DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

DETECTION ET CONTRASTE

B. PICINBONO et P. DUVAUT

L2S* - E.S.E. - Plateau du Moulon, 91190 - Gif sur Yvette, FRANCE.

RESUME

Dans le problème de la détection de deux hypothèses simples le rapport de vraisemblance est un résumé exhaustif et constitue donc le récepteur optimal. Il n'est malheureusement pas toujours réalisable à cause d'un manque de connaissance sur les lois de probabilité ou à cause de sa complexité.

On présente une solution alternative qui est fondée sur la recherche du contraste maximum entre la situation où le bruit seul est présent et celle où il est absent. On passe d'abord en revue les définitions possibles du contraste d'un système de détection. On en étudie ensuite les propriétés en établissant le lien entre contraste infini et détection singulière. On montre que le contraste est invariant dans toute opération affine et par ailleurs qu'il peut s'exprimer simplement sous la forme de rapport de produits scalaires. Ceci permet de résoudre aisément différents problèmes d'optimisation et on montre en particulier que le récepteur du rapport de vraisemblance est aussi celui rendant le contraste maximum, ce qui établit un lien entre deux approches apparemment totalement différentes.

SUMMARY

In the detection problem between two simple hypotheses the likelihood ratio is a sufficient statistic and is the optimal receiver. Unfortunately it is not always possible to implement this receiver either because of our lack of knowledge on the probability distribution or because of the complexity of the resulting receiver.

An alternative solution is presented. It uses the concept of contrast and reduces detection problem to the research of maximum contrast between the two possible situations, signal present or not. Many possible definitions of the contrast are presented and the connection between singular detection and infinite contrast is established. It is shown that the contrast is invariant in affine transformation and also that it can be written on the form of a scalar product. This allows us to solve various optimization problems and in particular to show that without constraint structure the contrast is maximum for the likelihood ratio receiver, which shows a relation between two apparently different approaches of detection problems.

1. INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de détection d'un signal dans un bruit, ou de décision entre deux hypothèses statistiques, le récepteur optimal fondé sur le rapport de vraisemblance ne peut être effectivement réalisé. Ceci est dû parfois à la complexité de ce récepteur et parfois au manque de connaissances précises sur les distributions de probabilité du signal et du bruit rendant impossible le calcul exact du rapport de vraisemblance.

Dans ces cas il peut être possible d'introduire d'autres mesures de qualité ou de performance pour la détection d'un signal et le contraste semble être une solution intéressante. Sous une forme très générale et encore relativement vague, il est clair que tout système de détection tend à rendre maximum le contraste entre la situation où seul le bruit est présent et celle où l'observation contient à la fois le bruit et le signal.

De nombreuses définitions du contraste ont été introduites dans la littérature et on en trouvera en particulier une revue dans l'article de GARDNER [1]. Apparemment il n'y a aucune relation entre la théorie du contraste et l'approche statistique des problèmes de détection et un des buts de cet article consiste à discuter ce point plus en détail.

Après avoir présenté une définition adéquate du contraste nous développons certaines de ses propriétés de base. En particulier nous montrons comment la détection singulière, bien décrite dans le contexte de la théorie statistique, peut être reliée à l'existence d'un contraste infini. De plus nous montrons que le contraste d'un récepteur peut être écrit comme un produit scalaire ce qui permet de résoudre un assez grand nombre de problèmes d'optimisation en utilisant des méthodes géométriques très simples. Enfin nous montrerons dans un article présenté dans les journées sur la quantification comment le contraste apparaît lorsque l'on utilise un récepteur avec un seuil numérisé et qu'il est nécessaire d'introduire les effets de quantification liés à cette numérisation.

2. DEFINITION DU CONTRASTE

Soit $\underline{x}$ le vecteur observation qui est dans toute la suite une vecteur réel de l'espace $\mathbf{R}^n$. Les distributions de probabilité de l'observation sous les deux hypothèses sont $P_0(\underline{x})$ et $P_1(\underline{x})$. Pour réaliser une décision à partir du vecteur $\underline{x}$ nous devons faire sur ce vecteur un traitement qui calcule la fonction $S(\underline{x})$. Dans la littérature une telle fonction est dénommée de plusieurs manières : classification [1], statistique ([2], page 95), filtre [3]. Dans toute la suite nous utiliserons essentiellement ce dernier terme qui est bien adapté à la terminologie des sciences pour l'ingénieur, tout en remarquant que le système associant un scalaire au vecteur d'entrée $\underline{x}$ n'a en général aucune raison d'être linéaire.

Le filtre optimal au sens de la théorie statistique de la détection est évidemment le rapport de vraisemblance qui est une statistique suffisante pour le problème du test entre deux hypothèses (voir [2] page 95).

Le contraste d'un filtre est défini par l'expression suivante

$$C_\pi(S)=C[S;\pi]\triangleq[E_1(S) - E_0(S)]^2/V_\pi(S), \qquad (2\text{-}1)$$

où E_0 et E_1 sont respectivement les valeurs moyennes sous les hypothèses H_0 et H_1 et V_π la variance de $S(\underline{x})$ correspondant à la distribution de probabilité définie par

$$p_\pi(\underline{x})\triangleq (1-\pi)\, p_0(\underline{x}) + \pi\, p_1(\underline{x}). \qquad (2\text{-}2)$$

Cette distribution décrit un mélange des deux densités de probabilité caractérisé par une probabilité de mélange $\pi (0 \leq \pi \leq 1)$.

Le contraste a d'évidentes relations avec certains autres critères de détection déjà introduits dans la littérature. Si $\pi = 0$, le contraste se réduit au critère de déflection classique [4] p.161-163, [5]. Si $\pi = 1/2$, il correspond à une définition du rapport signal sur bruit qui a été introduite par Rudnick [6]. Finalement, si π est la probabilité a priori de l'hypothèse H_1, le contraste se relie aisément au rapport signal sur bruit généralisé introduit par Gardner [1] et défini par

$$C'_\pi \triangleq [E_1(S)-E_0(S)]^2/[\pi V_1(S)+(1-\pi)V_0(S)], \qquad (2\text{-}3)$$

où V_0 et V_1 sont respectivement les variances des hypothèses H_0 et H_1. En effet, après un calcul très simple on obtient

$$C'_\pi = C_\pi/[1-\pi(1-\pi)\, C_\pi]. \qquad (2\text{-}4)$$

Dans la suite de la discussion nous verrons qu'il est plus simple de travailler avec C_π qu'avec C'_π.

Finalement on peut noter que le contraste est directement relié avec le rendement relatif asymptotique (Asymptotic Relative Efficiency) (ARE) souvent utilisé dans la littérature sur la détection [2] p.228, [7], [8]. Pour ceci supposons que l'hypothèse H_1 corresponde à la présence d'un signal déterministe $\alpha\underline{s}$. Dans ce cas la densité de probabilité $p_1(\underline{x})$ devient $p_0(\underline{x}-\alpha\underline{s})$. Si α est petit on peut négliger les termes en α^k lorsque k est supérieur à 1, ce qui permet d'écrire

$$E_1(S) = E_0(S) + \alpha\, E_0(\underline{s}^T\, \underline{\nabla} S). \qquad (2\text{-}5)$$

Dans ce cas le contraste devient

$$C_0(S) = \alpha^2\, \eta \qquad (2\text{-}6)$$

$$\eta \triangleq [E_0(\underline{s}^T\, \underline{\nabla} S)]^2/V_0(S). \qquad (2\text{-}7)$$

Dans le cas d'un signal constant d'amplitude $\underline{s}$ dans un bruit blanc, le filtre $S(\underline{x})$ peut être exprimé sous la forme $\sum g(x_i)$ ce qui donne

$$\eta = [E_o(g')]^2/V_o(g), \tag{2-8}$$

ce qui est l'expression classique du coefficient ARE.

Enfin il intéressant de noter certaines expressions particulières du contraste. Considérons tout d'abord le cas d'un filtre linéaire $S(\underline{x})=\underline{h}^T\underline{x}$. Posant alors

$$\underline{s} \triangleq E_1(\underline{x}) - E_o(\underline{x}) \tag{2-9}$$

$$K_\pi \triangleq E_\pi\{[\underline{x}-E_\pi(\underline{x})]\ [\underline{x}-E_\pi(\underline{x})]^T\}, \tag{2-10}$$

on obtient aisément

$$C_\pi(\underline{h}) = (\underline{h}^T\ \underline{s})^2/\underline{h}^T\ K_\pi\ \underline{h}\ . \tag{2-11}$$

Ce contraste disparaît évidemment si $E_o(\underline{x})=E_1(\underline{x})$. Par ailleurs il est maximum pour le filtre adapté défini par

$$\underline{h}_\pi \triangleq K_\pi^{-1}\ \underline{s}, \tag{2-12}$$

et sa valeur maximum vaut

$$d_\pi^2 = \underline{s}^T\ K_\pi^{-1}\ \underline{s} \tag{2-13}$$

Considérons par ailleurs le cas d'une fonction test $\phi(\underline{x})$. C'est une fonction qui ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1 et ainsi satisfait la relation $\Phi^2 = \Phi$. En conséquence sa variance peut s'écrire

$$V_\pi(\Phi) = E_\pi(\Phi) - E_\pi^2\ (\Phi), \tag{2-14}$$

avec

$$E_\pi(\Phi) = (1-\pi)\ E_o(\Phi) + \pi\ E_1(\Phi). \tag{2-15}$$

Mais $E_o(\Phi)$ et $E_1(\Phi)$ peuvent respectivement être interprétés comme les probabilités de fausses alarmes et de détetion α et β,

$$C_\pi(\Phi)=[\beta-\alpha]^2/\{(1-\pi)\alpha+\pi\beta-[(1-\pi)\alpha+\pi\beta]^2\}. \tag{2-16}$$

Le cas le plus intéressant apparaît pour le critère de déflection (π=o) qui donne

$$C_o(\Phi) = [\beta(\Phi) - \alpha(\Phi)]^2/[\alpha(\Phi) - \alpha^2(\Phi)]. \tag{2-17}$$

Finalement si le récepteur est un récepteur à seuil associé au filtre $S(\underline{x})$, ce qui signifie que $\Phi(\underline{x})$=1 si et seulement si $S(\underline{x}) > t$, la fonction test est alors définie par le seuil t ou par la probabilité de fausse alarme correspondante et l'équation précédente devient alors

$$C_o(\alpha) = [\beta(\alpha) - \alpha]^2/[\alpha-\alpha^2], \tag{2-18}$$

ou $\beta(\alpha)$ est la courbe de caractérisque opérationnelle du récepteur (voir [2] p. 88, p. 107).

3. PROPRIETES DU CONTRASTE

Dans ce paragraphe nous présentons quelques propriétés importantes du contraste qui seront utilisées dans la discussion qui suit.

3.1. Existence du contraste. Détection singulière

D'après (2-1) il est clair que le contraste d'un filtre S est défini si S est une variable aléatoire du second ordre sous les deux hypothèses H_o et H_1 et si la variance V_π n'est pas nulle. Cette variance peut être écrite

$$V_\pi = \pi\ V_1+(1-\pi)\ V_o+\pi(1-\pi)\ (m_1-m_o)^2, \tag{3-1}$$

où V_o, m_o, V_1, m_1 sont respectivement les variances et valeurs moyennes de S sous les hypothèses H_o et H_1. Pour $\pi \neq 0$ et $\pi \neq 1$ cette variance ne peut être égale à 0 que si $V_o = V_1 = 0$ et $m_o = m_1$. Dans ce cas le contraste n'est pas défini comme un rapport de deux termes égaux à 0.

Il est intéressant de discuter le problème de la détection singulière en terme de contraste. Le problème de détection est singulier s'il est possible de trouver une fonction test $\Phi(\underline{x})$ telle que les probabilités de fausse alarme et de détection soient respectivement égales à 0 ou 1. Ceci peut être écrit

$$\alpha \triangleq \int \Phi(\underline{x})\ p_o(\underline{x})\ d\underline{x} = 0 \tag{3-2}$$

$$\beta \triangleq \int \Phi(\underline{x})\ p_1(\underline{x})\ d\underline{x} = 1. \tag{3-3}$$

Nous déduisons alors de (2-16) que $C_\pi=[\pi(1-\pi)]^{-1}$ qui est infini pour $\pi = 0$ et $\pi = 1$. Par ailleurs C'_π défini par (2-3) est infini pour toutes les valeurs de Φ.

Réciproquement s'il existe un filtre $S(\underline{x})$ pour lequel $m_o \neq m_1$, et donnant un contraste infini pour $\pi = 0$ et $\pi = 1$, alors le problème de détection est singulier. En effet, comme le numérateur de (2-3) est $(m_1-m_o)^2$, quantité qui n'est pas nulle, nous déduisons que $V_o = V_1 = 0$, ce qui signifie que $S(\underline{x})$ est presque sûrement égal à m_o ou m_1 respectivement sous H_o et H_1. Si D_o et D_1 sont des sous-ensembles de R^N ou $S(\underline{x})$ est respectivement égale à m_o ou m_1, nous avons donc $D_o \cap D_1 = \emptyset$ et $p_o(\underline{x}) = 0$ si $x \notin D_o$, $p_1(\underline{x}) = 0$ si $\underline{x} \notin D_1$. Ceci donne $p_o(\underline{x})\ p_1(\underline{x}) = 0$, qui est la définition de la détection singulière.

3.2. Invariance du contraste

De (2-1) nous déduisons immédiatement que

$$C_\pi(\lambda\ S + \mu) = C_\pi(S), \quad \lambda \neq 0. \tag{3.4}$$

Ainsi à chaque filtre S nous pouvons associer une classe C_S de filtres équivalents à S et obtenus par l'opération $\lambda S+\mu$, $\lambda \neq 0$.

De même à toute famille de filtres nous pouvons associer son extension $\tilde{F}$ par l'opération $\lambda S+\mu$, $S \in F$, et si $S \in \tilde{F}$, alors $\lambda S+\mu \in \tilde{F}$, $\lambda \neq 0$.

De plus si nous introduisons

$$m_\pi \triangleq E_\pi(S), \tag{3-5}$$

qui est la valeur moyenne de S sous la distribution (2-2), tous les filtres $\lambda \bar{S}$ où

$$\bar{S} \triangleq S - m_\pi \tag{3-6}$$

sont éléments d'une sous-classe $\bar{C}_s$ de C_s qui est la sous-classe des filtres centrés équivalents à S.

Finalement à tout filtre nous pouvons associer un autre filtre, élément de $\bar{C}_s$ et tel que $V_\pi(S)=1$. Ce filtre $\bar{S}_n$ est un filtre centré et normalisé équivalent à S et jouera un rôle important dans la suite.

3.3. Contraste et produit scalaire

Le produit scalaire de deux filtres $u(\underline{x})$ et $v(\underline{x})$ et défini par

$$\langle u,v\rangle_\pi \triangleq E_\pi[u(\underline{x})v(\underline{x})]=\int u(\underline{x})\ v(\underline{x})\ p_\pi(\underline{x})\ d\underline{x}, \tag{3-7}$$

où $p_\pi(\underline{x})$ est donnée par (2-2). Ce produit est bien défini si $u(\underline{x})$ et $v(\underline{x})$ sont des variables aléatoires du second ordre sous la distribution $p_\pi(\underline{x})$.

Avec cette définition nous allons exprimer le contraste comme un rapport de deux produits scalaires, ce qui est très intéressant pour la discussion suivante.

Tout d'abord le dénominateur de (2-1) peut être écrit

$$V_\pi = \langle \bar{S}, \bar{S} \rangle_\pi, \tag{3-8}$$

ou $\bar{S}$ est défini par (3-6).

Considérons maintenant le numérateur N de (2-1) il est donné par

$$N^{1/2} = \int \bar{S}(\underline{x})\ [p_1(\underline{x})-p_o(\underline{x})]\ d\underline{x}, \tag{3-9}$$

et utilisant le filtre $R(\underline{x})$ défini par

$$R(\underline{x}) \triangleq [p_1(\underline{x})-p_o(\underline{x})]\ [\pi p_1(\underline{x}) + (1-\pi)p_o(\underline{x})]^{-1}$$
$$= [L(\underline{x})-1]\ [\pi\ L(\underline{x}) + 1-\pi]^{-1}, \tag{3-10}$$

ou $L(\underline{x})$ est le rapport de vraisemblance, nous obtenons

$$N^{1/2} = \langle \bar{S}, R \rangle_\pi. \tag{3-11}$$

Finalement le contraste de S s'écrit

$$C_\pi(S)=C_\pi(\bar{S})=[\langle\bar{S},R\rangle_\pi]^2/\langle\bar{S},\bar{S}\rangle_\pi. \tag{3-12}$$

Illustrons ceci par quelques exemples. Si $\pi=0$, nous obtenons

$$R(\underline{x}) = L(\underline{x}) - 1 \tag{3-13}$$

et comme

$$\langle \bar{S}, L-1 \rangle_0 = \langle \bar{S}, L \rangle_0, \tag{3-14}$$

nous obtenons

$$C_o(S) = [\langle\bar{S},L\rangle_o]^2/\langle\bar{S},\bar{S}\rangle_0. \tag{3-15}$$

Cette expression représente le contraste dans le critère de déflection exprimé au moyen du rapport de vraisemblance $L(\underline{x})$.

Si $\pi = 1/2$, ce qui est le cas considéré par Rudnick, nous obtenons

$$R(\underline{x}) = 2[L(\underline{x})-1]\ [L(\underline{x})+1]^{-1}. \tag{3-16}$$

3.4. Contraste et espaces de Hilbert de filtres

L'espace de Hilbert de filtres est l'espace H de fonction $u(\underline{x})$ dans lequel le produit scalaire est défini par (3-7). Les éléments de cet espace doivent avoir une norme finie, ce qui signifie que $u(\underline{x})$ est une variable aléatoire du second ordre sous la distribution $p_\pi(\underline{x})$. En particulier la condition qui assure que $R(\underline{x})$ défini par (3-10) est dans cet espace s'écrit

$$\int \{p_1(\underline{x})-p_o(\underline{x})\}^2\ \{p_o(\underline{x})+\pi[p_1(\underline{x})-p_o(\underline{x})]\}^{-1} d\underline{x}<+\infty \tag{3-17}$$

Nous supposons dans toute la suite que cette condition est réalisée. De plus nous pouvons noter que dans le cas du critère de déflection ($\pi = 0$) cette condition signifie que le rapport de vraisemblance à une valeur moyenne finie.

3.5. Sous-espaces des filtres centrés

Ce sous-espace de H dénommé $\bar{H}$ et l'espace des filtres $S(\underline{x})$ tel que $E_\pi(\bar{S})=0$, ce qui peut être écrit sous la forme

$$\langle \bar{S}, 1 \rangle_\pi = 0. \tag{3-18}$$

Ainsi ce sous-espace est orthogonal au filtre donnant une sortie égale à 1 quelque soit l'entrée $\underline{x}$. De plus l'opération décrite par (3-6) est une projection sur $\bar{H}$ et

$$\bar{S} \triangleq S - E_\pi(S) = \mathrm{Proj}[S|\bar{H}]. \tag{3-19}$$

Dans toute la suite nous travaillerons uniquement dans $\bar{H}$.

3.6. Famille de filtres normalisés

C'est la famille de filtre S_n tels que

$<S_n, S_n>_\pi = 1$. Tous les éléments de cette famille appartiennent à la sphère unité de H. De plus à tous filtre $S(\underline{x})$ nous pouvons associer un filtre, élément de cette famille, est défini par

$$S_n(\underline{x}) = < S,S >^{-1/2} \; S(\underline{x}). \tag{3-20}$$

Utilisant ces définitions le constraste $C_\pi(S)$ donné par (2-1) et (3-12) peut être écrit sous la forme

$$C_\pi(S) = R^2 \; C_n(S) \tag{3-21}$$

$$R^2 = < R,R >_\pi \tag{3-22}$$

$$C_n(S) \triangleq < \bar{S}_n, \; R_n >_\pi^2. \tag{3-23}$$

Ainsi le contraste est proportionnel au contraste normalisé $C_n(S)$ défini par (3-23). Dans cette équation $\bar{S}_n(\underline{x})$ est le filtre déduit de $S(\underline{x})$ en utilisant (3-6) et (3-20), ce qui signifie le filtre centré et normalisé équivalent à S. De même R_n est déduit de R défini par (3-10) en appliquant (3-20).

L'équation (3-23) est l'expression la plus compacte du contraste et de plus elle a une interprétation géométrique très simple. En effet comme $\bar{S}_n$ et R_n sont des vecteurs de la sphère unité de H, leur produit scalaire est donné par

$$< \bar{S}_n, R_n > = \cos \alpha(\bar{S}_n, R_n), \tag{3-24}$$

ou $\alpha(\bar{S}_n, R_n)$ est l'angle entre ces deux vecteurs. Cette interprétation géométrique est particulièrement commode pour résoudre certains problèmes d'optimisation.

4. PROBLEMES D'OPTIMISATION

Dans de nombreuses situations il est nécessaire de calculer le récepteur optimal qui est le filtre rendant maximum le contraste. Ce problème d'optimisation peut être posé sans contrainte ou au contraire avec des contraintes particulières. On peut par exemple imposer que le récepteur ait une structure linéaire ou quadratique mais on peut également impóser des contraintes plus complexes.

4.1. Résultat général

Considérons une famille arbitraire F de filtres réguliers. Cette expression signifie que tous les éléments de cette famille ont une norme finie ou que F est un sous-ensemble de H défini en 3.4. Nous associons à F son extension $\tilde{F}$ défini en 3.2. De plus $\tilde{F}_{o,n}$ est le sous-ensemble de $\tilde{F}$ contenant uniquement des filtres centrés et normalisés. En d'autres termes

$$\tilde{F}_{o,n} = \tilde{F} \cap \bar{H} \cap SU \quad , \tag{4-1}$$

ou $\bar{H}$ est défini dans 3.4. et SU est la sphère unité de H.

Il est bon de noter qu'à chaque filtre S de F correspondent deux filtres équivalents $\tilde{F}_{o,n}$ qui sont $\bar{S}_n$ et $-\bar{S}_n$.

Proposition. Supposons que R soit régulier, ce qui est assuré par R(3-17) et considérons une famille F de filtres réguliers. Alors les filtres de F donnant le contraste maximum sont équivalents à l'élément de $\tilde{F}_{o,n}$ dont la distance a R_n et minimum.

Preuve. Comme $\bar{S}_n$ et $-\bar{S}_n$ appartiennent à $\tilde{F}_{o,n}$, nous pouvons considérer seulement les éléments de $\tilde{F}_{o,n}$ pour lesquels $\bar{S}_n$ et R_n sont positifs. De plus le carré de la distance entre $\bar{S}_n$ et R_n vaut

$$d^2 = 2[1 - <\bar{S}_n, R_n>_\pi], \tag{4-2}$$

et le maximum de $C_n(S)$ donné par (3-23) lorsque $<\bar{S}_n, R_n> \geq 0$ est obtenu lorsque d^2 est minimum.

4.2. Interprétation et conséquence directe

a) Importance de l'utilisation de $\tilde{F}_{o,n}$.

Il importe de noter l'importance la famille dans laquelle la distance minimum est cherchée. En général le filtre optimum donnant le contraste maximum n'est pas l'élément de F donnant la distance minimum à R_n. Ceci n'est en général même pas le cas pour $F_{o,n}$. En effet, comme indiqué ci-dessus, à chaque filtre de $F_{o,n}$ correspondent deux filtres équivalents de $\tilde{F}_{o,n}$ et il est parfaitement possible que la distance minimum pour $\tilde{F}_{o,n}$ soit la distance maximum pour $F_{o,n}$.

b) Relation entre le contraste et la théorie statistique de la décision.

Supposons que le filtre $R(\underline{x})$ soit élément de la famille F, ce qui est en particulier le cas lorsqu'il n'y a aucune contraire et signifie que F est l'espace de Hilbert H défini en (3.4.). Dans ce cas il est évident que le filtre optimum de la famille est le filtre $R(\underline{x})$ lui-même. En particulier si nous utilisons le critère de déflection (π=0), $R(\underline{x})$ est donné par (3-13) et comme $L(\underline{x})$ et $L(\underline{x})$-1 sont équivalents en matière de contraste, le filtre optimum est $L(\underline{x})$. Ainsi le filtre qui rend maximum le critère de déflection est le rapport de vraisemblance.

Ce résultat est très intéressant parce qu'il établit une relation entre deux approches apparemment complètement différentes de la décision. Il a été indiqué sous des conditions plus restrictives par Poor [9] et aussi partiellement par Rudnick [6]. Une autre preuve peut être trouvée dans [10].

c) Différences entre les théories du contraste et de la décision statistique.

Cependant il y a une forte différence entre les deux approches. Dans la théorie statistique le rapport de vraisemblance $L(\underline{x})$ est comparé à un seuil afin de pouvoir prendre la décision. Entre d'autres mots tout récepteur utilisant une fonction monotone de $L(\underline{x})$ est équivalent à $L(\underline{x})$, et cette propriété est utilisée dans le cas normal lorsque l'on prend le logarithme du rapport de vraisemblance.

Cette propriété de monotonie n'est plus vraie pour le contraste, parce que celui-ci n'est invariant que dans les transformations étudiées en (3.2.). Ce point a été indiqué dans [3] et [10] et sera discuté ultérieurement.

d) Récepteurs équivalents.

Considérons un filtre $S(\underline{x})$. Tous les filtres de forme $\lambda S(\underline{x}) + \mu$ donnent le même contraste que $S(\underline{x})$ et forment la classe d'équivalence de $S(\underline{x})$ en termes de contraste. Au contraire tous les filtres déduits de $S(\underline{x})$ par une transformation monotone et utilisés avec une règle de décision à seuil donnent les mêmes performances exprimées par exemple sous forme des caractéristiques opérationnelles de réception et sont donc équivalents en terme de propriétés de détection. Il est évident que la classe d'équivalence en terme de contraste est une sous-classe de la classe d'équivalence en terme de détection.

e) Récepteur optimal et contraintes d'espace de Hilbert.

Si la famille F est un sous-espace de Hilbert de H, son extension $\tilde{F}$ est aussi un tel sous-espace et la distance minimum est obtenue simplement par projection ce qui peut s'écrire sous la forme

$$S(\underline{x}) = \mathrm{Proj}[R(\underline{x}) | \tilde{F} \cap \bar{H}] \qquad (4\text{-}3)$$

Il importe de noter l'importance du terme $\tilde{F}$ $\bar{H}$ et il est aisé de vérifier que la projection de $R(\underline{x})$ directement sur l'espace de Hilbert F peut être entièrement différente.

f) Commentaire additionnel

Si la famille F n'a aucune structure géométrique particulière il n'y a pas de méthodes générales pour résoudre le problème d'optimisation et certains exemples de ceci sont discutés par ailleurs.

On peut enfin noter qu'un résultat similaire à celui expliciter par l'équation (4-3) a été indiqué par CZARNECKI [11] [12] sous des conditions plus restrictives. En effet au lieu d'utiliser le contraste lui-même cet auteur s'est contenté d'étudier un récepteur localement optimum pour un signal constant dans du bruit blanc. La mesure de performance est alors l'efficacité donnée par (2-8) et nous avons vu dans la section 2 qu'il s'agit d'un cas particulier du contrast.

5. CONCLUSIONS

De nombreux autres problèmes dépassant le cadre de cette conférence peuvent être traités au moyen du contraste et seront publiés par ailleurs. Dans un autre exposé paraissant dans le cadre du Séminaire de Quantification sont abordées les relations entre la détection numérique et le contraste.

Par ailleurs le contraste pouvant s'écrire sous forme de distance dans un espace approprié se prête très bien à des calculs d'optimisation sous contrainte. En particulier si on impose une structure de récepteur du type linéaire ou quadratique on peut trouver quel est le récepteur qui est finalement la meilleure approximation du récepteur optimal construisant le rapport de vraisemblance.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été en partiellement soutenu par la Direction Technique des Constructions Navales sous le contrat N° 844 882 606 100 en liaison avec le GERDSM (Groupe d'Etudes et de Détection Sous-Marine) du Brusc.

* L2S : Laboratoire des Signaux et Systèmes, Centre de Recherche du CNRS et de l'Ecole Supérieure d'Electricité, associé à l'Université de Paris-Sud.

REFERENCES

[1] W.A. GARDNER, "A unifying view of second-order measures of quality for signal classification", IEEE Trans. Comm. COM-28, pp.807-816, June 1980.

[2] C.W. HELSTROM, Statistical theory of signal detection, Oxford, Pergamon, 1968.

[3] B. PICINBONO, "Detection with uncertainty", to be published.

[4] J.L. LAWSON and G.E. UHLENBECK, Threshold signals, New-York, Mc. Graw Hill, 1950.

[5] C.R. BAKER, "Optimum quadratic detection of a random vector in Gaussian noise", IEEE Trans. Comm., COM-14, pp.802-805, Dec. 1966.

[6] P. RUDNICK, "A signal to noise property of binary decision", Nature, Vol. 193, pp.604-605, Feb. 1962.

[7] J. CAPON, "On the asymptotic efficiency of locally optimum detectors", IRE Trans. Inf. Theory, IT7, pp.67-71, April 1961.

[8] E.J.C. PITMAN, Some basic theory of statistical inference, London, Chapman and Hall, 1979.

[9] H.V. POOR, "Robust decision design using a distance criterion", IEEE Trans. Inf. Theor. IT 26, pp.575-587, Sept. 1980.

[10] B. PICINBONO and P. DUVAUT, "Nouvelle approche de la détection par seuil", 9ème Colloque GRETSI, Nice, 1983, pp.87-91.

[11] S.V. CZARNECKI and K.S. VASTOLA, "Approximation of locally optimum detectors non linearities", 1983 Conference on information sciences and systems, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, March 1983.

[12] S.V. CZARNECKI and J. THOMAS, "Nearly optimal detection of signals in non-Gaussian noise", Rep. N° 14, Information Science and System Laboratory, Princeton Universiaty, Feb. 1984.