

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

PERFORMANCE DE DIVERS ALGORITHMES POUR LA DETECTION,
DANS LES PROBLEMES D'IMAGERIE, DU NOMBRE D'EXCITATIONS
NON CORRELEES

Idir TAS - Claudine LATOMBE

CEPHAG-ENSIEG (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques) - Laboratoire associé au CNRS
Domaine Universitaire bp 46 - 38402 St-Martin-d'Hères (FRANCE)

RESUME

Nous traitons dans cette étude le problème de la détermination du nombre de sources non corrélées lors de traitement de signaux multicomposantes.

En premier lieu nous donnons un développement mathématique pour démontrer les expressions des critères AIC et MDL dans le domaine fréquentiel, proposés récemment (1974-1978) pour la détermination de l'ordre d'un modèle.

Comme l'ont fait en 1983, M. WAX & T. KAILATH d'une part et G. VEZZOSI & P. NICOLAS d'autre part, nous appliquons ces critères dans le cas de traitement de signaux multicomposantes pour la détermination de sources avec des bruits isotropes et non corrélés.

Ensuite nous les comparons sur des signaux que nous avons simulés et nous constatons que le critère MDL donne de façon générale de meilleurs résultats.

Nous abordons aussi le problème de robustesse de ces critères vis-à-vis de l'anisotropie de bruits et vis-à-vis de bruits partiellement corrélés.

SUMMARY

In this study we treat the problem of the determination of the number of uncorrelated sources in the processing of multidimensional data.

First of all we give a mathematical development to demonstrate the expressions of AIC and MDL criteria in the frequency domain, recently proposed (1974-1978) to determine the order of a model.

As M. WAX & T. KAILATH on one hand, and G. VEZZOSI & P. NICOLAS on other one did in 1983, we apply these criteria in the case of multicomponent signal processing to determine the number of uncorrelated signals which are present in the data corrupted by anisotropic, non correlated noises.

Next we compare how they work on simulated signals and we notice that the MDL criterion generally gives better results than the AIC criterion.

We also look at the problem of robustness of these criteria, in the case of anisotropic or partially correlated noises.



1 - INTRODUCTION

Nous nous intéressons à la détection d'un champ de P sources ponctuelles à partir des signaux enregistrés sur un réseau de N capteurs.

Nous supposons que le modèle de propagation peut être représenté par un système linéaire et stationnaire à P entrées (les "sources" ou les "excitations") et N sorties (les signaux enregistrés sur les capteurs), avec P inférieur à N.

Les signaux enregistrés sont la somme des signaux $S_i(t)$, signal reçu sur le capteur i et issu de la source j, et d'un bruit $B(t)$ supposé centré dû au milieu de propagation et/ou au système de réception.

L'observation s'écrit alors :

$$\underline{r}(t) = \sum_{j=1}^P \underline{S}^j(t) + \underline{B}(t) \quad (1)$$

Avec $\underline{r}(t)=[r_1(t), \dots, r_N(t)]^T$ et $\underline{R}(f)=TF[\underline{r}(t)]$
 $\underline{S}^j(t)=[S_1^j(t), \dots, S_N^j(t)]^T$ et $\underline{B}(t)=[B_1(t), \dots, B_N(t)]^T$

Où T désigne le transposé d'un vecteur et TF la transformée de Fourier. La matrice spectrale de l'observation s'écrit :

$$\underline{\gamma}(f) = E \left\{ \underline{R}(f) \cdot \underline{R}^+(f) \right\} \quad (2)$$

E désigne l'espérance mathématique et + le transposé conjugué. Lorsque les bruits $B(t)$ sont non corrélés avec les signaux $S^j(t)$ ($j \in [1, P]$), non corrélés entre eux et ont même puissance sur tous les capteurs, $\underline{\gamma}(f)$ prend la forme suivante :

$$\underline{\gamma}(f) = \underline{\gamma}_s(f) + \sigma^2(f) \underline{I}_N \quad (3)$$

$\underline{\gamma}_s(f)$ est la matrice spectrale des sources seules $\sigma^2(f)$ la dsp (densité spectrale) des bruits et \underline{I}_N la matrice identité (N x N).

Nous cherchons ici à évaluer les performances de divers algorithmes de détection du nombre de sources P.

2 - NOTATIONS ET RAPPELS THEORIQUES

2-1 "Vecteur" de paramètres du modèle :

L'observation ($\underline{r}(t)$) étant supposée gaussienne et les sources non corrélées, en utilisant l'estimation du maximum de vraisemblance de $\underline{\gamma}_s(f)$ et $\sigma^2(f)$ lorsque P est connu (cf [7]) $\underline{\gamma}(f)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\gamma}(f) = \sum_{j=1}^P [\hat{\lambda}_j(f) - \hat{\sigma}_p^2(f)] \underline{v}_j(f) \cdot \underline{v}_j^+ + \hat{\sigma}_p^2(f) \underline{I}_N \quad (4)$$

Avec $\hat{\sigma}_p^2(f) = \frac{1}{N-P} \sum_{j=P+1}^N \hat{\lambda}_j(f)$ (5)
 $\hat{\lambda}_1(f) \gg \dots \gg \hat{\lambda}_N(f)$ et $\underline{v}_1(f), \dots, \underline{v}_N(f)$ sont respectivement les valeurs et les vecteurs propres de $\underline{\gamma}(f)$.

L'inconnue étant P (nombre d'excitations non corrélées) qu'il faut estimer. A chaque valeur de P correspond une matrice $\underline{\gamma}(f)$ notée $\underline{\gamma}^P(f)$. Soient $\underline{v}_i^P(f)$ et $\hat{\lambda}_i^P(f)$ ($i \in [1, N]$) respectivement les vecteurs et les valeurs (rangées par ordre décroissant) propres de $\underline{\gamma}^P(f)$.

Le vecteur des paramètres du modèle noté $\underline{\Phi}_p$, est défini comme suit :

$$\underline{\Phi}_p = [\hat{\lambda}_1^p, \dots, \hat{\lambda}_p^p, \underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_p^T, \hat{\sigma}_p^2]^T \quad (6)$$

2-2 Rapport de vraisemblance généralisé :

Pour tester l'hypothèse présence de "P-sources" contre l'hypothèse présence de "q sources" on utilise le rapport de vraisemblance généralisé [8]

$$A = \frac{\text{MAX}_P V(\underline{R}(f)/P, \underline{\Phi}_P)}{\text{MAX}_q V(\underline{R}(f)/q, \underline{\Phi}_q)} \quad (7)$$

V : fonction de vraisemblance (densité de probabilité) de $\underline{R}(f)$.

Supposons $\underline{r}(t)$ stationnaire, gaussien, centré et que la matrice spectrale est estimée à partir de K réalisations indépendantes. G. BIENVENU et L. KOPP [2] ont montré que le logarithme de la vraisemblance est une fonction croissante de P, et donc, lorsque les hypothèses de décision sont :

-hypothèse H_p : Présence de P sources au plus
-hypothèse H_q : Présence de plus de P sources

Le rapport A s'écrit :

$$A(P, f) = \frac{\text{MAX}_{q \leq P} L(q, f)}{\text{MAX}_{p < q \leq N-1} L(p, f)} = \frac{L(P, f)}{L(N-1, f)} \quad (L = \log[V(\underline{R})])$$

En utilisant l'expression explicite de la log vraisemblance ([2] et [4]) en fonction des valeurs propres rangées par ordre décroissant de l'estimée $\hat{\gamma}(f)$ de $\underline{\gamma}(f)$, nous avons :

$$A(P, f) = \left[\frac{\prod_{i=1}^P \hat{\lambda}_i(f)}{\left(\frac{1}{N-P} \sum_{i=P+1}^N \hat{\lambda}_i(f) \right)^{N-P}} \right]^K \quad (8)$$

3 - CRITERES DE DETECTION

3-1 Critère AIC (AKAIKE INFORMATION CRITERION)

Ce critère a été proposé par H. AKAIKE [1] pour la détermination de l'ordre d'un modèle. C'est un estimateur de l'information de KULLBACK et il s'exprime (cf [7]) :

$$AIC = -2 \log[\text{MAXIMUM VRAISEMBLANCE}] + 2(NPL) \quad (9)$$

NPL est le nombre de paramètres libres du modèle, représenté ici par le vecteur $\underline{\Phi}_p$ (§ 2.2.) et donc $NPL = P(2N-P)$. G. VEZZOSI & P. NICOLAS [9] et M. WAX & T. KAILATH [10] utilisent ce critère avec la fonction de vraisemblance $V(\underline{R})$ de l'observable $\underline{R}(f)$; leur expression est notée $AIC(P, f)$. Nous remarquons qu'en utilisant ce critère avec pour premier terme le rapport de vraisemblance généralisé $A(P, f)$ défini au § 2.2., nous obtenons les mêmes résultats. En effet :

$$AIC_G(P, f) = -2 \log[A(P, f)] + 2P(2N-P) \quad (10)$$

$$= -2 \log[L(P, f)] + 2P(2N-P) + 2 \log[L(N-1, f)]$$

L'expression de $AIC_G(P, f)$ est de la forme $\beta(AIC + \delta)$, avec β et δ indépendants de P et $\beta > 0$. Donc les minimas de AIC et AIC_G sont les mêmes.

3-2 Critère MDL (MINIMUM DESCRIPTION LENGTH)

Inspiré par les travaux d'H. AKAIKE, J. RISSANEN ([5] et [6]) propose un critère basé sur les concepts de la théorie d'information. Du moment que chaque modèle peut être utilisé pour coder la séquence d'observation, J. RISSANEN propose de sélectionner le code de longueur minimale. Ce critère a pour forme :

$$MDL = -\log[\text{MAXIMUM VRAISEMBLANCE}] + \frac{1}{2}(NPL) \log(K) \quad (11)$$

M. WAX & T. KAILATH [10] l'utilisent avec la fonction de vraisemblance $V(\underline{R})$ de l'observable $\underline{R}(f)$. Ce même critère avec dans le premier terme le rapport de vraisemblance généralisé $A(P, f)$ donne les mêmes minimas que lorsqu'on l'utilise avec la fonction de vraisemblance (cf § 3.1). Nous prendrons donc :

PERFORMANCE DE DIVERS ALGORITHMES POUR LA DETECTION, DANS LES PROBLEMES D'IMAGERIE, DU NOMBRE D'EXCITATIONS NON CORRELEES

$$MDL(P, f) = -\log \left[\frac{\sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(f)}{\left(\frac{1}{N-P} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(f) \right)^{N-P}} \right]^K + \frac{1}{2} P(2N-P) \log K \quad (12)$$

A toute fréquence, on cherche P (P ∈ [0, N-1]) tel que MDL(P, f) soit minimum.

3-3 Critère simplifié à seuil

A une fréquence donnée le nombre de sources est donné par le nombre de valeurs propres supérieures à un certain seuil S qui devrait estimer le niveau de bruit.

Un choix possible de ce seuil est :

$$S = \frac{1}{N} \text{MAX}_{f_j} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i(f_j) \right] \quad (13)$$

S représente l'énergie moyenne des bruits, en absence de sources, par capteur.

Des seuils plus généraux mais plus difficiles à mettre en oeuvre ont été proposés [2] et [4].

4 - APPLICATIONS DES CRITERES :

Dans chaque simulation, la matrice spectrale de l'observation $\underline{r}(t)$ est estimée par la méthode du périodogramme lissé avec une fonction de pondération de TUCKEY. Si nous utilisons plusieurs réalisations de bruit, nous calculons une matrice spectrale moyenne et nous appliquons les critères (expressions (10), (12) et (13)) pour estimer le nombre de sources.

4-1 Première simulation

Nous avons simulé une situation pouvant se rencontrer en traitement d'antenne, avec des sources bande étroite. Les signaux émis par les trois sources sont de la forme :

$$S_1(t) = A_1 \cdot \text{COS}[2\pi f_1(1-m_1 t)t + \varphi_1]$$

$$S_2(t) = A_2 \cdot \text{COS}[2\pi f_1(1-m_2 t)t + \varphi_2] + B_1 \cdot \text{COS}[2\pi f_2(1-m_3 t)t + \varphi_3]$$

$$S_3(t) = A_3 \cdot \text{COS}[2\pi f_1(1-m_4 t)t + \varphi_4] + B_2 \cdot \text{COS}[2\pi f_2(1-m_5 t)t + \varphi_5] + C \cdot \text{COS}[2\pi f_3(1-m_6 t)t + \varphi_6]$$

A₁, A₂, A₃, B₁, B₂ et C sont des amplitudes certaines. f₁, f₂, et f₃ fréquences pures fixées (f₁=32Hz, f₂=64Hz et f₃=96Hz).

φ_i (i ∈ [1, 5]) : phases aléatoires équiparties sur [0, 2π]

m_i (i ∈ [1, 5]) : modulations linéaires fixées, choisies pour simuler des sources bande étroite non corrélées.

La disposition des sources et des capteurs est représentée en figure 1.

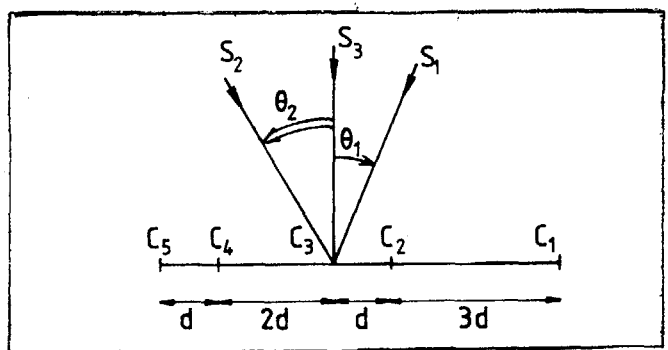


Figure 1

Les signaux reçus sont des ondes planes au niveau des capteurs, additivement bruitées, qui s'écrivent :

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^3 S_j(t - \tau_j) + a_i \cdot N_i(t) \quad (i \in [1, 5])$$

τ_j sont les retards de propagation et a_i constante N_i(t) : Réalisation d'un bruit blanc gaussien réduit.

4-2 Deuxième simulation :

Nous avons cherché à simuler une situation pouvant se présenter en sismique où il s'agit de séparer deux sources dont les fronts d'ondes non nécessairement plans arrivent sur un réseau de capteurs avec des retards très proches. Pour cela nous avons simulé deux sources qui émettent deux signaux de la forme :

$$S_j(t) = \sum_{i=1}^2 A_i \cdot \text{COS}[2\pi f_i(1-m_i t)t + \varphi_i^j] \quad (i \text{ et } j \in [1, 2])$$

Définitions des paramètres A_i^j, m_i^j et φ_i^j, cf § 4.1.

S₁(t) : onde plane dans la direction de l'antenne.

S₂(t) : onde hyperbolique.

La disposition des fronts d'onde et des capteurs est représentée en figure 2.

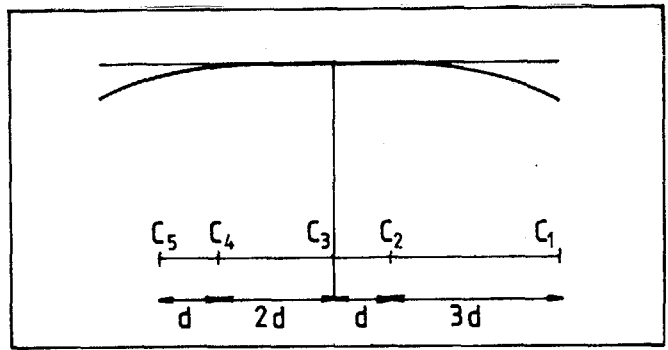


Figure 2

Les ondes reçues s'écrivent :

$$r_i(t) = S_1(t) + S_2(t + \alpha k_i \cdot T_E) + a_i \cdot N_i(t) \quad (i \in [1, 5])$$

T_E : période d'échantillonnage (T_E ≈ 4ms) et α constante. Nous avons pris :

f₁ = 32 Hz et f₂ = 86 Hz
k₁ = 1, k₂ = 1/4, k₃ = 0, k₄ = 1/2, k₅ = 3/4.

4-3 Résultats et commentaires

4-3-1 : 1ère simulation

Les caractéristiques signal sont fixées aux valeurs suivantes :

- A₁ = 20 B₁ = 20 C = 20
- A₂ = 25 B₂ = 25
- A₃ = 20
- m₁ = 0.06 ; m₂ = 0.09 ; m₃ = 0.12 ; m₄ = 0.03 ;
- m₅ = 0.04 et m₆ = 0.05.

Les estimations de la matrice spectrale sont faites avec un B_eT de 12.56.

Les caractéristiques du bruit peuvent varier par l'intermédiaire des coefficients a_i.

Les résultats obtenus dans un cas d'une seule réalisation de bruits isotropes et pour des rapports S/B compris aux différents capteurs entre 5 db et -1 db, sont présentés figure 3 : le critère AIC donne des sources parasites, alors que le critère MDL fournit les résultats attendus. Dans ce cas, le critère utilisant le seuil S donne également les résultats attendus.



PERFORMANCE DE DIVERS ALGORITHMES POUR LA DETECTION, DANS LES PROBLEMES D'IMAGERIE, DU NOMBRE D'EXCITATIONS NON CORRELEES

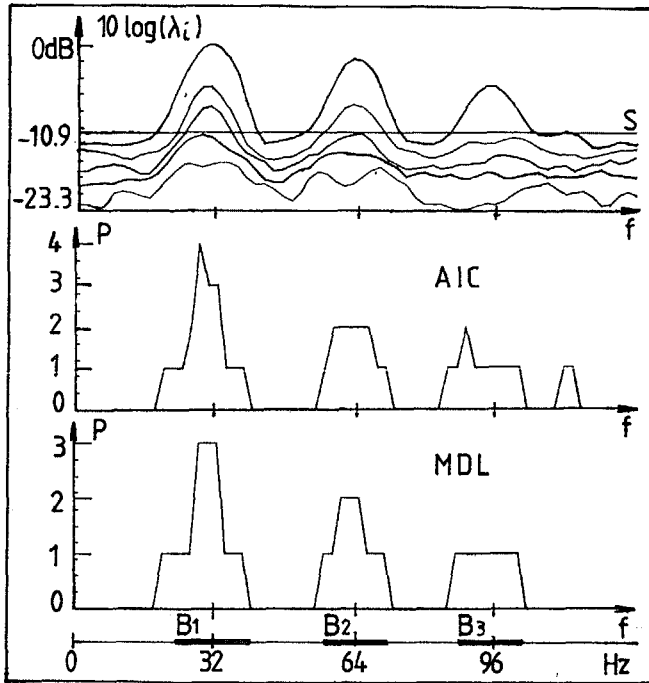


Figure 3 : Bruits isotropes et non corrélés (S/B moy) $\sigma_i = 34$ ($i \in [1,5]$), $M=1$

Dans un cas de bruits isotropes mais pour des rapports S/B voisins de 0 ou négatifs (fig.4), les résultats attendus sont obtenus après 6 moyennes sur des réalisations de bruits différentes. Pour la même situation, le seuil S donne 3 sources dans la bande B_2 .

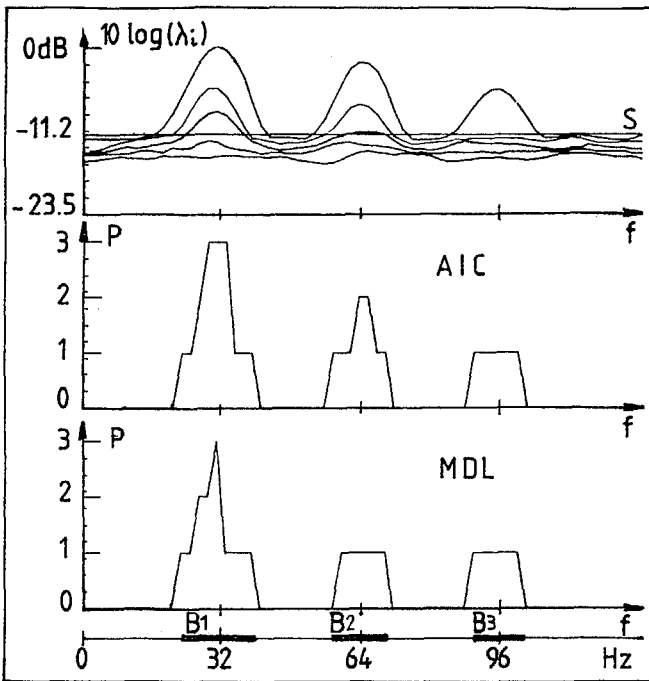


Figure 4 : Bruits isotropes et non corrélés (S/B faible) $\sigma_i = 45$ ($i \in [1,5]$), $M=6$

Un cas de bruits non corrélés et non isotropes est présenté figure 5. Le bruit de la voie 1 est de faible puissance, alors que celui de la voie 5 est de forte puissance. Néanmoins, les 3 critères utilisés semblent suffisamment robustes dans ce cas où on a fait 5 moyennes statistiques.

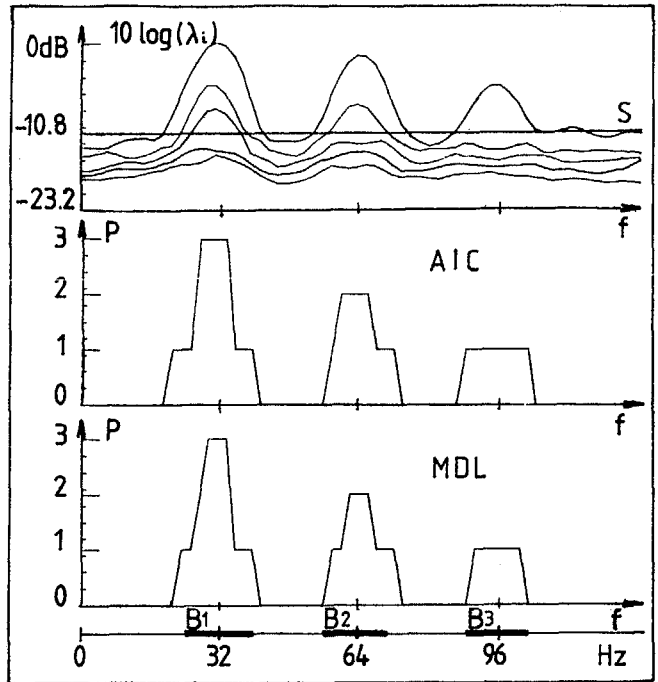


Figure 5 : Bruits non isotropes, non corrélés $\sigma_1 = 21$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 34$, $\sigma_5 = 45$; $M=5$

La figure 6 présente un cas de bruits isotropes mais où les bruits des voies 2 et 3 sont corrélés (coefficient de corrélation de 0.7). Après 5 moyennes statistiques, les 3 critères donnent encore des résultats satisfaisants.

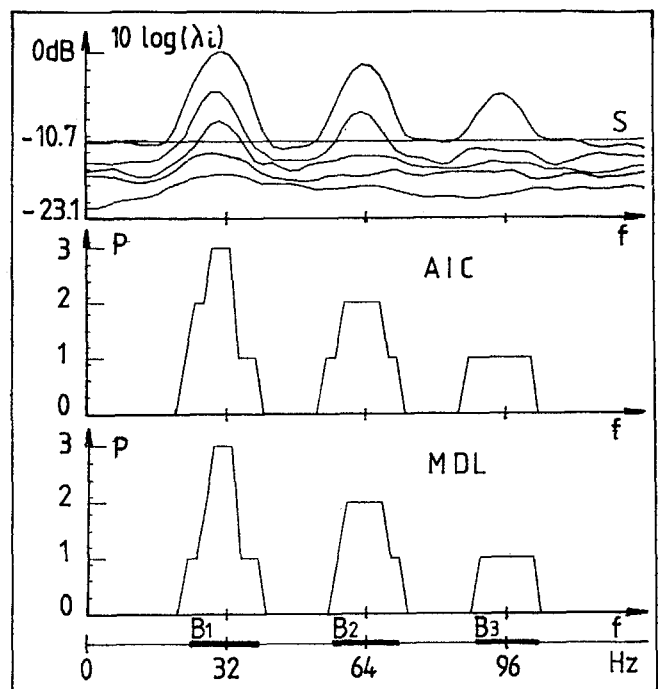


Figure 6 : Bruits isotropes et corrélés $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = 34$, $\sigma_3 = 24.28$, $M=5$
 $B_3(t) = \sigma_3 \cdot N_3(t) + c \cdot \sigma_2 \cdot N_2(t)$; $c = 0.7$

PERFORMANCE DE DIVERS ALGORITHMES POUR LA DETECTION,
DANS LES PROBLEMES D'IMAGERIE, DU NOMBRE D'EXCITATIONS
NON CORRELES

4-3-2 : 2ème Simulation

Les caractéristiques signal sont fixées comme suit:
 $A_1^1 = A_1^2 = 30$ et $A_2^1 = A_2^2 = 25$. Le bruit est isotrope
($a_1 = 20$) et les matrices spectrales sont estimées
avec un B_{eT} de 12.56.

Pour un retard correspondant à $\alpha = 1$ et pour
une réalisation, nous obtenons les résultats présentés
figure 7. Les résultats sont acceptables pour les
critères AIC et MDL, si ce n'est une source parasite
au voisinage de $f = 0$ et $f = f_c$. Le critère à seuil S
est également acceptable dans ce cas.

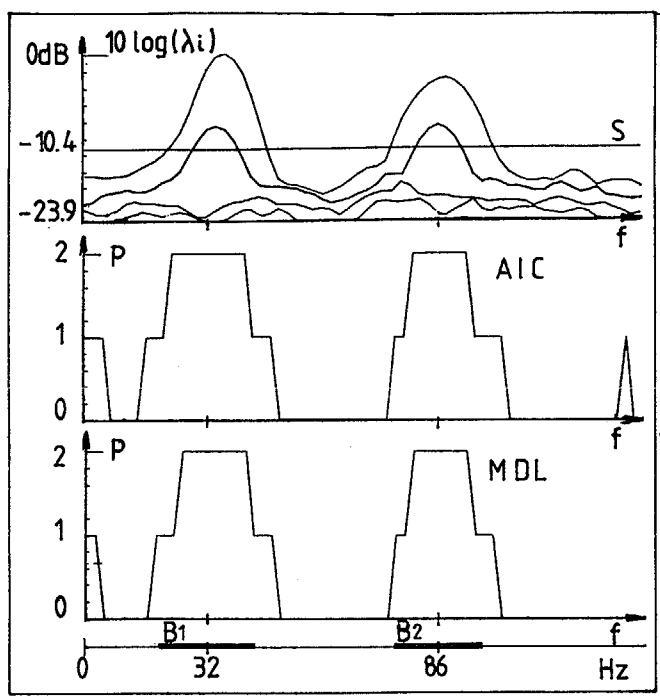


Figure 7 : Fronts d'ondes proches ($\alpha=1$)
Moyenne sur M=1 réalisations de bruit

Dans les mêmes conditions (fig. 8), mais pour des
fronts d'onde très proches ($\alpha = 0.6$), le critère
AIC a un comportement assez erratique, le critère MDL
donne de meilleurs résultats tandis que le critère à
seuil sous-estime le nombre de sources dans la bande
 B_1 . De plus, les critères AIC et MDL donnent les résultats
attendus après une moyenne statistique sur 5
réalisations, mais ce type de traitement ne peut être
alors appliqué à des signaux sismiques réels dont la
durée de stationnarité est trop brève.

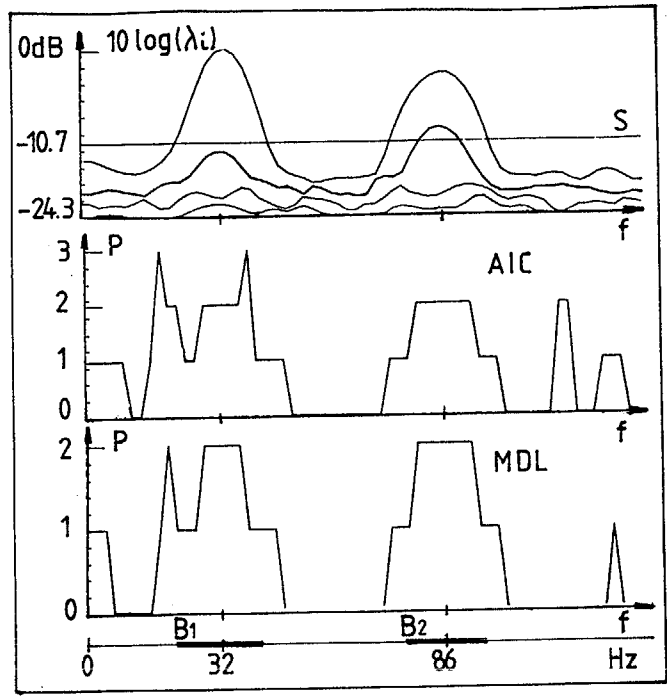


Figure 8 : Fronts d'ondes très proches ($\alpha=0.6$)
 $M=1$

5 - CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons présenté les critères
de détection de type AIC et MDL utilisés récemment par
WAX et KAILATH d'une part et NICOLAS et VEZZOSI
d'autre part. Nous avons signalé de légères diffé-
rences d'écriture possible dans l'expression de ces
critères. Alors que le critère MDL est connu pour être
consistant, nous montrons sur des simulations inspi-
rées de problèmes de traitement d'antennes et de sis-
mique, qu'il est également plus performant sur un
nombre faible de réalisations. Par nos simulations
nous montrons que ces critères restent suffisamment
robustes vis-à-vis de perturbations de la matrice de
bruits (bruits non isotropes ou corrélés), et ceci
même avec des B_{eT} faibles.



PERFORMANCE DE DIVERS ALGORITHMES POUR LA DETECTION,
DANS LES PROBLEMES D'IMAGERIE, DU NOMBRE D'EXCITATIONS
NON CORRELEES

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. AKAIKE "A new look at the statistical model identification" ; IEEE, trans. on Auto-Contr, vol AC-19, n°6, Déc. 1974.
- [2] G. BIENVENU and L. KOPP "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach" ; IEEE, trans on ASSP, PP 1235-1248, Oct. 1983.
- [3] H. CLERGEOT "Estimation du spectre d'un signal aléatoire gaussien par le critère du MV ou du maximum de probabilité a posteriori", Thèse PARIS-SUD (ORSAY), 1982.
- [4] C. LATOMBE "Détection et caractérisation de Signaux à plusieurs composantes à partir de la matrice interspectrale" ; thèse de l'INPG, Nov.82.
- [5] J. RISSANEN "A universal prior for integers and estimation by minimum description length" ; Ann. of Stat, Vol 11 n°2, PP 416-431, 1983.
- [6] J. RISSANEN "Modeling by shortest data description length" ; AUTOMATICA, Vol 14, PP 417-431, 1978.
- [7] I. TAS et C. LATOMBE "Detection d'un champ de sources, non corrélées, par les valeurs propres de la matrice spectrale des signaux reçus" ; Rapport CEPHAG, Janv. 1985.
- [8] H.L. VAN TREES "Detection, Estimation and Modulation Theory" ; Part I, New-York, WILEY, 1968.
- [9] G. VEZZOSI et P. NICOLAS "Séparation de fronts d'ondes corrélés" ; Colloque GRETSI, Nice du 16 au 20 Mai 1983.
- [10] M. WAX and T. KAILATH "Determining the number of Signals by information theoretic criteria" ; IEEE, ASSP, Workshop on spectral estimation II, Floride, Nov. 1983.