

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 20 au 24 MAI 1985

GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

R. BURVINGT

LABORATOIRE CENTRAL de TELECOMMUNICATIONS (L.C.T.) 18-20 rue Grange-Dame-Rose 78141 Vélizy-Villacoublay Cedex

RESUME

L'étude développée ici, concerne les sources acoustiques dont le rayonnement, dans les zones de champ intense, est assimilable à celui d'une source gaussienne. Une famille de telles sources est définie. Les effets non-linéaires, relatifs à ces sources peuvent être décrits par ceux d'une source gaussienne. On a donc étudié pour cette source, qu'on suppose monochromatique dans une première partie, une approximation de la solution non-linéaire quand la thermoviscosité est négligeable. Le champ est alors exprimé par plusieurs termes. Le premier, qui se rapproche d'une solution de FUBINI, tient compte sans approximation, d'une partie importante des effets non-linéaires. Les termes suivants qui interviennent comme termes correctifs, sont solutions d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéarisées. Un calcul précis, donnant lieu à des applications numériques, a été effectué pour les trois premiers harmoniques. Avec l'hypothèse d'une source "bichromatique", des résultats permettant d'évaluer l'émission paramétrique jusqu'au voisinage de l'onde de choc, ont été obtenus.

SUMMARY

This study deals with acoustic sources whose radiations in strong field areas are like those of a gaussian source. A family of such sources is defined. Non linear effects relative to these sources can be described by those caused by a gaussian source. An approximate solution in the non-thermoviscous case is studied for a monochromatic source. The field is expressed by several terms. The first term accounts for most of the non-linear effects without any approximation and is of the FUBINI type. The following terms which appear to be corrective terms are solutions of linearized first order partial differential equations. An accurate derivation which leads to numerical applications is done for the first three harmonics. Some results are obtained from a bichromatic source and allow to estimate the parametric emission up to the shock wave front.



GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

I - INTRODUCTION

L'étude développée dans le présent article, traite du rayonnement non-linéaire d'une source plane, à symétrie de révolution autour d'un axe acoustique. Le fluide est supposé homogène et non thermovisqueux.

Le but visé est de trouver des solutions approchées pour le champ acoustique, quand la répartition d'amplitude sur la source est, soit une gaussienne, soit une répartition dont la forme est proche de celle d'un crêneau. On montre que les effets non-linéaires, relatifs à ces deux répartitions, peuvent être approximativement identiques. Le cas gaussien paraissant le plus simple mathématiquement, c'est celui qui a été retenu pour appréhender les effets non-linéaires. On considère que la source est "monochromatique", et ensuite, "bichromatique", et que le faisceau d'ondes est assez directif.

La description du champ est envisagée dans une zone qui s'étend de la source aux endroits où l'on situe l'onde de choc, dans le demi-espace fluide. Une méthode de résolution qui s'apparente à une méthode de perturbation est développée. Elle est basée essentiellement sur une décomposition de la solution en une somme de termes, dont la détermination met en jeu des coordonnées curvilignes particulières. Cette méthode permet de calculer, pour une source monochromatique, les premiers harmoniques à partir de quelques premiers termes seulement. Une étude précise des trois premiers harmoniques est développée ici.

Pour une source "bichromatique", une approximation relative à l'émission paramétrique est formulée.

Il apparaît donc, dans cette étude, que l'on peut faire intervenir une méthode simple d'approche des effets non-linéaires lorsque le rayonnement se développe suivant deux dimensions spatiales.

II - EQUATIONS DE BASE

Dans le cas non thermovisqueux et irrotationnel, on peut retenir pour le potentiel des vitesses, l'équation formulée par RUZNETSOV [1] qui s'écrit :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c_0^2} \frac{\beta}{2A} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right)$$

En faisant l'hypothèse, que localement les ondes sont approximativement progressives et planes [2], on peut déduire de (1), l'équation :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = \beta \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \quad \left(\text{où } \beta = 1 + \frac{\beta}{2A} \right)$$

qui est l'équation de base de cette étude.

III - EXPRESSIONS DE CONDITIONS SUR LA SOURCE ET ETUDE DU CAS LINEAIRES

Dans le cas monochromatique, on retient sur la source la condition :

$$(3) \quad \frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} = u_m(y) \sin \omega t$$

(x est l'abscisse sur l'axe acoustique (Ox) et l'ordonnée y est la variable transversale).

La fonction $u_m(y)$ qui rend compte de la répartition du champ de vitesse de la source est exprimée dans cette étude comme :

$$(4) \quad u_m(y) = v_m \left(1 - (1 - e^{-\alpha_m y^2})^m \right)$$

ou ; $u_m(y) = v_m \sum_{q=1}^m C_m^q (-1)^{q-1} e^{-q \alpha_m y^2}$ où : $C_m^q = \frac{m!}{q!(m-q)!}$

On définit donc par (4) ou (5) une famille de répartitions particulière. D'après [3] une solution linéaire approchée valable pour les longueurs d'onde faibles devant la largeur de la source s'écrit :

$$(6) \quad \varphi_m = -\frac{v_m}{k} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{e^{i\epsilon(\omega t - kx)}}{2} \sum_{q=1}^m C_m^q (-1)^{q-1} \frac{e^{-\frac{q \alpha_m y^2}{1 - i\epsilon x/d_{mq}}}}{1 - i\epsilon x/d_{mq}}$$

où :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \quad \text{et} \quad d_{mq} = \frac{k}{2q \alpha_m}$$

Les paramètres v_m et α_m peuvent être choisis de façon que les φ_m coïncident en champ lointain et au voisinage de l'axe avec la solution linéaire φ_c donnée par une "répartition source", en forme de crêneau. C'est-à-dire que les φ_m décrivent approximativement le lobe principal relatif à φ_c . Pour ceci, on doit poser :

$$(7) \quad \frac{v_m}{\alpha_m} \sum_{q=1}^m \frac{C_m^q (-1)^{q+1}}{q} = v_c l_c^2 ; \quad \frac{v_m}{\alpha_m} \sum_{q=1}^m \frac{C_m^q (-1)^{q+1}}{q^2} = v_c l_c^4$$

où v_c et l_c sont l'amplitude et la demi-largeur du crêneau.

La figure n°1 montre les courbes $u_m(y)/v_c$ en fonction de y/l_c pour $m=1, 2, 7$

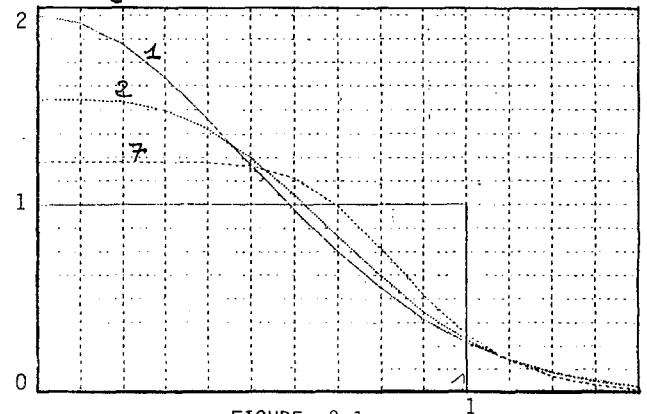


FIGURE n° 1

On peut étudier les solutions φ_m lorsque l'on s'éloigne de la source. La figure n°2 montre les variations de l'amplitude de $\frac{\varphi_m l_c}{v_c \sqrt{1+x^2/d_{mq}^2}}$ à $x=d_{q1} = d_c$ en fonction de $y/(l_c \sqrt{1+x^2/d_{q1}^2})$ pour $m=1, 2, 7$ (ici, $d_c = k l_c^2 / \epsilon$ est distance de RAYLEIGH associée au crêneau).

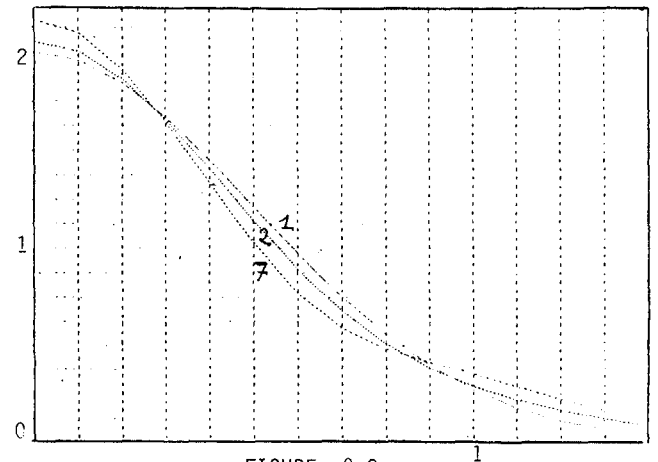


FIGURE n° 2

On peut constater sur cette dernière figure, que les amplitudes des différentes solutions φ_m deviennent rapidement proches les unes des autres, au voisinage de l'axe, pour des valeurs de x croissantes. On pourrait voir qu'il en est de même pour les phases.

On pourrait remarquer que les écarts entre les φ_m diminuent de plus en plus, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source au-delà de $x=d_{q1}$.



GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

IV - METHODE D'APPROCHE DES EFFETS NON-LINEAIRES

D'après les résultats du paragraphe précédent, on peut constater que le champ relatif à une source gaussienne peut rendre compte, à partir d'une distance relativement modérée, du champ relatif à certaines autres sources, et ceci, surtout dans les zones de champ intense. Comme la génération des effets non-linéaires s'opère dans ces zones de champ, et qu'ils sont cumulatifs (ce qui implique que le rayonnement, dans la zone très proche de la source, ne doit pas avoir grande influence sur ces effets, la cumulation ayant un résultat faible), le cas gaussien doit être approximativement équivalent à d'autres cas de répartition du point de vue des non-linéarités. On s'attachera donc à étudier la solution non-linéaire relative à la source gaussienne.

La méthode d'approche de cette étude a déjà été décrite dans [2] et [4]. On se limitera ici, à exposer ses aspects généraux et certaines améliorations apportées récemment. La technique de calcul est basée sur une décomposition de la solution φ sous la forme :

$$(8) \quad \varphi = \psi_1 + \eta$$

où la fonction ψ_1 peut être définie comme un terme dominant dépendant de coordonnées curvilignes approximativement orthogonales x_1 et y_1 . Ces coordonnées sont un cas particulier des coordonnées curvilignes suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} x_p = x \left(1 + \frac{y_p^2}{d^2} \right) - \frac{1}{pk} \operatorname{arctg} \frac{x}{d} \\ y_p = y_1 = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2/d^2}} \end{cases}$$

où $d = d_{1,1} = \frac{k}{2\alpha_1}$ (cf. (6))

Leur intérêt apparaîtra ultérieurement. On écrit :

$$(10) \quad \psi_1 = \psi_1 \left(\tau_1 = t - \frac{x_1}{c_0}, x'_1 = x_1, y_1 \right)$$

et : $\eta = \eta(t, x, y)$

On peut obtenir, à partir de l'équation (2), compte tenu de (8) et (10) et, après avoir effectué une approximation parabolique sur ψ_1 (cf. [5]), la nouvelle équation :

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta = c_0^2 L_1 \psi_1 + \frac{2\beta_2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\beta_2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2c_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\Gamma_1}{2} \psi_1 - \frac{\beta_1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

où L_1 est le cas particulier de l'opérateur L_P qu'on écrit :

$$(12) \quad L_P = \left(\frac{1}{e_{p3}^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_p^2} + \frac{1}{e_{p1}^2} \frac{\partial}{\partial y_p^2} + \frac{1}{e_{p1} e_{p2} e_{p3}} \frac{\partial \left(\frac{e_{p2} e_{p3}}{e_{p1}} \right)}{\partial y_p} \frac{\partial}{\partial y_p}$$

où

$$(13) \quad \Gamma_P = \frac{1}{e_{p1} e_{p2} e_{p3}} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{e_{p2} e_{p1}}{e_{p3}} \right)$$

et où e_{p1} , e_{p2} et e_{p3} sont les unités de longueurs locales, relatives au passage de (x, y) à (x_p, y_p) quand les coordonnées x_p et y_p sont supposées strictement orthogonales.

L'opérateur L_P se déduit de l'opérateur Δ . On peut justifier le choix de l'expression (12) de L_P par un calcul montrant que les termes non diagonaux de $\Delta \varphi$ sont négligeables, compte tenu de la condition $k d \gg 1$ qui est retenue dans les hypothèses. L'expression de $\Delta \varphi$, donnée en supposant que les coordonnées x_p et y_p sont strictement orthogonales, est donc une bonne approximation. Il s'ensuit que l'expression (12) de L_P est justifiée dans le cas présent.

La voie choisie dans cette étude, est de définir ψ_1 en annulant le dernier terme de (11). Ceci implique que ψ_1 satisfait à l'équation non-linéaire spatialement unidimensionnelle :

$$(14) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\Gamma_1}{2} \psi_1 - \frac{\beta_1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right)^2 = S_1(x'_1, y_1)$$

où $S_1(x'_1, y_1)$ est une fonction qui se détermine en imposant que ψ_1 ne comporte que des termes dépendant du temps (condition pour que le cas décrit soit physique).

Etant donnée l'équation (14), le terme η satisfait à :

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta = c_0^2 L_1 \psi_1 + \frac{2\beta_2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\beta_2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

L'utilisation des équations (14) et (15), pour la détermination de φ impose plusieurs étapes de calculs. La première est la détermination de ψ_1 . Le terme η est déterminé ensuite après plusieurs décompositions.

V - SOURCE MONOCHROMATIQUE

V-1 Première étape du calcul

Dans un premier temps, on va calculer ψ_1 . On peut lui imposer de satisfaire à la condition à la limite sur la source, à savoir :

$$(16) \quad \frac{1}{c_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} = v_2 e^{-\alpha_1 y_1^2} \sin \omega t$$

Cette relation implique que η est nul en $x=0$. Compte tenu de (14), (16) et de la condition suivante :

$$(17) \quad \Gamma_1 \approx \frac{2}{d} \frac{x_1/d}{1 + x_1^2/d^2} \approx \Gamma_P$$

ψ_1 se calcule de la même manière que la solution de FUBINI. On obtient :

$$(18) \quad \psi_1 = -\frac{v_2}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2/d^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_1 y_1^2}}{m^2 \sigma'} J_m(m \xi \sigma') \cos m \omega \tau_1$$

où : $(19) \quad \sigma' = \frac{d}{\beta} \log \left(\frac{x_1}{d} + \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{d^2}} \right), \xi = e^{-\alpha_1 y_1^2}, \beta = \frac{c_0}{\beta k v_2}$
 ψ_1 décrit la formation d'une onde de choc pour $\xi \sigma' \leq 1$.

V-2 Deuxième étape de calcul

Dans [2] on a indiqué que le terme η est simplement correctif, si le rapport d/β' (d = distance de RAYLEIGH (9), β' = distance de formation de l'onde de choc du cas unidimensionnel (19)) est petit. On a, dans [2], montré qu'on peut écrire alors :

$$(20) \quad \eta = O\left(\frac{d}{\beta'}, \psi_1\right)$$

Pour obtenir ce résultat (20), une méthode simple d'approximations successives a été utilisée. On va exposer maintenant une autre méthode plus précise, où le paramètre d/β' n'est plus supposé petit.



GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

On se limite ici, à l'étude de η à partir de l'équation (15), dans laquelle le dernier terme du second membre est négligé.

L'équation (15) est alors linéarisée par rapport à η . On peut voir que le terme négligé ne joue un rôle qu'à partir du quatrième harmonique, et on sait, d'après [2] que sa contribution est faible. L'équation (15) devient donc :

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta = c_0^2 \Gamma_1 \Psi_1 + \frac{\epsilon \beta}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

Un calcul montre, qu'avec une bonne approximation, le p ème harmonique de $\Gamma_1 \Psi_1$ s'écrit :

$$(22) \quad \Gamma_1 \Psi_1^{(p)} = -\frac{v_1 \epsilon \beta}{R (1+x_1^2/d^2)^2} \left[(1-\frac{1}{p}) J_p(p \xi \sigma'_1) + (1+\frac{1}{p}) J_{p+1}(p \xi \sigma'_1) \right] \cos p \omega t$$

L'examen de l'expression (22) montre qu'elle correspond à une contribution au premier harmonique négligeable devant celle de Ψ_1 (soit $\Psi_1^{(1)}$). Ceci est essentiellement dû au choix particulier des coordonnées curvilignes (9). η ne joue donc un rôle qu'à partir du second harmonique.

On peut effectuer une décomposition du terme η sous la forme suivante :

$$(23) \quad \eta = \sum_{p=2}^{\infty} (\eta_p + \eta'_p)$$

où η_p s'introduit comme fonction des coordonnées curvilignes x_p et y_p (9), soit :

$$(24) \quad \eta_p = \eta_p(\tau_p = t - \frac{x_p}{c_0}, x_p = x_p, y_p)$$

et :

$$(25) \quad \eta'_p = \eta'_p(t, x, y)$$

On porte (23) dans l'équation (21) et on considère que $\eta_p + \eta'_p$ est une solution particulière, relative au terme $\Gamma_1 \Psi_1^{(p)}$ (22). Une approximation parabolique sur η_p , analogue à celle effectuée sur Ψ_1 conduit alors à la suite d'équations :

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \eta'_p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta'_p = c_0^2 \Gamma_p \eta_p + \frac{\epsilon \beta}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \eta'_p}{\partial t} \right) - 2c_0 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial \eta_p}{\partial x_p} + \frac{\Gamma_p}{2} \eta_p - \frac{\beta}{c_0^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_p} \frac{\partial \eta_p}{\partial x_p} - \frac{c_0}{2} \frac{d \Gamma_p^{(p)}}{d x_p} \right]$$

Le terme η_p peut être déterminé de manière semblable à Ψ_1 en annulant le dernier terme de (26). η_p satisfait alors à l'équation :

$$(27) \quad \frac{\partial \eta_p}{\partial x_p^2} + \frac{\Gamma_p}{2} \eta_p - \frac{\beta}{c_0^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_p} \frac{\partial \eta_p}{\partial x_p} = \frac{c_0}{2} \left(d \Gamma_p \Gamma_1 \Psi_1^{(p)} + \frac{d \Gamma_p^{(p)}}{d x_p} \right)$$

Γ_p est donné par (13) et (17) et la fonction δ_p se détermine en imposant que η_p ne comporte que des termes dépendant du temps.

Il s'ensuit que η'_p satisfait à l'équation :

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \eta'_p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta'_p = \Gamma_p \eta_p + \frac{\epsilon \beta}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \frac{\partial \eta'_p}{\partial t} \right)$$

qui est à rapprocher de (21). L'opérateur Γ_p est donné par (12).

L'équation (27) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui s'intègre par la méthode des caractéristiques. Sa résolution conduit à :

$$(29) \quad \eta_p = -\frac{v_1 \epsilon \beta}{R \sqrt{1+x_1^2/d^2}} \frac{1}{p} \int_0^{x_1} \frac{1}{1+x_1^2/d^2} \left[(1-\frac{1}{p}) J_p(p \xi \sigma'_1) + (1+\frac{1}{p}) J_{p+1}(p \xi \sigma'_1) \right] \sin(p \omega \tau'_p + (p-1) \arctan \frac{x_1}{d}) \frac{d x_1}{d} + \delta'_p$$

où $\sigma'_1 = (d/\beta') \log(x_1/d + \sqrt{1+x_1^2/d^2})$ et où δ'_p a été introduite dans la relation (29) de façon à ce que tous les termes soient dépendants du temps.

La fonction τ'_p est une caractéristique qui satisfait à l'équation :

$$(30) \quad \omega \tau'_p = \omega \tau_p + \frac{d}{\beta'} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{m} \int_{x'_1}^{x_1} \frac{J_m(m \xi \sigma'_1) \sin(m \omega \tau'_p + m(1-\frac{1}{p}) \arctan \frac{x_1}{d})}{\sqrt{1+x_1^2/d^2}} \frac{d x_1}{d}$$

Il apparaît à ce niveau des développements que l'expression :

$$(31) \quad \varphi = \Psi_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \eta_p$$

où Ψ_1 est donné par (18) et η_p par (29) est une bonne approximation de la solution relative à la source monochromatique.

En effet, η'_p se relie à η_p comme η se relie à Ψ_1 . Le choix des coordonnées curvilignes (9) implique que les premiers harmoniques de η'_p ($p, p+1, p+2, \dots$) sont négligeables par rapport à ceux de η_p et les harmoniques élevés restent relativement petits et ceci d'autant plus que p est grand.

Ce résultat (31) est analytique et il peut conduire rapidement à des résultats numériques.

V-3 Etude des trois premiers harmoniques

L'étude de la relation (31) peut montrer qu'il faut tenir compte de trois termes si l'on veut rassembler toutes les contributions notables pour les trois premiers harmoniques. Ainsi, pour cette partie de l'étude, jusqu'au troisième harmonique, on écrit :

$$(32) \quad \varphi = \Psi_1 + \eta_2 + \eta_3$$

Après quelques développements, les résultats de l'étude précédente permettent d'écrire :

$$(33) \quad \eta_2 = -\frac{v_1 \epsilon \beta}{R \sqrt{1+x_1^2/d^2}} \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int_0^{t+\epsilon \omega \tau'_2} \frac{e^{-\epsilon t}}{2} \frac{e^{-\epsilon t'}}{(1+i \epsilon \theta^{-t'})^2} dt'$$

$$(34) \quad \eta_3 = \frac{v_1 \epsilon \beta^2}{R \sqrt{1+x_1^2/d^2}} \frac{1}{6} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int_0^{t+\epsilon \omega \tau'_3} \frac{\epsilon e^{-\epsilon t}}{2i} \frac{e^{-\epsilon t'} (1+\epsilon^{-t'}) (t'_2 - \frac{3t'_2}{8})}{(1+i \epsilon \theta^{-t'})^4} dt'$$

où :

$$\theta = \frac{\epsilon d}{\beta'}, \quad \xi = e^{-\alpha y_1^2}, \quad t = \log \left(\frac{x_1}{d} + \sqrt{1+x_1^2/d^2} \right)$$

et où après certaines approximations faites dans (30), on écrit :

$$(35) \quad \omega \tau'_m \approx \omega \tau_m + a(t-t') + (A+C)(t-t')^2 + (B + \frac{A \epsilon \beta}{3} \cos v + D)(t-t')^3 + \epsilon \sum_{\epsilon=\pm 1} e^{\epsilon v} \Gamma(\theta^{-t} - e^{-t+i \omega \epsilon(t-t')})$$

avec :

$$m = 2, 3 ; \quad \Gamma = 1 - \frac{1}{m} ; \quad v = \omega(\tau_m + \Gamma \frac{d}{\beta'})$$

$$a = \frac{\epsilon \beta}{2} \left[(1 - \frac{\epsilon^2 t^2}{8}) \sin v + \frac{\epsilon t}{2} (1 - \frac{\epsilon^2 t^2}{2}) \sin 2v \right]$$

$$A = \frac{\alpha \epsilon}{2} \left[(1 - \frac{\epsilon^2 t^2}{8}) \cos v + \frac{\epsilon t}{3} (1 - \frac{\epsilon^2 t^2}{3}) \cos 2v \right]$$

GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

$$B = \frac{1}{2} \varphi \left[\frac{\varphi^2 t}{6} \cos v - \frac{\alpha}{3} \sin v - \frac{2}{3} \varphi (1 - \varphi^2 t^2) \cos 2v \right]$$

$$C = \frac{\varphi^2}{4} \left[\frac{\varphi t}{2} \sin v - (1 - \varphi^2 t^2) \sin 2v \right]$$

$$D = -\frac{\varphi^3}{6} \left[\frac{1}{4} \sin v + \varphi t \sin 2v \right]$$

Ces expressions (33), (34) et (35), et l'expression simple de ψ_1 (18), permettent de décrire les trois premiers harmoniques jusqu'à l'endroit où l'on situe l'onde de choc, c'est-à-dire pour :

$$\varphi t = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{d} = \text{sh} \left(\frac{1}{\varphi} \right)$$

Sur l'axe acoustique, l'onde de choc se produit donc à la distance b_c telle que : $b_c = d \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{\varphi} \right)$

On a étudié ici, les variations de la grandeur réduite

$$\phi^{(p)} = \varphi^{(p)} \frac{\sqrt{1+x_1^2/d^2}}{v_1/k} \quad \text{pour } p=1,2,3$$

Pour une application numérique, on peut choisir, à titre d'exemple, la valeur 0.5 pour le paramètre d/ℓ ce qui correspond à un niveau sonore de 125 dB pour une fréquence fondamentale de 100 kHz et une demi-largeur de source de $\ell = 1/\sqrt{\alpha_1} = 15$ cm.

L'onde de choc se forme sur l'axe à la distance $b_c = 3,63 \cdot d = 17,46$ mètres.

Dans la figure n°3, la courbe en trait plein représente l'amplitude de $\phi^{(2)}$, le second harmonique sur l'axe, en fonction de x_1/d . Sur cette même figure, la courbe en pointillés représente les résultats de la solution, obtenue par une méthode d'approximations successives simple, c'est-à-dire au deuxième ordre en $\sqrt{v_1}$. Les écarts entre les deux solutions augmentent quand on se rapproche de l'onde de choc.

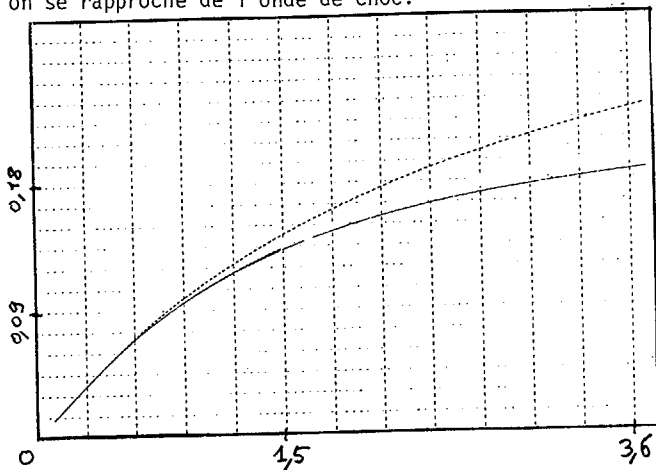


Figure n° 3

La figure n° 4 illustre ces mêmes variations pour l'harmonique trois (la courbe en pointillés est relative au troisième ordre en $\sqrt{v_1}$).

La figure n°5 illustre les variations transversales de l'amplitude de $\phi^{(2)}$ en fonction de $y/\ell = \sqrt{\alpha_1} y$ au quatre distances $x_1 = b_c/4, x_2 = b_c/2, x_3 = 3b_c/4$, et $x_4 = b_c$. On pourrait tracer de la même façon les variations de phase.

VI - EMISSION PARAMETRIQUE

Dans le cas de la source "bichromatique", l'émission paramétrique correspond au premier harmonique

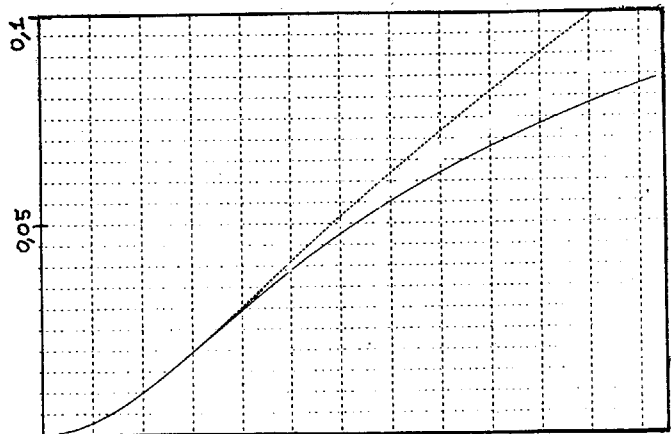


Figure n° 4

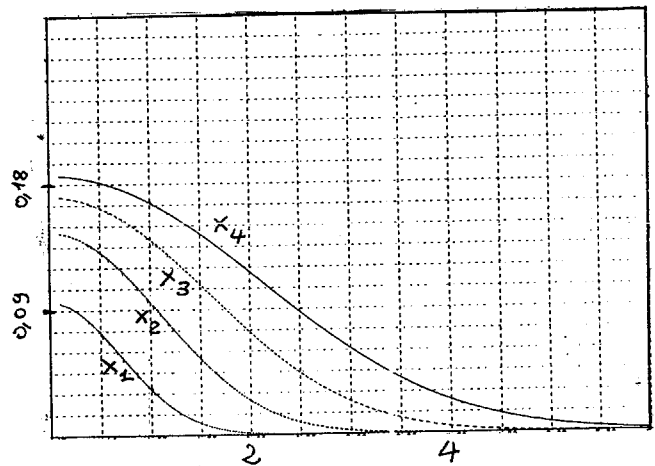


Figure n° 5

du rayonnement de basse fréquence. Si N_1 et N_2 sont les deux fréquences fondamentales, la fréquence paramétrique est alors :

$$N_- = N_2 - N_1 \quad (N_2 > N_1)$$

Pour l'étude de l'émission paramétrique, la méthode de résolution approchée précédente peut être utilisée. Les décompositions de la solution déjà évoquée peuvent s'appliquer, moyennant certaines approximations.

On se limitera ici, à affirmer que la prise en considération d'harmoniques élevés introduit des termes de faible importance en ce qui concerne l'émission paramétrique.

En effet, quand la fréquence N_- est petite, on peut admettre que les termes paramétriques n'interviennent pas dans les non-linéarités. Ils ont pour origine le couplage de termes dont les fréquences sont très voisines (ces fréquences sont telles que leur différence est égale à N_- qui est petite). Ces termes, jouant dans les couplages, qu'on peut appeler termes de fréquence somme, semblent, si $N_-/N_2 \ll 1$, voisins des termes relatifs à la source monochromatique. L'ordre de grandeur de ces termes conduit au résultat suivant : la seule interaction des deux termes fondamentaux linéarisés est prépondérante, et cette propriété se conserve jusqu'à l'onde de choc.

Il s'ensuit que, retenant toujours une condition gaussienne sur la source, on peut admettre dans un large domaine d'espace, la solution au second ordre, formulée par exemple dans [3].



GENERATION NON - LINEAIRE D'HARMONIQUES
DANS LE CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE

Ainsi, pour la condition suivante sur la source :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=0} = e^{-\alpha y^2} (v_{01} \sin \omega_1 t + v_{02} \sin \omega_2 t)$$

on peut retenir le terme paramétrique :

$$\varphi_- = -\beta \frac{v_{01} v_{02}}{c_0} \Big|_{d_1} \sum_{\omega' = \pm \omega_-} e^{i(\omega' t - k' x)} \frac{(-\alpha y^2)}{1 + \varepsilon^2} \frac{e^{-\alpha y^2}}{z} \int_0^x \frac{i dx'}{d_1} \frac{e^{-\alpha x y^2}}{z'}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_- = \frac{k' + k}{k' - k} \quad k' = \frac{\pm \omega_2}{c_0} \quad k = -\left(\frac{\pm \omega_1}{c_0}\right) \\ d_1 = \frac{k' - k}{4\alpha_1} \quad z = 1 - \frac{i x}{d_1} \frac{\varepsilon_-}{1 + \varepsilon_-^2} \\ k = \frac{1}{1 + \varepsilon_-^2} \quad z' = 1 + \frac{i x}{d_1} \frac{\varepsilon_-}{1 - \varepsilon_-^2} - \frac{k}{z} \end{array} \right.$$

IX - CONCLUSION

La méthode de résolution présentée ici, conduit à des solutions analytiques relativement simples.

Pour une source monochromatique, on a montré au préalable qu'une répartition d'amplitude gaussienne peut être équivalente au point de vue des non-linéarités à d'autres répartitions. Une solution non-linéaire approchée, relative au cas gaussien, a été développée pour cette source monochromatique. Des résultats précis donnant lieu à une étude numérique, ont été obtenus pour les trois premiers harmoniques. Une première approche du cas "bichromatique" a été faite. Il en découle que la première approximation de la solution pour l'émission paramétrique, est une approximation valable jusqu'à l'onde de choc.

Il ressort de cette étude, que la diffraction et les effets non-linéaires peuvent être appréhendés simultanément en l'absence de dissipation avec des techniques mathématiques relativement simples, permettant des calculs numériques rapides.

REMERCIEMENTS

La présente étude a été réalisée sous contrat de la Direction des Recherches, Etudes et Techniques (Délégation Générale pour l'Armement) que l'auteur remercie pour son autorisation de publier.

:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.P. KUZNETSOV, S.P.A., Vol. 16, n°4, 1971
- [2] R. BURVINGT, Revue du CETHEDEC, n° 79, 1984
- [3] R. BURVINGT, Thèse de 3^{ème}. cycle, Univ. PARIS VII, mars 1977
- [4] R. BURVINGT, 11^{ème}. I.C.A., PARIS, juillet 1983
- [5] E.H. ZABOLOTSKAYA et R.V. KHOKHLOV, S.P.A., Vol. 15, n°1, 1969