) = 1 - 0.899\ z^{-1} + 0.87\ z^{-2}$$

Le tableau I donne les moyennes et écarts-type des fréquences centrales et des retards pour les 20 réalisations indépendantes. Les retards simulés vont de ±2 à ±0.1 périodes d'échantillonnage.

Les performances sont comparables à ceux de [6] et [7]. Nous n'avons pas utilisé la "connaissance" a priori que les modèles étaient AR (2) et non ARMA (2,1).

IV-2-2- *Bruits de mesure corrélés spatialement*

Cet exemple est tiré de [7]. Les deux bruits de mesure (1) $n_i(t)$, i = 1,2 sont colorés et corrélés spatialement avec pour modèle discret :

$$n_1(k) = e_1(k) + e_1(k-1) + e_2(k-1)$$
$$n_2(k) = e_2(k) + e_2(k-1) + e_1(k-1)$$

où $e_1(.)$ et $e_2(.)$ sont des bruits blancs indépendants.

Les modèles continus des sources sont tels que leurs modèles discrets soient des processus AR (2) de dénominateurs :

$$d_1(z) = 1 - 1.51\ z^{-1} + 0.87\ z^{-2}$$

$$d_2(z) = 1 - 1.10\ z^{-1} + 0.87\ z^{-2}$$

Les bandes passantes sont de 0.025 Hz et les fréquences centrales 0.15 Hz et 0.10 Hz. Le rapport signal à bruit prend trois valeurs S/B1 = - 6dB ; S/B2 = 10dB et S/B3 = 20dB et cinq jeux de retards sont considérés dans le Tableau II où les résultats sont moyennés sur 20 réalisations indépendantes.

Les densités spectrales sont mieux séparées que dans l'exemple précédent. La présence de Δ (Δ = 3 dans nos simulations) rend la procédure robuste vis à vis de ce type de bruits de mesure (moyenne glissante d'ordre inférieur à Δ).

Dans les publications [6] et [7], la manière dont les retards ont été simulés n'est pas précisée. Le théorème d'échantillonnage (fonction sinc (.) tronquée) [2] a sans doute été utilisé. Ces simulations ne sont donc pas strictement comparables à celles réalisées ici.

V. CONCLUSION

Une méthode originale d'estimation de retards a été proposée. Elle est applicable dans le cas multi-capteurs et multi-sources et permet de traiter le cas de trajets multiples. L'hypothèse initiale de sources à spectres rationnels, essentielle dans le développement de la méthode n'est sans doute pas nécessaire dans la pratique.

D'une manière générale, on peut reprocher à la méthode son important volume de calcul (décomposition en valeurs singulières de $\hat{H}^N_\Delta$) et le fait qu'elle n'utilise pas les Δ premiers points de la fonction d'intercovariance. Il semble que vue la popularité actuelle de la décomposition en valeurs singulières, des algorithmes rapides utilisant la structure bloc-Hankel de $\dot{H}$ devraient apparaître sous peu. Quant à la présence de Δ, on comprend aisément son intérêt en présence de bruits de mesure corrélés spatialement, une situation parfaitement réaliste dans la pratique.

Retard	f_1	σf_1	f_2	σf_2	d_1	σd_1	d_2	σd_2
± 2	0.150	0.004	0.171	0.004	2.309	0.544	-1.934	0.391
± 1.5	0.150	0.004	0.170	0.004	1.515	0.485	-1.469	0.402
± 1	0.149	0.005	0.170	0.004	0.819	0.234	-0.947	0.241
± 0.5	0.149	0.006	0.169	0.004	0.396	0.217	-0.360	0.159
± 0.25	0.150	0.015	0.166	0.012	0.220	0.212	-0.168	0.237
± 0.1	0.150	0.005	0.171	0.007	0.068	0.321	-0.083	0.172

Tableau I

Chevauchement des densités spectrales

Retards	S/B	Source 1		Source 2	
		Moyenne	écart-type	Moyenne	écart-type
± 1.50	-6dB	- 1.382	0.292	1.482	0.267
	10dB	- 1.452	0.141	1.493	0.098
	20dB	- 1.537	0.140	1.505	0.081
± 1.0		- 0.976	0.276	0.934	0.172
		- 0.997	0.170	0.999	0.085
		- 0.984	0.089	1.008	0.101
± 0.5		- 0.447	0.319	0.401	0.333
		- 0.463	0.140	0.511	0.085
		- 0.501	0.087	0.495	0.051
± 0.25		- 0.220	0.173	0.251	0.125
		- 0.239	0.076	0.251	0.057
		- 0.247	0.035	0.251	0.031
± 0.10		- 0.085	0.124	0.123	0.102
		- 0.102	0.075	0.106	0.046
		- 0.101	0.038	0.106	0.029

Tableau II

Bruits de mesure corrélés spatialement

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.H. KNAPP and G.C. CARTER : "The generalized correlation method for estimation of time delay", IEEE-T-ASSP, vol 24, pp. 320-327, August 1976.

[2] Y.T. CHAN, J.M. RILEY and J.B. PLANT : "A parameter estimation approach to time delay estimation and signal detection", IEEE-T-ASSP, vol 28, pp. 8-16, February 1980.

[3] G. BIENVENU and L. KOPP : "Source power estimation method associated with high resolution bearing estimation", Proceedings IEEE-ICASSP, pp. 153-156, Atlanta 1981.

[4] R.O. SCHMIDT : "A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation", Ph. D. dissertation, Stanford Univ, 1981.

[5] G. VEZZOSI : "Estimation of phase angles from the cross-spectral matrix", soumis à IEEE-ASSP, December 1984.

[6] B. PORAT and B. FRIEDLANDER : "Estimation of spatial and spectral parameters of multiple sources", IEEE-T-IT, pp. 412-425, May 1983.

[7] A. NEHORAI, Q. SU and M. MORF : "Estimation of time difference of arrival by pole decomposition", IEEE-T-ASSP, vol 31, pp. 1478-1492, December 1983.

[8] M. SIDAHMED : "Filtrage d'antenne et Imagerie par des modèles AR multidimensionnels", Colloque GRETSI, Juin 1983.

[9] J.J. FUCHS : "State space modeling and estimation of TDOA's", soumis à IEEE-ASSP, Juillet 1984.

[10] B.L. HO and R.E. KALMAN : "Effective construction of linear state variable models", Regehlungstechnik 14, pp. 545-548, 1966.

[11] P. FAURRE : "Stochastic realizations algorithms" in System Identification : Advances and case studies, Ed. R. Mehra and D.G. Lainotis, New-York, Academic.

[12] G.H. GOLUB, G. REINSCH : "Singular value decomposition and least squares solutions", Num. Math, vol 14, pp. 403-420, 1970.

[13] J.J. FUCHS : "ARMA order estimation via canonical correlation analysis", soumis à 24e CDC-IEEE, March 1985.

[14] ZEIGER M.P., Mc EWEN A.J. : "Approximate linear realizations of given dimensions via Ho"s algorithm" and "Comments on "....." ", IEEE-Trans-AC, vol AC-19, p. 153, April 1974 ans vol AC-20, p. 302, April 1975.

[15] U.B. DESAI, D. PAL : "A realization approach to stochastic model reduction and balanced stochastic realization", Proceedings of the 21st IEEE Conf. on Decision and Control, Orlando, Fl., pp. 1105-1112, December 1982.