



NICE du 20 au 24 MAI 1985

UNE APPROCHE TEMPS REEL NON RECURSIVE  
DE L'AZIMETRIE PASSIVE

C. DONCARLI - Ph. de LARMINAT

Laboratoire d'Automatique de Nantes - UA CNRS 823  
E.N.S.M. 1 rue de la Noë 44072 NANTES CEDEX

**RESUME**

Le problème de l'azimétrie passive consiste à reconstituer la trajectoire d'un but non coopératif à partir des mesures d'azimut effectuées par un observateur en écoute passive (absence de mesure de distance). Les difficultés du problème tiennent à plusieurs causes :

- dans certaines circonstances la trajectoire du but n'est pas reconstructible, et dans bien d'autres cas le niveau d'observabilité est très faible,
- le problème d'estimation est intrinsèquement non linéaire,
- la trajectoire du but est difficilement représentable par un modèle stochastique,
- les bruits de mesure sont bien loin de respecter des hypothèses favorables d'indépendance et de normalité.

Pour toutes ces raisons, il est dangereux de supposer que tout le passé est parfaitement résumé dans l'estimation présente, accompagnée de sa matrice de variance-covariance (méthodes de filtrage linéarisé) et on constate les insuffisances de ces méthodes dans les configurations peu observables.

La distance estimée peut très bien se mettre à converger vers zéro, ou bien, après un mauvais comportement transitoire, le filtre "récupère" mal lorsque le but redevient observable, où même le filtre peut décrocher définitivement.

D'une manière très générale en azimétrie, le but (bien que n'étant pas continuellement observable) est observable grâce à la conjonction de deux blocs de mesures : avant et après évolution de l'observateur. Le premier bloc ne peut donc pas être représenté par une statistique équivalente, car il ne peut pas fournir une estimation correcte du but.

On peut donc envisager de remplacer l'estimation courante, (accompagnée de sa matrice de variance-covariance) par une statistique plus complète, équivalente aux observations passées (loi conditionnelle) et chercher une récurrence sur cette statistique complète. Le volume de calculs qui en découlerait est proprement gigantesque.

On se propose donc de conserver l'information initiale du problème, c'est-à-dire la suite des azimuts, depuis l'apparition du but, jusqu'à l'instant présent (avec, dans la pratique, un oubli du passé lointain).

Le fondement de la méthode consiste donc à définir des variables primaires permettant de reconstituer la suite idéale des azimuts. Par exemple, si on fait l'hypothèse que le but admet une trajectoire constituée de segments de droites successifs parcourus à vitesse constante, on peut considérer l'ensemble de variables primaires suivant :

**SUMMARY**

- distance à l'instant présent
- azimut à l'instant présent
- cap à l'instant présent
- vitesse à l'instant présent
- instant de la dernière giration du but
- cap avant giration
- vitesse avant giration
- instant de la giration précédente
- cap avant giration
- vitesse avant giration
- etc ... jusqu'à l'instant d'apparition du but.

Cet ensemble de variables primaires fournit donc la suite idéale des azimuts.

Un critère de moindre carrés global, et une méthode de minimisation par programmation non linéaire permettent alors d'obtenir une estimation satisfaisante des variables primaires, et donc de la trajectoire du but.

L'introduction des informations sur le rapport signal/bruit, si elles sont disponibles, permet de conférer à ce critère le sens d'un maximum a posteriori, ce qui est tout à fait satisfaisant.

On présente dans ce papier les détails de mise en oeuvre de cette méthode, et les résultats obtenus, avec visualisation des domaines de confiance géométriques sur la position du but.

SUMMARY

The problem of azimuth estimation consists in the estimation of the trajectory of a target, without measure of distance. The difficulties of the problem are :

- low level of observability,
- difficulty, for stochastic models, to describe the trajectory,
- correlation of measurement noise.

Thus, it is dangerous to suppose that all the past observations are resumed in the present estimation of the state and of the error variance-covariance matrix.

So, we use a more complete statistics of the observations which is the exhaustive sequence of the measured azimuths.

The method consists in the definition of primary variables, providing a generated sequence of azimuths. A least squares procedure (weighted) is then used to estimate those primary variables (Maximum a Posteriori Criterion) and to provide the likelihood domain.



## I. INTRODUCTION

On rappelle la position du problème de base, ainsi que sa solution classique par filtrage de Kalman étendu.

Le but est supposé en mouvement rectiligne uniforme, (fig. 1), ce qui correspond aux équations d'état suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1 - u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2 - u_2 \\ \frac{dv_1}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

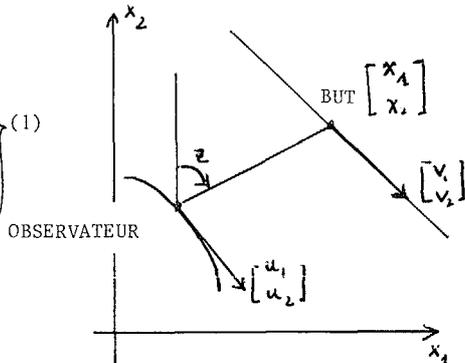


fig. 1

où :

- $x_1$  et  $x_2$  sont les coordonnées relatives du but par rapport à l'observateur,
- $v_1$  et  $v_2$  : vitesse absolue du but
- $u_1$  et  $u_2$  : vitesse absolue de l'observateur (connue).

On note  $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ v_1(t) \ v_2(t)]^T$  l'état à estimer.

L'azimut  $z$  est mesuré à des instants  $\{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_p\}$ . Soit  $z_m$  la mesure d'azimut :

$$z_m(t_k) = \text{Arc tg} \frac{x_1(t_k)}{x_2(t_k)} + \delta(t_k) \quad (2)$$

où  $\delta(t_k)$  est un bruit de mesure.

Le filtre de Kalman étendu consiste à linéariser l'équation (2) autour d'une approximation  $X^*(t_k)$  et à mettre en oeuvre les équations classiques du filtre de Kalman sur le système constitué par (1) et la linéarisation de (2).

Classiquement, on prend pour  $X^*(t_k)$  les prédictions fournies par le filtre lui-même :

$$X^*(t_k) = \hat{X}(t_k | t_{k-1})$$

Une autre solution consiste à choisir une approximation  $X^*(t_k)$  dont les deux premières composantes respectent la contrainte

$$\frac{x_1^*(t_k)}{x_2^*(t_k)} = \text{tg} [z_m(t_k)]$$

Cette approximation est appelée "technique de pseudo-observation".

Quand le bruit de mesure est une séquence blanche et que la trajectoire du but est bien reconstituée, F.K.E. donne d'excellents résultats, comme peuvent l'attester toutes les simulations.

Dans le cas réel, les résultats sont beaucoup moins favorables. Bien entendu, certaines trajectoires sont intrinsèquement difficiles à reconstruire, mais il semble que ce soit justement dans ces cas-là que la méthode elle-même présente des insuffisances.

Tout d'abord, on constate parfois une fâcheuse convergence de la distance estimée vers zéro.

Ce phénomène apparaît en particulier lors de l'usage de la "pseudo-observation", mais il est présent aussi dans le FKE classique, lorsque le bruit de mesure n'est pas une séquence blanche.

Une coloration peut exister déjà naturellement dans la suite des bruits affectant les mesures brutes  $z_m(t_k)$ , mais elle est encore accentuée par les éventuels pré-

traitements ou lissages des observations.

On constate aussi qu'après un mauvais comportement transitoire (tel que la tendance vers 0 ci-dessus) le filtre "récupère" mal lorsque le but redevient observable à la suite d'une évolution de l'observateur, à tel point que le filtre peut même en arriver à décrocher définitivement.

Bien entendu, on peut chercher des modifications pour assurer la stabilité (et la pseudo-observation en est une), mais F.K.E. restera toujours soumis à la critique fondamentale suivante :

Par définition même, F.K.E. est un filtre récursif, dans lequel la connaissance de toutes les informations  $\{z_m(t_k)\}$  depuis l'instant initial  $t_0$  jusqu'à l'instant présent  $t_p$  est remplacée par le couple  $[\hat{X}(t_p), P(t_p)]$  où  $P$  est la matrice de variance-covariance associée à l'estimée  $\hat{X}$ . Compte tenu du caractère non linéaire du problème,  $\hat{X}(t)$  ne peut pas être une statistique exhaustive (i.e. équivalente à la connaissance de  $\{z_m(t_k)\}$ ). Il en résulte qu'un mauvais comportement transitoire peut se traduire par la perte de tout un bloc d'informations ou, pire encore, son remplacement par un couple  $[\hat{X}, P]$  sans rapport avec lui. Ceci est sans conséquence dans certains problèmes où l'état est continuellement bien observable, mais en azimétrie, la situation caractéristique est celle où le but est observable grâce à la conjonction de deux blocs d'observations : avant et après une évolution de l'observateur. Il est clair que le premier bloc doit être remplacé par une statistique qui soit correctement équivalente, si l'on veut espérer un résultat acceptable.

Or, le premier bloc ne permet pas à lui seul une bonne estimation de  $\hat{X}(t)$ , et donc la bonne linéarisation qui garantirait un bon comportement initial du filtre.

Malheureusement, quels que soient les adjonctions, modifications, raffinements qu'on fasse subir à FKE, on n'échappera pas à ce défaut fondamental.

Dans cette situation, on peut chercher des remèdes du côté de la théorie générale d'un filtrage non linéaire à la limite exacte et toute amélioration majeure se traduira nécessairement par les points suivants :

- remplacement du couple  $[\hat{X}, P]$  par une statistique plus complète, telle que sa connaissance soit équivalente à celle des observations passées (par exemple la probabilité conditionnelle de  $X$ ).
- remplacement de la récurrence sur  $X$  et  $P$  par une récurrence sur la statistique ci-dessus.

Malheureusement, toutes les théories générales du filtrage non linéaire se traduisent par un volume de calcul proprement gigantesque dès que la dimension du problème dépasse un ou deux (et ici,  $X$  est de dimension 4 !).

A ce niveau, certaines évidences s'imposent :

- Pourquoi rechercher bien loin des statistiques exhaustives (qui prendront une place considérable en mémoire) alors qu'il est si facile d'enregistrer tout simplement la suite complète des azimuts observés depuis l'apparition d'un but jusqu'à sa disparition ?
- Pourquoi s'obstiner à maintenir une formulation récursive, dès lors que le volume de calcul est si considérable qu'il dépasserait, à chaque itération, le volume impliqué par un traitement global des informations enregistrées depuis l'instant initial jusqu'à l'instant présent ?

En d'autres termes, si F.K.E. est insuffisant, et si l'on doit se résoudre à une forte augmentation du volume de calcul pour améliorer les résultats, il convient d'abord d'examiner les possibilités du côté des formulations non récursives du filtrage non linéaire.



UNE APPROCHE TEMPS REEL NON RECURSIVE  
DE L'AZIMETRIE PASSIVE

II - UNE FORMULATION NON RECURSIVE DU FILTRAGE NON LINEAIRE

Notons  $X(t_p | t_p)$  une estimation de l'état  $X(t)$ , effectuée sur la base des informations  $\{z_m(t_k)\}$  jusqu'à l'instant présent  $t_p$ .

Sous l'hypothèse de trajectoires rectilignes uniformes,  $X(t_p | t_p)$  permet de reconstruire toute une trajectoire  $X(t_k | t_p)$  où  $t_k \leq t_p$  d'où une suite d'azimuts reconstruits à partir de  $X(t_p | t_p)$

$$z(t_k | t_p) = \text{Arc tg} \frac{x_1(t_k | t_p)}{x_2(t_k | t_p)} \quad (3)$$

Il est clair qu'en l'absence d'autres informations, la validité de  $X(t_p | t_p)$  ne pourra être appréciée que par comparaison entre les suites  $\{z_m(t_k)\}$  et  $\{z(t_k | t_p)\}$  pour  $t_k \in [t_0, t_p]$ .

On pourra même optimiser  $X(t_p | t_p)$  sur la base d'un critère portant sur les écarts entre  $z_m(t_k)$  et  $z(t_k | t_p)$ ,  $t_k \in [t_0, t_p]$ .

Dans l'hypothèse où la suite des bruits  $\delta(t_k)$  dans (2) est gaussienne, indépendante, centrée, l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance conduit justement à minimiser le critère suivant :

$$J(X(t_p | t_p)) = \sum_{k=0}^p (z_m(t_k) - z(t_k | t_p))^2 \quad (4)$$

Notons  $\hat{X}_{MV}(t_p | t_p)$  la valeur qui minimise ce critère.

Compte tenu des hypothèses statistiques sur le bruit, on peut pousser très loin l'analyse des propriétés théoriques de l'estimateur, mais il est bon d'observer que la minimisation du critère ci-dessus est en soi un moyen adéquat pour obtenir une reconstruction satisfaisante de la trajectoire, quelles que soient les hypothèses qu'on peut faire sur le bruit. Ecartons néanmoins le cas extrême de mesures aberrantes ou systématiquement erronées, qui seraient de toute façon inutilisables. Par contre, il suffit que les erreurs de mesure soient relativement petites et sensiblement centrées pour que la minimisation du critère  $J$  corresponde à une bonne utilisation des informations, sans que la coloration du bruit, par exemple, puisse détériorer fondamentalement les résultats.

Un autre point intéressant est apporté par la comparaison de l'estimation du maximum de vraisemblance ci-dessus  $\hat{X}_{MV}$  avec l'estimation du filtre de Kalman étendu  $\hat{X}_{FKE}$ .

On peut montrer en effet que si on applique les équations du filtre de Kalman étendu entre les instants  $t_p$  et  $t_{p+1}$ , avec

$$\hat{X}_{FKE}(t_p | t_p) = \hat{X}_{MV}(t_p | t_p)$$

$P(t_p) = \frac{2}{p} J[\hat{X}_{MV}(t_p | t_p)]$ ,  $J_{XX}^{-1}$ , avec  $J_{XX}$  dérivée seconde du critère

Alors  $\hat{X}_{FKE}(t_{p+1} | t_{p+1})$  diffère de  $\hat{X}_{MV}(t_{p+1} | t_{p+1})$  par un infiniment petit d'ordre 2 sur l'erreur d'estimation.

Si l'erreur tend vers 0 on peut donc conclure que  $\hat{X}_{MV}$  et  $\hat{X}_{FKE}$  sont asymptotiquement équivalents. Plus précisément, on peut dire que le filtre de Kalman étendu est une formulation récursive approchée de l'estimation du maximum de vraisemblance.

Si l'on estime que les insuffisances de F.K.E. sont dues aux approximations résultant de sa structure récursive, il est naturel de se retourner vers la formulation globale équivalente, si du moins celle-ci est possible à mettre en oeuvre du point de vue numérique, compte tenu des volumes mémoire et calcul qu'elle impliquera.

Un autre argument important milite en faveur de la formulation globale. Dans le cas réel, le but ne poursuit évidemment pas toujours une trajectoire rectiligne.

Pour modéliser un mouvement non uniforme, divers modèles peuvent être proposés :

(i) la modélisation des accélérations par des signaux aléatoires stationnaires (par exemple des bruits blancs, isotropes, ou mieux encore dirigés dans une direction normale au vecteur vitesse).

Un tel modèle est particulièrement bien adapté au traitement par F.K.E., mais son réalisme laisse à désirer.

(ii) la modélisation de l'ensemble de la trajectoire entre les instants  $t_0$  et  $t_p$  par une suite finie de  $n$  segments parcourus chacun à vitesse uniforme (fig. 2).

Ce deuxième type de modèle est plus difficile à utiliser dans le cadre de F.K.E. Il faut en effet détecter les instants de rupture de modèle  $\tau_i$ , et réinitialiser le filtre à chaque détection.

Par contre, dans le cadre d'un traitement global, on peut définir l'ensemble de la trajectoire par :

(i) les coordonnées des extrémités des  $n$  segments, soit  $2(n+1)$  paramètres

(ii) les  $(n-1)$  instants  $\{\tau_1 \dots \tau_{i-1} \dots \tau_{n-1}\}$ ,

Soit au total  $3n+1$  paramètres constituant un vecteur  $\theta(t_p)$ .

Un tel vecteur  $\theta(t_p)$  permet de reconstruire toute la suite  $z(t_k | t_p)$  et on peut définir la trajectoire optimale comme celle qui minimise par rapport à  $\theta(t_p)$  le critère défini plus haut (4).

On note que le problème de détection se pose encore à propos de la détermination du nombre  $n$  de segments.

III - LE PROBLEME DE LA MINIMISATION DU CRITERE

On ne s'étendra pas ici sur les modalités de la minimisation qui doit faire appel à la programmation non linéaire, puisque  $z(t_k | t_p)$  est une fonction non linéaire de  $\theta(t_p)$ .

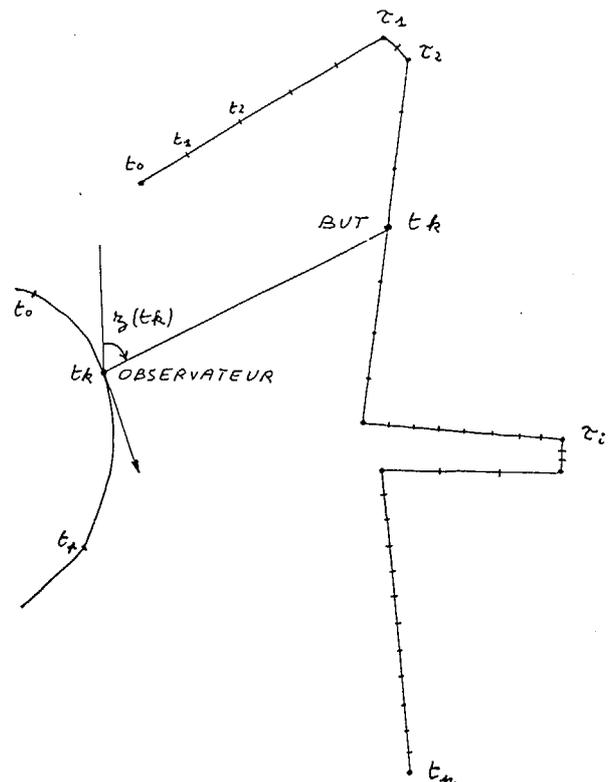


fig. 2



On se contentera de quelques remarques générales :

- Pour limiter le temps de calcul du critère et le nombre de paramètres (lié au nombre  $n$  de segments), on pourra être conduit à redéfinir l'instant initial  $t_0$  au fur et à mesure que  $t_p$  augmente, de façon à borner l'intervalle  $|t_p - t_0|$ .
- La minimisation pourra être facilitée en définissant  $\theta$  par l'intermédiaire des coordonnées polaires des extrémités du segment par rapport à l'observateur : azimuts  $z(\tau_i)$ , distances  $d(\tau_i)$  et écarts  $(\tau_{i+1} - \tau_i)$ .
- On introduira des contraintes sur les distances : une distance maximale (si celle-ci est donnée a priori), et *nécessairement* une distance minimale pour éviter l'indétermination  $\text{Arc tg } \frac{0}{0}$ . On peut aussi borner les différences  $\tau_{i+1} - \tau_i > \tau_{\text{inf}}$ .
- On donnera la préférence aux algorithmes fournissant, à titre de sous-produit, l'inverse de la matrice des dérivées secondes du critère (méthodes du 2ème ordre).

Sous réserve de pertinence des hypothèses statistiques, cette matrice donne en effet la variance-covariance des erreurs d'estimation, et joue donc un rôle fondamental dans l'évaluation des résultats ainsi que dans l'élaboration des domaines de confiance.

#### IV - LA DETERMINATION DE $n$

En principe la théorie de la détection permet, par des tests d'hypothèse, de déterminer le nombre  $n$  de segments que comporte une trajectoire inconnue.

Malheureusement, son application repose ici sur des approximations difficiles à contrôler et surtout sur des hypothèses statistiques rigoureuses concernant en particulier l'indépendance des bruits de mesure.

Bien que la théorie de la détection constitue un guide précieux, il sera bon de s'appuyer sur des considérations intuitives immédiates.

Si l'on calcule le minimum du critère (4) pour différentes valeurs de  $n$ , on trouvera nécessairement une courbe décroissante de l'allure suivante (fig. 3).

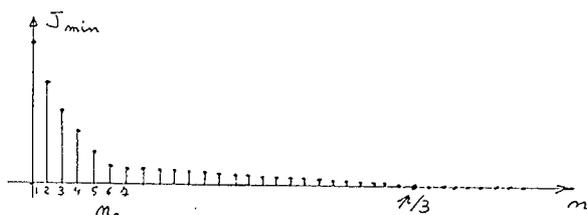


fig. 3

En effet, plus  $n$  augmente, meilleur pourra être l'ajustement. A la limite, si la trajectoire présente autant ou plus de degrés de liberté qu'il y a d'observations, le minimum du critère deviendra nul.

Si on se limite à des valeurs raisonnables de  $n$ , (soit  $n \ll p/3$ ), il est clair que  $J_{\text{min}}$  décroîtra rapidement tant que la valeur exacte de  $n$  ne sera pas atteinte, mais que la décroissance sera plus lente au-delà. La théorie des tests d'hypothèse permet d'établir que la valeur optimale  $n_0$  minimise un critère de la forme

$$J_{\text{min}}(n) + \lambda n$$

où  $\lambda$  est un coefficient qui dépend de divers facteurs, parmi lesquels la variance du bruit.

Néanmoins, on peut craindre que  $\lambda$  ne soit très sensible aux approximations dans l'application de la

théorie, et à la validité des hypothèses statistiques. Il en résulte donc que le choix de  $\lambda$  devra faire largement appel à l'expérience et qu'un certain pouvoir de décision devra être laissé à l'utilisateur dans la détermination de  $n$ .

#### V - VISUALISATION ET EVALUATION DES RESULTATS

De façon à apprécier la validité des résultats, certaines courbes devront impérativement être visualisées par l'utilisateur.

- Tout d'abord, évidemment, les trajectoires observateur et les trajectoires but reconstruites dans un repère absolu.

- Les signaux azimuts observés et reconstruits.

Ceci pour différentes valeurs de  $n$ , soit fournies automatiquement, soit à la demande de l'utilisateur.

La comparaison des signaux d'azimut permet d'apprécier si la trajectoire obtenue explique convenablement les azimuts observés (éventuellement, on peut détecter et éliminer des points aberrants). Néanmoins, la coïncidence peut être excellente sans que la trajectoire trouvée soit exacte. Ce peut être le cas si la trajectoire n'est pas observable par suite d'évolutions insuffisantes de l'observateur. Ce peut être le cas également si  $n$  est surévalué.

Pour évaluer la précision d'un résultat, on peut se baser sur la matrice des dérivées secondes du critère.

Une autre méthode consiste à observer si la trajectoire obtenue est très sensible à diverses perturbations, telles que :

- Initialisation de l'algorithme de P.N.L.
- Perturbation sur le signal d'azimut observé.
- Perturbation du critère par adjonction d'un terme tel que  $\alpha(d(t_k) - d_i)$ , où  $\alpha$  est un petit coefficient de pondération et  $d_i$  une distance arbitraire à laquelle on donne diverses valeurs comprises entre  $d_{\text{min}}$  et  $d_{\text{max}}$ .

Si les moyens de calculs le permettent, on peut envisager une analyse par la méthode Bootstrap qui consiste ici à remplacer le critère par :

$$J_{\beta_k}(\theta_k) = \sum_{k=0}^p \beta_k^2 (z_m(t_k) - z(t_k|t_p))^2$$

où les  $\beta_k^2$  sont des pondérations aléatoires respectant l'égalité

$$\sum_{k=0}^p \beta_k^2 = p + 1$$

Les trajectoires obtenues en minimisant un grand nombre de fois ce critère permet d'évaluer la validité des résultats par la dispersion des trajectoires obtenues.

#### VI - CONCLUSIONS

La formulation non récursive proposée s'appuie sur des bases théoriques solides (méthode du maximum de vraisemblance, tests d'hypothèse), mais elle devrait présenter une bonne robustesse vis-à-vis des hypothèses statistiques qui la soutiennent. Par rapport aux méthodes basées sur le filtrage récursif, l'écran théorique situé entre les données et les résultats est beaucoup plus transparent, ce qui permet de valider les résultats et de modifier facilement la méthode selon les besoins.

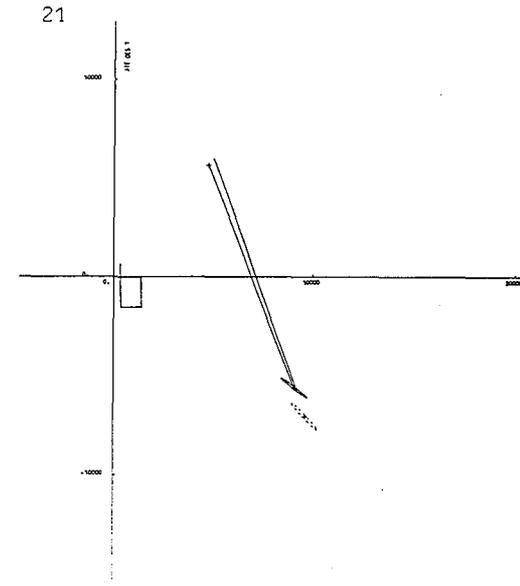
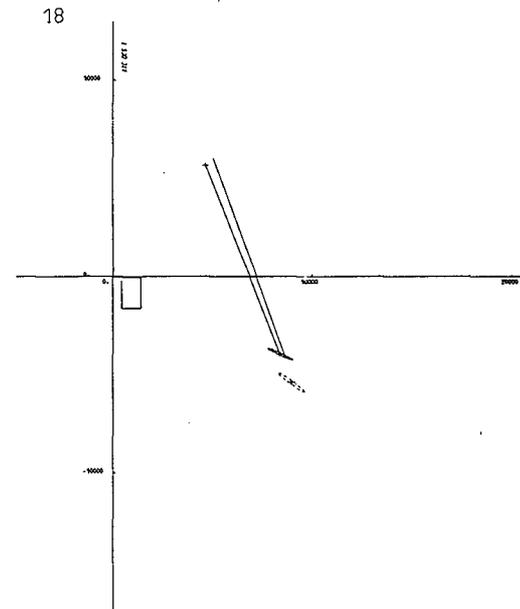
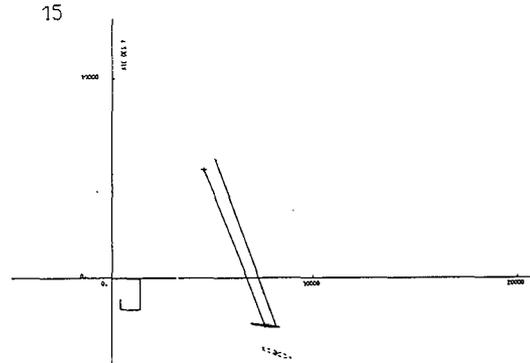
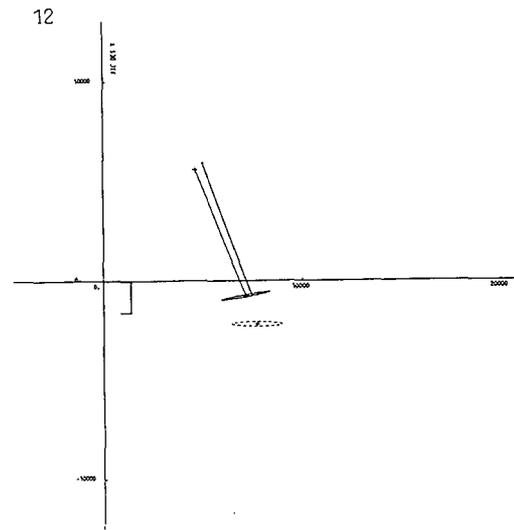
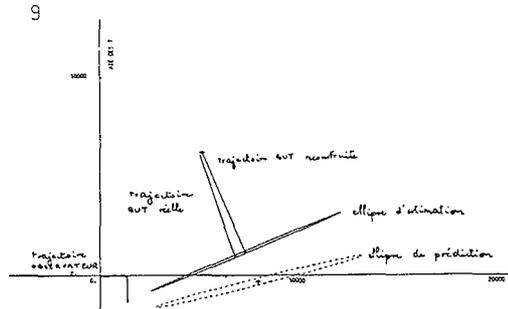
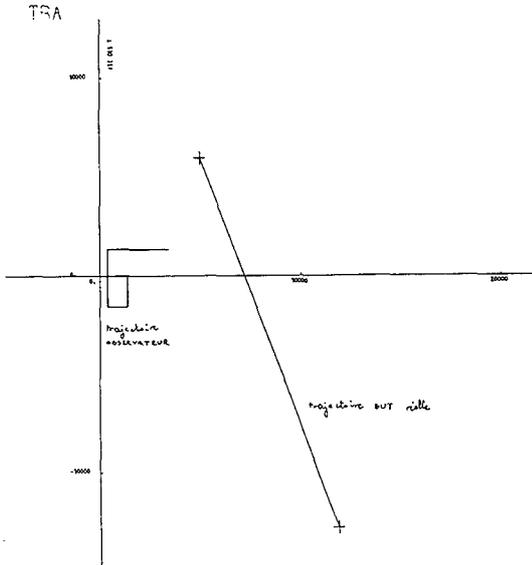
En particulier, on peut introduire facilement des informations complémentaires, soit sous forme de termes additionnels dans le critère, soit sous forme de contraintes.

A son passif, la méthode présente un volume de calcul relativement élevé, mais l'abaissement des coûts et des temps de calculs la rend déjà très envisageable.

UNE APPROCHE TEMPS REEL NON RECURSIVE  
DE L'AZIMETRIE PASSIVE

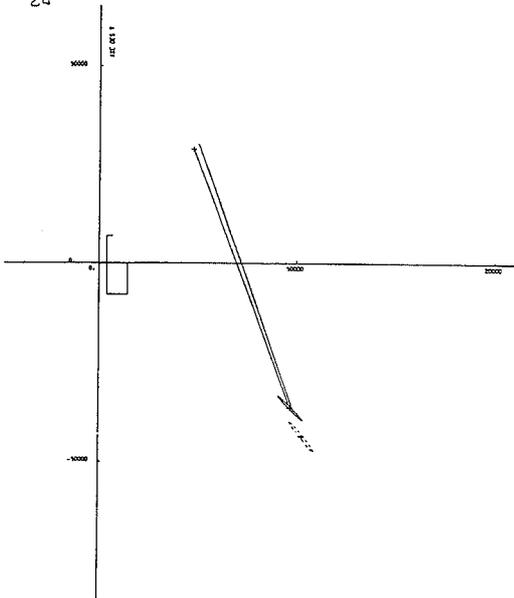
VII - RESULTATS EXPERIMENTAUX

On présente ci-dessous quelques résultats obtenus pour des trajectoires simulées, et visualisées dans un repère absolu.

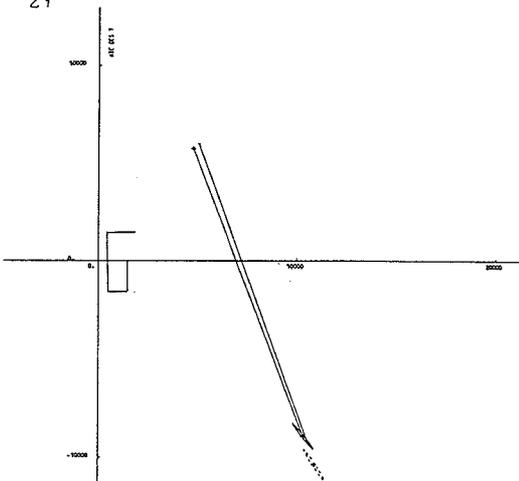




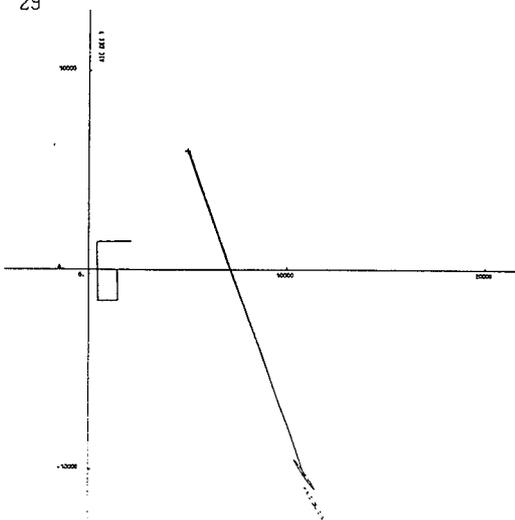
24



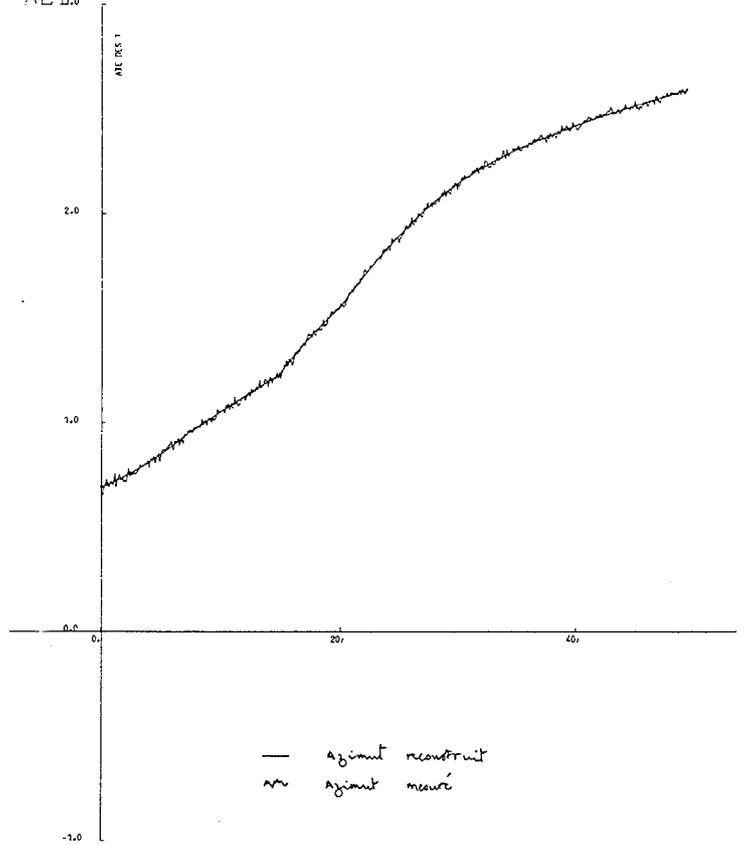
27



29



AZL<sub>0</sub>



BIBLIOGRAPHIE

Pour toutes références, veuillez contacter les auteurs.