DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

ADAPTATIVITE DES METHODES DE CALCUL D'ELEMENTS PROPRES D'UNE MATRICE INTERSPECTRALE - APPLICATIONS

Jean Pierre LE CADRE* Jean Paul BERLIOZ**

* CEPHAG, BP n° 46 38402 SAINT MARTIN D'HERES
GERDSM, Le Brusc 83140 SIX FOURS LES PLAGES

** CCSA/CELAR 35170 BRUZ

RESUME

Cet article a pour objet le calcul rapide et adaptatif du spectre d'une matrice interspectrale. Une méthode de calcul des éléments propres d'une matrice pertrubée par une dyade est exposée. Le calcul des éléments propres d'une matrice interspectrale estimée par la méthode du périodogramme moyenne peut être rendue adaptative. Des simulations comparent cet algorithme et une procédure classique. La prise en compte des multiplicités et les possibilités de parallélisation en font un algorithme très performant.

SUMMARY

This paper is concerned with the fast and adaptative évaluation of eigenelements of a spatial coherence matrice.

Based on the rank-one modification of the hermitian eigenvalue problem. Adaptativity is obtained when estimating the spatial coherence matrice by using the periodgram method. This algorithm is compared with a classical eigenvalue method. More can be done with the potential parallelism of the method.

1 - INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

L'écoute passive en acoustique sous-marine utilise depuis peu les algorithmes de recherche de valeurs propres ; en effet l'exploitation des éléments propres de la matrice interspectrale des signaux reçus permet, en faisant l'hypothèse de la connaissance des propriétés interspectrales du bruit ambiant, d'obtenir une décomposition globale du champ des bruiteurs. [1], [3] Cependant, trois problèmes entravent l'utilisation de tels algorithmes :

- le temps de calcul pour les algorithmes usuels.
- l'adaptativité du traitement
- la stationnarité ou non du signal durant la période d'observation.

Le but de cet article est de préconiser un algorithme de calcul rapide et potentiellement adaptatif, de tous les éléments propres d'une matrice, méthode due à Bunch, Sorensen, Nelsen [2] . Cet algorithme basé sur les propriétés des matrices symétriques perturbées par une dyade est applicable au traitement d'antenne en acoustique sous-marine.

Nous développons ces points dans les paragraphes suivants :

2) présentation de la méthode de mise à jour d'éléments propres.

3) évaluation numérique et applications.

2 - PRESENTATION DE LA METHODE DE MISE A JOUR D'ELEMENTS PROPRES

Précisons d'abord ce que nous entendons par mise à jour d'éléments propres.

Nous supposons connus les éléments propres d'une matrice Hermitienne Γ d'ordre n :

Σ est la matrice diagonale des valeurs propres, ordonnées de façon croissante.

Q la matrice unitaire des vecteurs propres associés, rangés par colonne.

autrement dit :

$$\Gamma = Q^* \Sigma Q$$

La mise à jour consiste à calculer de façon rapide et stable les éléments propres de $\Gamma + \rho X X^*$ à partir de Σ et Q . X est un vecteur colonne unitaire d'ordre n .

Notons $\tilde{\Sigma}$ la diagonale des nouvelles valeurs propres, et $\tilde{Q}$ la matrice des vecteurs colonnes associés.

Les éléments diagonaux σ_i et $\tilde{\sigma}_i$ vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 1

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \rho\mu_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Propriété 2

Si les éléments σ_i sont distincts et les coefficients z_i non nuls alors les σ_i séparent les éléments $\tilde{\sigma}_i$ de la façon suivante :

$$\text{si } \rho > 0, \quad \sigma_1 < \tilde{\sigma}_1 < \sigma_2 < \cdots < \tilde{\sigma}_{n-1} < \sigma_n \,.$$

$$\text{si } \rho < 0, \quad \tilde{\sigma}_1 < \sigma_1 < \tilde{\sigma}_2 < \cdots < \tilde{\sigma}_n < \sigma_n \,.$$

$$\text{et } Z = QX \qquad Z^t = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

Nous verrons par la suite qu'il est toujours possible et même avantageux de se ramener aux hypothèses de la propriété 2. Sauf mention expresse, nous adoptons ces hypothèses dans tout ce qui suit.

2.1 - Calcul des valeurs propres

Après un changement de variables et un calcul déterminantal classique nous cherchons la valeur μ_i (propriété 1), solution unique dans $]0 1[$ de l'équation :

$$\omega_i(\mu) = 0$$

$$\omega_i(\mu) = 1 + \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \Big/ \left(\frac{\sigma_j - \sigma_i}{\rho} - \mu\right)$$

La résolution de cette équation peut aussi se reformuler à l'aide des deux fonctions ψ et φ suivantes :

pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{i} z_j^2 \Big/ \left(\frac{\sigma_j - \sigma_i}{\rho} - t\right)$$

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=i+1}^{n} z_j^2 \Big/ \left(\frac{\sigma_j - \sigma_i}{\rho} - t\right)$$

pour $i = n$ $\quad \psi_n(t)$

Les remarques suivantes montrent l'intérêt de cette formulation :

$-\psi$ est une fonction convexe décroissante sur

$$\left]0, \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\rho}\right[$$

est une fonction convexe croissante et

$$-\psi(0) > 1 + \varphi(0)$$

Par bissection et interpolation locale de φ et ψ, nous pourrons alors résoudre le problème de façon itérative.

1) en interpolant de façon linéaire, nous obtenons la méthode Newton ; connaissant un itéré t_i , il s'agit de trouver t_{i+1} vérifiant :

$$\psi(t_i) + (t - t_i)\psi'(t_i) = \varphi(t_i) + (t - t_i)\varphi'(t_i)$$

2) en interpolant de façon rationnelle, [2] , il s'agit de trouver t_{i+1} vérifiant :

$$-\frac{p}{(q-t)} = r + s \Big/ \left((\sigma_{j+1} - \sigma_i)/\rho - t\right)$$

r, s, p, q sont obtenus en écrivant les conditions d'interpolation en t_i , sur les fonctions et leurs dérivées premières.

Propriété 3

Pour tout itéré initial t_0 de l'intervalle $]0, \mu_i[$ la convergence vers μ_i de la suite t_i précédemment définie est assurée, l'ordre de convergence est quadratique.

2.2 - Calcul des vecteurs propres

Une fois les valeurs μ_i calculées, le vecteur propre V_i de la matrice $C = \Sigma + \rho ZZ^*$, associé à la valeur propre $\tilde{\mu}_i$ est obtenu par :

$$V_i = (\Sigma - \tilde{\mu}_i I)^{-1} Z$$

Notons V ,la matrice des vecteurs propres de C, rangés par colonnes ; les vecteurs propres de $\Gamma + \rho XX^*$ sont obtenus par :

$$\tilde{Q} = Q \cdot V$$

Bunch, Nielsen, Sorensen ont montré que ce calcul était stable [2] .

La discussion des hypothèses de la propriété 2 permet de voir les variations possibles de la complexité du calcul.

Remarque 1 :

Chaque fois qu'une composante z_i est nulle, le problème des éléments propres de $\Sigma + \rho zz^*$ est réduit d'un ordre ;

Si P est la matrice qui permutte la ligne i et la ligne n $(z_i = 0)$ alors nous considèrons le problème correspondant à la sous-matrice d'ordre $n-1$ de PCP^* ,supérieure gauche.

Remarque 2 :

Si Σ a $k+1$ valeurs diagonales égales sur les lignes n_1 à n_1+k ,alors il existe une matrice élémentaire de Householder telle que Hz ait ses k composantes n_1+1 à n_1+k nulles.
Nous sommes ramenés au cas précédent en considérant la sous matrice d'ordre $n-k$ de H^*CH, supérieure gauche.

2.3 - Complexité de l'algorithme

Dans le cas où le problème d'ordre n a m valeurs propres distinctes, le calcul des valeurs propres seules est en $O(m)$ opérations ; le calcul des vecteurs propres est en $nm^2 + O(m^2)$ opérations.

Lorsque $m = n$,nous avons le même niveau de complexité que l'algorithme standard (tridiagonalisation plus QL implicite) ; cependant nous constaterons aussi dans ce cas une nette amélioration surtout avec l'apport de la vectorisation.

3 - EVALUATIONS NUMERIQUES ET APPLICATIONS

3.1 - Evaluation numérique :

Nous présentons dans tous les tableaux suivants des temps de calcul CPU moyens pour une programmation de l'algorithme de mise à jour (T_1) et un programme standard (T_2) .Ces temps moyens sont obtenus à partir d'échantillons de 20 matrices de la forme $\Sigma + \rho XX^*$ dont les éléments sont tirés aléatoirement.

Le tableau 1 rapporte des temps moyens obtenus sur UNIVAC 1180 (CCSA) pour des diagonales Σ à éléments distincts.

Une programmation Fortran non optimisée de la mise à jour se révèle au mieux 1.9 fois plus rapide que l'algorithme standard (bibliothèque NAG). Une programmation optimisée dans les deux cas (très dépendante de la machine) rend la mise à jour 2.5 fois plus rapide.

Le temps de calcul se comporte en $O(n^3)$ et pour les ordres considérés 2/3 de ce temps est consacré au calcul des vecteurs propres. Au maximum 3 itérations sont nécessaires pour le calcul de chaque valeur propre. Deux directions sont envisagées pour rendre ces temps de calculs plus probants

a) Prise en compte des multiplicités

Les résultats du tableau 2 mettent en évidence les gains importants obtenus lorsque l'on a k valeurs propres égales. Les versions comparées sont également optimisées et réelles. Si 2/3 des valeurs propres sont égales la mise à jour est 20 fois plus rapide que l'algorithme standard.

b) Vectorisation du calcul des vecteurs propres

Dans le tableau 3, (T_3) est le temps moyen CPU de mise à jour sur une machine vectorielle, (T_4) le temps moyen de l'algorithme standard (EISPACK). Nous sommes obligés de considérer des ordres non réalistes pour le traitement d'antenne étant donné la machine utilisée (CRAY du CCVR).

Nous constatons à l'ordre 30 des gains voisinslors du changement de machine :

$$T_1'/T_3 = 11.6$$

$$T_2'/T_4 = 11.$$

à cet ordre nous n'utilisons que le gain technologique de la machine scalaire.

A des ordres supérieurs, le rapport T_1'/T_3 est de l'ordre de 37 tandis que T_2'/T_4 ne dépasse pas 20. La mise à jour se vectorise mieux. Nous constatons que l'évolution du temps de calcul de la mise à jour est en $O(n^2)$ (ou $O(nm)$, m est le nombre de valeurs propres distinctes).

L'exploitation conjointe des multiplicités de la vectorisation, du parallélisme sur un calculateur adapté laisse prévoir la mise à jour comme nettement plus rapide qu'un algorithme standard tel que tridiagonalisation plus QL. Parions sur un gain d'au moins 100. L'évolution du temps de calcul théoriquement atteignable est alors de $O(n)$.

Dans les tableaux suivants nous rapportons les temps CPU en millisecondes

T_1 : Temps CPU de mise à jour sur UNIVAC 1180. Version non optimisée (T'_1 version optimisée)

T_2 : Temps CPU d'un algorithme standard (NAG) UNIVAC 1180. Version non optimisée (T'_2 version optimisée)

T_3 : Temps CPU de mise à jour partiellement vectorisée.

T_4 : Temps CPU d'un algorithme standard (EISPACK) vectorisé.

Tab.1 : Matrices Hermitiennes d'ordre n, valeurs propres distinctes

N	13	25	30
T_1	60	379	628
T_2	112	699	1236
T_2/T_1	1.64	1.89	1.96

Tab.2 : Matrices symétriques d'ordre 30, k valeurs propres égales

k	0	10	15	20
T'_1	140	78	42	20
T'_2	320	323	336	323
T'_2/T'_1	2.28	4.5	8	16

Tab.3 : Matrices symétriques d'ordre n. Vectorisation valeurs propres distinctes

N	30	60	90	100
T_3	12	32	63	78
T_4	29	87	270	354
T_4/T_3	2.4	2.5	4.2	4.5

3.2 - Applications

En traitement d'antenne sonar, ce type d'algorithme de mise à jour peut rendre adaptatif la recherche des éléments propres d'une matrice interspectrale calculée par le périodogramme moyenne. A l'étape N, les éléments propres de la matrice sont supposés connus :

$$\Gamma_N = \frac{1}{N} \sum_k X_k X_k^*$$

les éléments propres de Γ_{N+1} sont calculés par mise à jour en considérant :

$$\frac{N}{N+1} \Gamma_N + \frac{1}{N+1} X_{N+1} X_{N+1}^*$$

Le problème de la non-stationnarité des signaux peut être pris en compte par l'introduction d'un facteur d'oubli.

Il reste à décider de la multiplicité numérique des plus petites valeurs propres correspondantes au bruit ambiant de façon à tirer profit des performances de l'algorithme de ce cas indépendamment de ses possibilités de vectorisation ou de parallélisation.

4 - CONCLUSION

La méthode de mise à jour d'éléments propres décrite, fournit un moyen de calcul rapide et stable adaptatif d'éléments propres de matrice interspectrale. Deux directions sont à explorer pour la rendre tout à fait opérationnelle en traitement d'antenne :

- les possibilités de parallélisation et l'utilisation de machines spécialisées.
- la prise en compte de la non-stationnarité des signaux.

5 - REFERENCES

1 Bienvenu - Kopp

Principe de la goniométrie passive adaptative
7ème colloque du GRETSI, NICE, Mai-Juin 1979

2 JR. Bunch, C.N. Nielsen, D.C Sorensen

Rank one modification of the symmetric eigenproblem.
Num. Math. 31, p. 31 - p. 48 (1978)

3 Mermoz

Imagerie - corrélation et modèles
Annales telecom 31 n° 1 - 2 Janv. Févr. 1976