

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

PERFORMANCES ET ROBUSTESSE D'UN RECEPTEUR DE RAYLEIGH EN PRESENCE DE MILIEU DISPERSIF

Hocine CHERIFI - Geneviève JOURDAIN

CEPHAG-ENSIEG (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques) - Laboratoire associé au CNRS
Domaine Universitaire bp 46 - 38402 St-Martin-d'Hères (FRANCE)

RESUME

On s'intéresse dans ce papier à l'étude des performances du récepteur classique : filtre adapté suivi de élévation au carré, dans le cas de transmission dispersive. Ce récepteur est optimal au sens bayésien lorsque le signal à détecter provient d'un milieu caractérisé par un "fading de Rayleigh". Ce récepteur sera appelé "récepteur de Rayleigh". En fait le modèle de transmission est souvent plus complexe que ce que traduit le fading de Rayleigh. On étudie alors la robustesse du récepteur de Rayleigh face à différents types de dispersions. On étudie particulièrement 3 cas pratiques :

a) le milieu fait subir au signal un élargissement fréquentiel moyen k Hz i.e (le signal est modulé en amplitude pendant la durée T de la transmission),

b) le milieu fait apparaître un phénomène de trajet "secondaire" dont le récepteur ne tient pas compte.

On étudie les performances du récepteur en supposant de toute façon le signal aléatoire à l'arrivée gaussien. La perte de performance, due à la dispersion créée par le milieu, est chiffrée en particulier à l'aide d'une quantité V , fonction du signal émis $f(t)$ et des paramètres statistiques du milieu, et qui caractérise la robustesse du récepteur.

c) Un 3ème cas étudié, un peu différent, est celui où on suppose ne pas connaître très bien l'instant d'arrivée du signal, ce qui correspond encore à une "mauvaise" estimation du modèle de transmission. Le problème est plus complexe car le signal reçu, affecté de retard aléatoire, n'est plus gaussien. Sous certaines hypothèses (forme particulière de signal), on arrive encore à étudier et chiffrer les performances du récepteur de Rayleigh qui ne tient pas compte de ce retard aléatoire.

SUMMARY

We are interested in the performance of the well-known receiver : matched filter-envelope detector, after a dispersive channel. This receiver is optimal in the bayesian sense when the signal to be detected comes from a Rayleigh channel. It will be called Rayleigh receiver. In fact, models of dispersive channel are often more complex. So we study the robustness of Rayleigh receiver when used after different dispersive channels. Three particularly interesting cases are studied :

a) the channel is frequency-dispersive with a mean frequency dispersion k Hz (it is also called fast-fading channel),

b) the channel exhibits a secondary path the receiver does not take into account.

The receiver performances are studied by assuming the received signal gaussian. The loss of performance due to channel dispersion is evaluated by means of a quantity V which is related to emitted signal and channel statistical characterisation.

c) The 3rd case is slightly different : the arrival time of signal to be detected is assumed to be not exactly known. This corresponds to a bad estimation of channel. The problem becomes more complex because received signal is no longer gaussian. By choosing a particular form of emitted signal, it has been possible to succeed to evaluate yet performance of Rayleigh receiver.



INTRODUCTION

Lorsqu'on transmet des signaux dans des milieux de propagation fluctuants comme en transmission ionosphérique, ou en acoustique sous-marine, outre le bruit additif, le signal est distordu à l'arrivée de façon aléatoire. Le récepteur optimal (r.o.) pour détecter ce signal dans le bruit (détection simple), ou pour choisir au mieux entre 2 signaux (communication binaire) doit tenir compte de la connaissance-statistique qu'on peut avoir sur cette distorsion [1]. Celle-ci n'est pas toujours facile à estimer, elle peut fluctuer de façon plus ou moins rapide et le r.o. n'est pas toujours de mise en oeuvre simple. Ainsi à l'heure actuelle, le seul schéma de réception utilisé quasiment dans tous les cas est un récepteur sous-optimal, celui dit "de Rayleigh" qui ne prend en compte qu'un déphasage global et un affaiblissement global sur la durée T du signal transmis. Ce récepteur est le classique filtre adapté + détection d'enveloppe, et serait effectivement optimal si le milieu était bien représenté par un modèle de Rayleigh.

Nous étudions ici les performances de ce récepteur lorsque justement le milieu n'est pas de Rayleigh i.e. nous étudions la robustesse de ce récepteur face à une transmission dispersive ou fluctuante.

Dans la première partie on rappelle le modèle du canal de Rayleigh, on donne le récepteur optimal ainsi que les performances pour la détection binaire simple.

La seconde partie décrit la modélisation du milieu dispersif en fréquence. On présente alors brièvement le récepteur optimal dans cette situation et on donne ses performances.

Dans la troisième partie on étudie les performances du récepteur de Rayleigh lorsque le milieu est dispersif en fréquence. En considérant un exemple particulier on donne des résultats précis qui permettent de déterminer à partir de quel moment un milieu est dispersif en fréquence.

Dans la quatrième partie on compare les performances du récepteur de Rayleigh à celles du récepteur optimal pour un signal issu d'un canal à deux trajets.

En tout dernier lieu on considère le problème de la détection d'un signal dont la date d'arrivée est inconnue. Là encore on chiffre la perte de performance due à cette nouvelle perturbation des hypothèses.

I - RECEPTION OPTIMALE DANS UN MILIEU DE RAYLEIGH

I-1 Modèle du milieu et position du problème

Le signal transmis est supposé à bande étroite autour de la fréquence porteuse f_0 et de durée T.

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{2E_t} e^{2i\pi f_0 t} \{ f(t) \} \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

où $f(t)$ est l'enveloppe complexe du signal déterministe normée en énergie et E_t est l'énergie transmise

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T |f(t)|^2 dt = 1 \quad (2)$$

Dans le milieu de transmission dit "de Rayleigh" le signal subit un affaiblissement et un déphasage aléatoire. Le milieu est à fluctuation lente de sorte que l'on peut considérer que, pendant la durée T de la transmission, l'amplitude reste constante. L'enveloppe complexe du signal à la sortie du canal est :

$$s(t) = \sqrt{E_t} a f(t) \quad T_1 < t < T_1 + T \quad (3)$$

où a est une variable aléatoire (v.a) complexe gaussienne centrée dont le module suit une loi de Rayleigh et la phase est équipartie. Le milieu est alors entièrement décrit statistiquement par le terme d'atténuation moyenne q :

$$q = E \{ |a|^2 \} = \frac{E_r}{E_t}; \quad E_r = E \left\{ \int_{T_1}^{T_1+T} |s(t)|^2 dt \right\}; \quad (4)$$

E_r est l'énergie moyenne à la sortie du canal.

Pour ne pas alourdir l'exposé nous envisageons seulement ici le cas de la "détection simple". (Voir [4] pour l'extension au cas de la communication binaire symétrique).

Soit $r(t)$ le signal observé sur l'intervalle de temps fixé $[T_1, T_1+T]$ sur lequel on attend le signal. Nous pouvons nous trouver en présence de l'une ou l'autre des situations suivantes :

$$\begin{aligned} H_1: r(t) &= s(t) + n(t) \\ H_0: r(t) &= n(t) \end{aligned} \quad t \in [T_1, T_1+T] \quad (5)$$

$n(t)$ représente l'enveloppe complexe d'un bruit additif qui vient se superposer à la dégradation inhérente au milieu. Ce bruit est supposé blanc gaussien complexe, centré, indépendant du signal, de densité spectrale N_0 . Nous écrivons sa covariance complexe [2]:

$$\begin{aligned} E \{ n(t)n(u) \} &= 0 \\ E \{ n(t)n^*(u) \} &= N_0 \delta(t-u) \end{aligned} \quad \forall t, u \quad (6)$$

I-2 Récepteur optimal et performances

Le récepteur optimal (r.o.) au sens bayésien minimise le risque moyen du problème (5). On sait que le récepteur élabore une statistique suffisante qu'il compare à un seuil γ .

Pour le problème de détection (5) la statistique élaborée est

$$l = |r|^2 \geq \gamma \quad (7)$$

où r est v.a complexe gaussienne centrée qui contient toute l'information statistique pour la décision

$$r = \int_{T_1}^{T_1+T} r(t) f^*(t) dt \quad (8)$$

Le seuil γ dépend des probabilités a priori et des coûts des 2 hypothèses, ainsi que du rapport signal à bruit à la réception :

$$E_r/N_0 = q E_t | N_0 \quad (9)$$

Ce récepteur est le classique filtre adapté (ou corrélateur) suivi par une quadrature. Par la suite nous faisons référence à ce récepteur sous le nom "récepteur de Rayleigh".

Pour chiffrer la qualité de la décision dans les problèmes de détection binaire simple, on utilise la probabilité de détection (P_D) ainsi que la probabilité de fausse alarme (P_F):

$$P_D = \text{Prob} \{ l(r) > \gamma / H_0 \}$$

$$P_F = \text{Prob} \{ l > \gamma / H_1 \}$$

Puisque la v.a. l est le module carré d'une gaussienne centrée, sa densité de probabilité est une loi exponentielle.

Les performances sont données par les résultats bien connus :

$$P_D = \exp - \frac{\gamma/N_0}{1 + E_r/N_0}; \quad P_F = \exp - \gamma/N_0$$

$$\text{Ou encore} \quad P_D = P_F \frac{1}{1 + E_r/N_0} \quad (10)$$

En fait le milieu de transmission est souvent plus complexe. Le cas le plus général consisterait à envisager que le signal émis $f(t)$ subit au cours de la transmission un élargissement aléatoire à la fois temporel et fréquentiel [1]. Nous allons simplement envisager 3 cas particuliers et voir comment réagit alors le récepteur dit de Rayleigh en le comparant aux récepteurs optimaux plus complexes qu'il faudrait théoriquement mettre en oeuvre.

PERFORMANCES ET ROBUSTESSE D'UN RECEPTEUR DE RAYLEIGH EN PRESENCE DE MILIEU DISPERSIF

II - MILIEU DISPERSIF EN FREQUENCE-RECEPTION OPTIMALE

II-1 Modèle du milieu

Le modèle du canal dispersif en fréquence peut être interprété en considérant que le signal émis est dégradé par un diffuseur ponctuel dont la vitesse est significative devant l'inverse de la durée de transmission. Le canal se comporte comme un processus aléatoire multiplicatif vis-à-vis du signal émis. Le signal à la sortie du canal est :

$$s(t) = \sqrt{E_c} a(t) f(t) \quad (11)$$

où $a(t)$ est un processus aléatoire modélisant le milieu. On fait l'hypothèse que ce processus est gaussien complexe centré et stationnaire au sens large ("WSS"). Toute l'information statistique est alors contenue dans le moment d'ordre deux :

$$\begin{aligned} E \{ a(t)a(u) \} &= 0 \\ E \{ a(u)a^*(t) \} &= q K_a(t-u) \\ \text{avec } K_a(0) &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

L'écriture adoptée pour la covariance permet de dissocier le phénomène d'atténuation moyenne q (déjà présent dans le cas du canal de Rayleigh), du phénomène de modulation représenté par $K_a(t-u)$.

L'hypothèse de stationnarité permet de définir la fonction de diffusion du milieu. Celle-ci est obtenue par transformation de Fourier de la covariance :

$$S(\nu) = \int K_a(\tau) e^{-2\pi j\nu\tau} d\tau \quad (13)$$

La covariance du signal $s(t)$ est notée

$$K_s(t,u) = E \{ s(t)s^*(u) \}.$$

II-2 Récepteur optimal et performances

Sous ces hypothèses le récepteur optimal pour la détection binaire simple (5) réalise une fonctionnelle quadratique de l'observation qu'il compare à un seuil [2].

$$1 = \frac{1}{N_0} \int \int r(t)h(t,u)r^*(u)dt du \geq \gamma \quad (14)$$

Le filtre $h(t,u)$ est l'estimateur optimal des moindres carrés du processus $s(t)$. Ce récepteur a une structure estimateur-corrélateur. Dans [4] on trouvera une étude plus complète de la réception optimale dans un milieu dispersif en fréquence.

La loi de la statistique de décision (14) est inconnue. On doit donc se contenter d'expressions approchées des performances. De nombreuses bornes et approximations ont été proposées. Nous rappelons les expressions que nous utilisons par la suite [5] :

$$P_D \neq 1 - I_r \left(\frac{\gamma}{b(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}}, \alpha \right) \quad (15)$$

$$P_F \neq 1 - I_r \left(\frac{\gamma(b+1)}{b(\alpha+1)^{\frac{1}{2}}}, \alpha \right) \quad (16)$$

avec

$$\alpha + 1 = \frac{(\int_{T_i}^{T_f} K_s(t,t)dt)^2}{\int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} |K_s(t,u)|^2 dt du} ; \quad b = \frac{\int_{T_i}^{T_f} |K_s(t,u)|^2 dt du}{N_0 \int_{T_i}^{T_f} K_s(t,t)dt}$$

$I_r(\cdot, \cdot)$ est la fonction Gamma incomplète, forme de Pearson [6].

Remarquons que ces expressions ne dépendent que de la covariance du processus à détecter. Elles peuvent être donc calculées sans construire effectivement le filtre estimateur $h(t,u)$.

III - RECEPTEUR DE RAYLEIGH UTILISE EN SORTIE DE MILIEU DISPERSIF EN FREQUENCE

Sur le signal issu du canal dispersif en fréquence précédent, on applique le récepteur dit de "Rayleigh". Le terme d'atténuation moyenne (q) ainsi que la puissance du bruit additif (N_0) sont identiques dans les deux situations.

Dans un premier temps ceci nous permet donc d'étudier la robustesse du récepteur de Rayleigh vis-à-vis d'un milieu plus complexe ; puis sur un exemple particulier nous comparons ses performances avec celles du récepteur qui serait optimal dans cette situation.

III-1 Performances

La loi de la statistique de décision (7) est inchangée. En effet, le processus modulateur $a(t)$ est gaussien centré. Dans ces conditions r est gaussien et la statistique de décision est toujours le module carré d'une v.a complexe gaussienne centrée. Seule la variance de cette v.a. a changé sous l'hypothèse H_1 ce qui modifie la probabilité de détection. On obtient [4]

$$P_D = \exp - \frac{\gamma/N_0}{1+V.E_r/N_0} \quad (17)$$

où $V > 0$ est donné par

$$V = \int \int_0^T K_a(t-u) |f(t)|^2 |f(u)|^2 dt du = \int S(\nu) |\Theta(\nu)|^2 d\nu \quad (18)$$

où $\Theta(\nu)$ est la fonction d'autoambiguïté de l'enveloppe du signal émis pour un retard nul :

$$\Theta(\nu) = \int_0^T |f(t)|^2 e^{-2\pi j\nu t} dt \quad (19)$$

L'hypothèse H_0 étant inchangée, il en est de même pour la probabilité de fausse alarme ; celle-ci est donnée par (10). En combinant (10) et (17) on obtient encore une expression indépendante du seuil :

$$P_D = P_F \frac{1}{1+\sqrt{E_r}/N_0} < P_F \frac{1}{1+E_r/N_0} \quad (20)$$

La perte de performance vis-à-vis de l'observable issue d'un milieu de Rayleigh est donc liée à V .

III-2 Exemple d'application

A titre d'exemple considérons un milieu dont la fonction de diffusion est lorentzienne du premier ordre

$$S(\nu) = \frac{2k}{(2\pi\nu)^2 + k^2} \quad \stackrel{TF}{\iff} K_a(\tau) = e^{-k|\tau|} \quad (21)$$

Ceci correspond à un processus modulateur $a(t)$ du premier ordre avec une fréquence de coupure k . Le temps de corrélation $1/k$ représente la période moyenne de modulation de l'enveloppe complexe du signal émis. Dire que le milieu est plus ou moins modulant signifie qu'il y a plus ou moins de périodes de modulation pendant la durée de transmission T . La dispersion est chiffrée par le paramètre kT : si $kT \ll 1$ le milieu est faiblement modulant ; si $kT \gg 1$, on observe un grand nombre de périodes de modulation sur le signal issu du canal, le milieu est alors très dispersif.

L'étude de la perte de performance se ramène à l'étude du paramètre V . Pour le canal ci-dessus :

$$V = \int \int_0^T |f(t)|^2 |f(u)|^2 e^{-k|t-u|} dt du \quad (22)$$

Nous avons calculé les valeurs de V pour différentes formes de signaux à l'émission. Seul intervient le module de l'enveloppe, on peut donc choisir des signaux réels ; les formes de signaux étudiés sont données par la figure suivante.



PERFORMANCES ET ROBUSTESSE D'UN RECEPTEUR DE RAYLEIGH EN PRESENCE DE MILIEU DISPERSIF

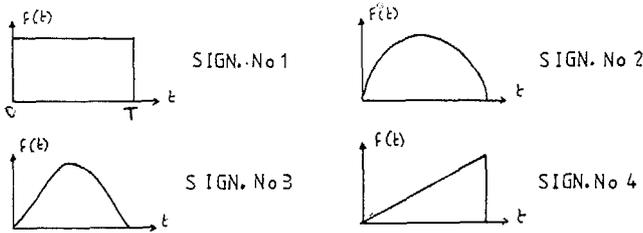


Figure 1 : Formes f(t) étudiées

La figure 2 donne l'évolution du paramètre V en fonction du paramètre de dispersion kT pour ces différentes formes.

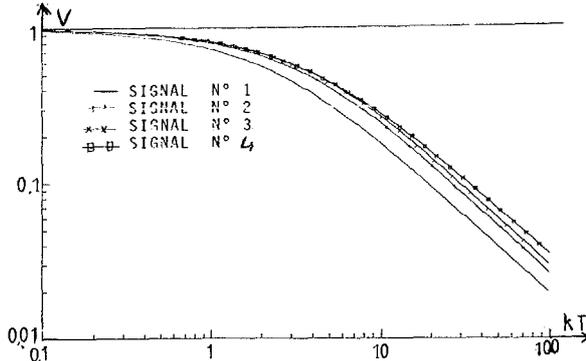


Figure 2 : Evolution de V en fonction de kT

On voit que tant que $kT < \text{quelques unités}$, $V \approx 1$ et la forme du signal n'intervient pas. Le récepteur est robuste. Le canal peut être considéré comme approximativement de Rayleigh.

Dès que $kT > 10$, les résultats sont différents suivant la forme du signal. En fait, dans ce cas là, on doit faire intervenir la "durée utile du signal" [4]

$$T_u \triangleq \left[\int |f(t)|^4 dt \right]^{-1} \quad (23)$$

et les 4 courbes se superposeraient si elles étaient tracées en fonction de kT_u à la place de kT.

En effet, dans le cas très dispersif, $kT \gg 1$, on a :

$$V \approx \frac{2}{kT_u} \quad (24)$$

Donc seul T_u intervient. Par ailleurs le nouveau rapport signal à bruit est :

$$V \frac{E_r}{N_0} \ll \frac{E_r}{N_0}$$

Les performances sont mauvaises. Si on veut les améliorer, on ne peut même plus utiliser la forme des signaux à l'émission (comme dans V) mais il faut augmenter le rapport S/B à l'émission.

III-3 Comparaison avec le récepteur optimal

En utilisant les formules approchées (15) (16), on peut tracer les courbes c.o.r. du récepteur optimal. On trace également celles du récepteur de Rayleigh, mais dans ce cas, les expressions sont exactes. On donne ci-dessous deux exemples correspondant aux deux cas limites du paramètre de dispersion, pour diverses valeurs du rapport signal à bruit à la réception. Ces courbes donnent des éléments quant au choix du récepteur à utiliser dans des conditions de transmission données. Naturellement, le récepteur de Rayleigh est moins performant que le récepteur optimal. Il apparaît que pour des rapports signal sur bruit faibles, on ne perd pas beaucoup à utiliser le récepteur sous-optimal (mais les performances sont mauvaises).

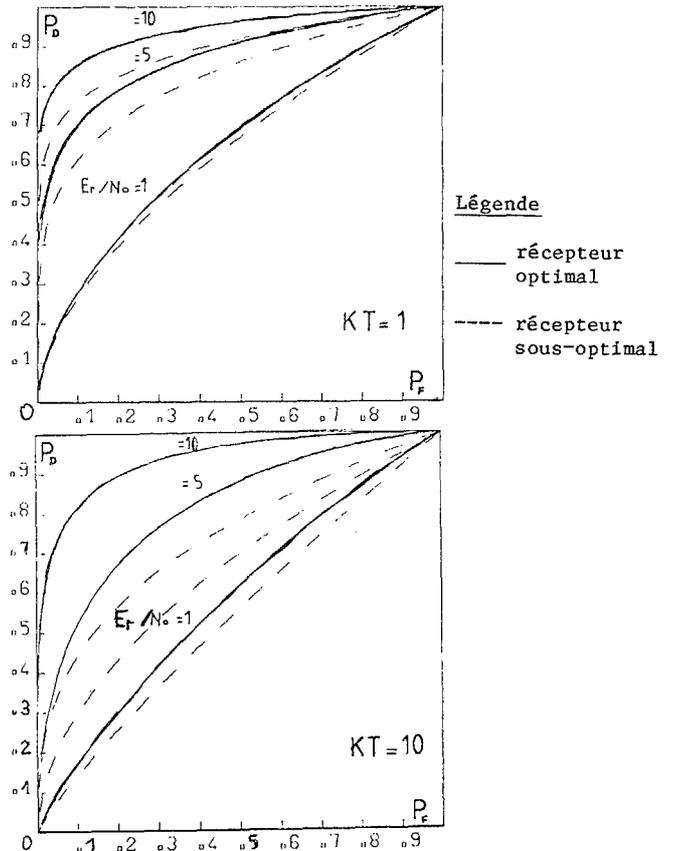


Figure 3 : Courbes c.o.r. des récepteurs après élargissement fréquentiel

Lorsque le rapport signal sur bruit augmente, il est alors préférable d'utiliser le récepteur optimal, ceci est d'autant plus vrai que le milieu de transmission est plus dispersif.

III-4 Conclusion

Lorsque la fluctuation du milieu est relativement lente vis-à-vis de la durée du signal émis ($RT < 1$), la forme du signal n'influe pas sur les performances du récepteur qui reste relativement robuste. Le récepteur de Rayleigh sera utilisable.

Si le milieu est plus dispersif, ie dès que $kT > 5$ d'après les résultats vus ci-dessus, on se pénalise alors beaucoup du point de vue performances en utilisant le récepteur de Rayleigh. Ceci est d'autant plus vrai que le rapport signal sur bruit à la réception est élevé. Il est alors préférable d'utiliser le récepteur optimal, ou un autre très légèrement sous-optimal [4].

IV - RECEPTEUR DE RAYLEIGH ET MILIEU A DEUX TRAJETS

IV-1 Modèle du milieu

Nous envisageons maintenant le cas où le signal transmis dans le milieu emprunte 2 trajets en subissant un affaiblissement et un déphasage aléatoires sur chacun d'eux. Ces 2 trajets sont supposés statistiquement indépendants ; ceci intervient fréquemment dans les cas de propagation dits "à trajets multiples".

Soit L certain et connu le retard entre les trajets ; l'enveloppe complexe du signal reçu est :

$$s(t) = \sqrt{E_t} f(t) a_1 + \sqrt{E_t} f(t-L) a_2 \quad (25)$$

où a_1 et a_2 sont v.a. indépendantes complexes gaussiennes centrées de variance q_i ($i=1,2$).

PERFORMANCES ET ROBUSTESSE D'UN RECEPTEUR DE RAYLEIGH EN PRESENCE DE MILIEU DISPERSIF

IV-2 Récepteur optimal et performances

Sur la durée d'observation égale alors à T+L, le r.o. réalise le test quadratique suivant :

$$1 = \underline{R}^t (K_0^{-1} - K_1^{-1}) \underline{R} \quad (26)$$

où \underline{R} est le vecteur à 2 composantes :

$$r_1 = \int_0^{T+L} r(t) f^*(t) dt \quad r_2 = \int_0^{T+L} r(t) f^*(t-L) dt \quad (27)$$

K_0 et K_1 sont les matrices de covariance du vecteur \underline{R} sous les 2 hypothèses. Elles se calculent [7] en fonction de l'énergie moyenne reçue à la réception, $E_r = (q_1 + q_2) E_t$, et du coefficient d'autocorrélation du signal transmis pour le retard L :

$$\mu = \int_0^{T+L} f(t) f^*(t-L) dt \quad (28)$$

La loi de la statistique 1 peut être obtenue de façon simple en utilisant la méthode de la fonction caractéristique [7]. On donne ici les performances obtenues lorsque les 2 trajets sont de même énergie moyenne, avec $\mu = 0$.

Soit $q_1 = q_2 = q$; $E_r = 2q E_t$.

Les probabilités de détection et de fausse alarme sont alors :

$$P_D = \left(1 + \frac{\gamma}{\lambda}\right) e^{-\gamma/\lambda} \quad ; \quad P_F = \left(1 + \frac{\gamma(1+\lambda)}{\lambda}\right) e^{-\frac{\gamma(1+\lambda)}{\lambda}} \quad (29)$$

où $\lambda = E_r / 2N_0$

IV-3 Récepteur sous-optimal de Rayleigh

Utiliser un récepteur de Rayleigh revient alors à ne prendre en compte qu'un trajet sur les 2. Pour le calcul des performances, la probabilité de fausse alarme est toujours donnée par (10). La probabilité de détection prend encore la forme

$$P_D = \exp \left[-\frac{\gamma/N_0}{1 + V' E_r / N_0} \right] \quad \text{avec} \quad V' = \frac{q_1 + q_2 |\mu|^2}{q_1 + q_2}$$

On voit donc que la perte de performance du récepteur de Rayleigh est toujours liée à une quantité V' qui exprime cette fois-ci la part d'énergie, non prise en compte, due au 2e trajet. En particulier la forme des signaux $f(t)$ n'intervient dans les performances que par l'intermédiaire du coefficient μ , autocorrélation du signal pour le retard L.

V' est maximal si $\mu = 1$, car alors les 2 trajets apparaissent confondus en un seul pour le récepteur de Rayleigh.

Pour $\mu = 0$ et $q_1 = q_2$, $V' = 1/2$ et le récepteur travaille avec un rapport signal à bruit équivalent de $E_r / 2N_0$.

IV-4 Comparaison récepteur optimal et de Rayleigh

La figure 4 donne l'évolution des c.o.r. pour différents rapports signal à bruit $E_r / N_0 = 1, 2, 5, 10$ avec $\mu = 0$ et pour le cas où les 2 trajets sont équipuissants ($q_1 = q_2$).

Les performances du r.o. et du récepteur de Rayleigh sont d'autant plus différentes que E_r / N_0 est grand.

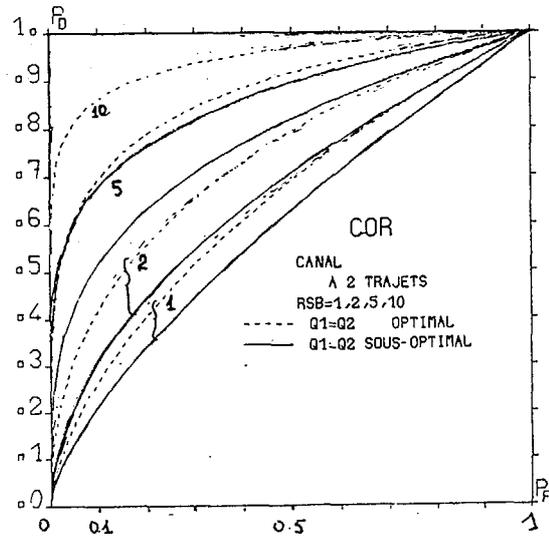


Figure 4 : Canal à 2 trajets

V - PROBLEME DE LA DATE D'ARRIVEE

V-1 Position du problème

Les traitements envisagés jusqu'à présent supposent que l'observateur connaît la date d'arrivée du signal. La caractérisation de la durée de propagation est alors purement déterministe. La détermination de cette quantité fait souvent appel à un modèle simplifié qui tient compte seulement de l'aspect macroscopique du milieu vis-à-vis de la vitesse des ondes. En fait une étude plus fine met en valeur le caractère aléatoire de la durée de transmission [8].

Ce comportement aléatoire de la date d'arrivée du signal peut être dû à différentes causes. Par exemple il peut être dû à des hétérogénéités du milieu sur toute la propagation qui entraînent des variations de vitesse de l'onde. Dans les problèmes de communication des instabilités entre émetteur et récepteur peuvent être décrites en terme de retard aléatoire (jitter)[9].

Pour modéliser l'aspect aléatoire de la transmission dans un canal de Rayleigh nous adoptons le modèle suivant. Si $s(t)$ est le signal issu du milieu, alors le signal considéré est $s(t - \theta - \tau)$ où θ représente la durée de transmission moyenne que l'on est à même d'identifier et de compenser. τ est un retard aléatoire centré appartenant à un intervalle borné $[-\tau_{max}; +\tau_{max}]$, modélisant l'effet des fluctuations de la date d'arrivée du signal.

Supposons que l'on a préalablement compensé la partie certaine de la durée de transmission ; le récepteur peut se trouver dans l'une ou l'autre des situations suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 : r(t) &= s(t - \tau) + n(t) \\ H_0 : r(t) &= n(t) \end{aligned} \quad t \in [T_i, T_F] \quad (30)$$

où $s(t) = \sqrt{E_t} f(t)$ a

Nous conservons les mêmes hypothèses en ce qui concerne la caractérisation statistique du milieu et du bruit additif. La durée d'observation est telle qu'elle comprend tout le domaine possible d'arrivée du signal.



Rappelons que pour détecter de manière optimale lorsque le signal est parfaitement localisé, il faut comparer à un seuil la sortie de l'ensemble filtre adapté au signal + quadratureur, à l'instant où le signal prend fin. La question se pose alors de savoir comment l'incertitude sur la date d'arrivée va modifier les performances du récepteur de Rayleigh. Celui-ci travaille en fait en supposant que $\tau = 0$.

V-2 Performances

Probabilité de fausse alarme : la perturbation n'intervient pas dans l'hypothèse bruit seul. La loi de la statistique de décision est inchangée. Il en est de même pour la probabilité de fausse alarme. Elle est donnée par (10).

Probabilité de détection : pour déterminer la probabilité de détection on passe par la fonction caractéristique. Les calculs complets sont donnés en [4]. Nous nous contentons ici de donner les résultats tout en exprimant les étapes essentielles.

La fonction caractéristique de la statistique de décision (7) sous l'hypothèse H_1 , et conditionnée à τ est de la forme :

$$\Theta_1(j\nu/H_1, \tau) = [1 - j\nu \lambda_1(\tau)]^{-1} \quad (31)$$

où $\lambda_1(\tau)$ est la variance conditionnelle de la v.a. τ :

$$\lambda_1(\tau) = E\{|\tau|^2/\tau\} = q E_t |1 + C_f(\tau)| + 2N_0 \quad (32)$$

$C_f(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de l'enveloppe complexe du signal émis. L'expression précédente n'est pas une fonction simple de la v.a. τ . L'intégration de (31) nécessite quelques approximations. On fait l'hypothèse que le retard est petit devant la durée du signal émis, auquel cas on peut approximer la covariance du signal. Ainsi considérons les signaux dont la fonction d'autocorrélation admet un développement en série de Mac Laurin :

$$C_f(\tau) \approx 1 - \frac{\tau^2}{2} C_f''(0) \quad \tau/T \ll 1 \quad (33)$$

La fonction caractéristique s'exprime alors simplement en fonction du retard et on peut calculer (31). Choisissons pour τ une loi équipartie sur $[-\tau_{\max}, +\tau_{\max}]$.

En utilisant alors un développement limité de la fonction caractéristique $\Theta_1(j\nu/H_1)$, et en choisissant une forme de signal carré à l'émission, on arrive [4] à calculer la transformée de Fourier de l'expression (31) ; on obtient un développement limité de la densité de probabilité de la statistique de décision $1/H_1$. On en déduit la probabilité de détection :

$$P_D \approx \exp(-\frac{\gamma}{\lambda}) \left[1 + \frac{\gamma}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} L_{n-1}^1(\frac{\gamma}{\lambda}) \right] \quad (34)$$

où les $L_n^1(x)$ représentent les polynômes de Laguerre [6], γ est le seuil de détection, $\lambda = E_r/N_0$, et u_n est un coefficient lié à la forme du signal émis, ici :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\tau_{\max}}{T} \right)^n \frac{E_r/N_0}{1 + E_r/N_0}$$

Le calcul numérique de (34) montre que le premier terme est prépondérant à retard maximal faible.

La figure 5 illustre la perte de performance pour le signal carré ; elle représente l'évolution de P_D en fonction du rapport signal sur bruit à la réception. Nous donnons les résultats pour 3 valeurs différentes de P_F . Sur cet exemple la valeur du retard maximal correspond à 20% de la durée du signal émis.

On remarque que la perte de performance varie dans le même sens que P_F . Lorsque $E_r/N_0 > 1$, la perte de performance diminue à mesure que le rapport signal sur bruit augmente, quelque soit P_F .

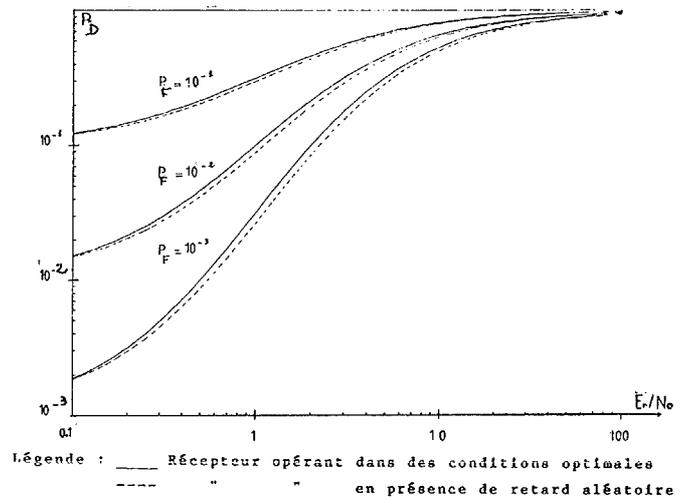


Figure 5 : P_D en fonction du rapport signal sur bruit

En définitive, lorsque le retard maximal reste faible vis-à-vis de la durée du signal émis ($\sim 20\%$), la perte de performance reste négligeable.

VI - CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés à l'étude des performances du récepteur de Rayleigh lorsqu'il opère sur un signal issu d'un milieu plus complexe.

Si le signal est issu d'un milieu dispersif en fréquence, on a montré que le récepteur est robuste lorsque le milieu est faiblement dispersif. Le modèle de Rayleigh constitue alors une bonne approximation du milieu.

Lorsque le signal est issu d'un milieu à deux trajets et que le récepteur ne tient compte que d'un trajet, la perte de performance est directement liée à l'énergie transmise sur le chemin dont on n'a pas tenu compte.

En dernier lieu nous avons introduit dans le modèle de la transmission un retard aléatoire qui traduit l'incertitude sur la date d'arrivée. Nous avons pu chiffrer les performances du récepteur en terme probabiliste. On montre ainsi que cette nouvelle perturbation ne modifie pratiquement pas les performances du récepteur lorsque le retard maximal est faible vis-à-vis de la durée du signal émis.

VII - BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. JOURDAIN, G. TZIRITAS : "Communication over fading dispersive channels - Optimal receivers and signals". Signal Processing, Janvier 1984.
- [2] H.L. VAN TREES : "Detection estimation and Modulation Theory" part III, J. Wiley & Sons 1971.
- [3] WOZENCRAFT and JACOBS : "Principles of communication engineering", J. Wiley & Sons 1965.
- [4] H. CHERIFI : "Contribution à l'étude de récepteurs bayésiens en sortie de canal dispersif en fréquence". Thèse de 3ème Cycle, Grenoble 1984.
- [5] G. TZIRITAS : "Communication dans un canal aléatoire dispersif". Thèse de D.I., Grenoble, Février 1981.
- [6] ABRAMOVITZ S. : "Handbook of Mathematical Functions, Doven N.Y. 1965.
- [7] G. TZIRITAS : "Transmission suivant deux trajets à évanouissement de Rayleigh : Récepteurs optimaux", Annales des Télécomm. B6 n°11-12, Nov.81.
- [8] P. LAMBERT : "Contribution par l'étude de la phase transmise à la modélisation du milieu acoustique sous-marin", Thèse D.I. Grenoble, Mars 1983.
- [9] W.M. BROWN et C.J. PALERMO : "System performance in the presence of stochastic delays", IRE Trans. on Inf. Th., IT8, 1962, p 206,214.