



SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

ANALYSE DES EFFETS DE BORD DANS L'INVERSION
D'UNE MATRICE DE TOEPLITZ SYMETRIQUE *

Geneviève SELLA

Société d'Etudes et Conseils AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

Une matrice Γ_N de TOEPLITZ réelle, symétrique, définie positive peut être considérée comme la matrice d'autocorrélation d'un signal aléatoire H stationnaire.

Nous étudions la structure de l'inverse Γ^{-1} d'une telle matrice en utilisant cette propriété.

Nous calculons l'expression de Γ^{-1} en fonction des coefficients autorégressifs associés au signal H .

Quand la dimension N est finie mais suffisante, l'inverse Γ_N^{-1} garde une structure de TOEPLITZ en son centre mais présente des distorsions dans les coins (effets de bord).

La matrice Γ_N^{-1} est utilisée dans le calcul du rapport de vraisemblance $S^T \Gamma^{-1} X$ dans le problème de détection d'un signal connu S dans un bruit coloré de matrice d'autocorrélation Γ (X étant l'observation).

Nous comparons la matrice Γ^{-1} au produit $A^T A$ où A est la matrice d'un filtre linéaire blanchissant. Cette comparaison permet de faire le rapprochement entre la méthode du rapport de vraisemblance et la méthode classique qui consiste à calculer la corrélation $S^T A^T A X$ entre l'observation blanchie $A X$ et le signal S passé dans le filtre blanchissant $A S$.

Nous montrons comment les effets de bord de Γ^{-1} interviennent quand il s'agit de détecter la présence de S dans l'observation, sans retard et même avant la fin du signal.

SUMMARY

A real, symmetric, positive definite TOEPLITZ matrix Γ_N can be considered as the autocorrelation matrix of a stationary process H .

We study the structure of the inverse Γ^{-1} of such a matrix using this property.

We calculate the expression of Γ^{-1} in terms of autoregressive coefficients associated to H .

When the dimension is finite but sufficient the inverse Γ_N^{-1} keeps a TOEPLITZ structure in its center but has distortions in its corners.

This matrix Γ_N^{-1} is used to calculate the likelihood ratio $S^T \Gamma^{-1} X$ in the problem of detecting a known signal S in a colored noise with correlation matrix Γ (X is the observation).

We compare the matrix Γ^{-1} with the product $A^T A$ where A is the matrix of a whitening linear filter. This comparison allow us the make a parallel between the maximum likelihood method and the classical method consisting in calculating the correlation $S^T A^T A X$ between the whitened observation and the signal S filtered through A $A S$.

We show how the distortions in the corners of the matrix Γ^{-1} intervene when detecting the presence of S in the observation without delay and even before the end of the signal.

* Travaux effectués sous contrat GESMA
n° A 8244 545



1.- INTRODUCTION

Une matrice de TOEPLITZ Γ_N possède par définition des éléments $\Gamma(i, j) = \Gamma(i - j)$ qui ne dépendent que de $i - j$. Si cette matrice possède en plus la propriété de symétrie on a :

$$\Gamma(i, j) = \Gamma(|i - j|) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$$

Les propriétés de telles matrices ont été étudiées et de nombreuses méthodes d'inversion de ces matrices ont été proposées dans la littérature [1], [2], [3].

Notre but n'est pas de présenter un nouvel algorithme mais d'étudier la structure de l'inverse.

Nous nous plaçons dans le cas où les éléments de Γ sont réels. La matrice Γ_N peut alors être considérée comme la matrice d'autocorrélation d'un signal aléatoire $H(i)$.

$$\underline{H}^T = (H(1) \dots H(N)) \quad \Gamma_N = E \{ \underline{H} \underline{H}^T \}$$

Dans un premier temps, nous étudierons la structure de l'inverse Γ_N^{-1} .

Nous calculerons Γ_N^{-1} en fonction des coefficients $\{a_i\}$ de prédiction linéaire associés au signal H .

Nous comparerons cette structure avec le produit $A^T A$ où A est la matrice du filtre linéaire construit à partir des coefficients $\{a_i\}$.

Nous utiliserons ensuite ces résultats pour le calcul de $S^T \Gamma_N^{-1} X$ rapport de vraisemblance dans le cas de la détection d'un signal connu dans un bruit coloré. Ce problème est développé par Yvon LABASQUE dans sa communication [4].

La décomposition $A^T A$ nous permettra de comparer ce rapport de vraisemblance avec le filtrage adapté utilisé pour des signaux continus.

2.- STRUCTURE DE L'INVERSE Γ_N^{-1}

La structure de l'inverse d'une matrice d'autocorrélation a été analysée par C. MACCHI [5]. Rappelons quelques résultats :

Si la dimension était infinie, l'inverse aurait également une structure de TOEPLITZ. Les coefficients $\Gamma'(i - j)$ de cette matrice ont une interprétation en termes d'analyse du signal. Ce sont les coefficients de FOURIER de l'inverse du spectre du signal échantillonné :

Soit $\{\Gamma(0) \dots \Gamma(N)\}$ les échantillons de la fonction d'autocorrélation $\Gamma_c(f)$ échantillonnée avec un pas Δ $\Gamma(i) = \Gamma_c(i\Delta)$. Le spectre du signal échantillonné $H(i) = H_c(i\Delta)$ est donné par :

$$G_\Delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma(n\Delta) e^{-2\pi i f n \Delta}$$

(Les Γ sont les coefficients de FOURIER du spectre replié).

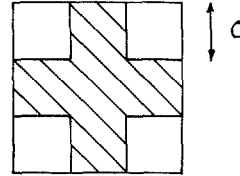
On peut montrer que les Γ' vérifient :

$$\frac{1}{G_\Delta(f)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma'(n\Delta) e^{-2\pi i n f \Delta}$$

$$\text{ou } \Gamma'(n\Delta) = \Delta \int_{-\frac{1}{2}\Delta}^{\frac{1}{2}\Delta} \frac{1}{G_\Delta(f)} e^{+2\pi i f n \Delta} df$$

Les Γ' sont les coefficients d'autocorrélation d'un bruit dont le spectre est l'inverse du spectre $G_\Delta(f)$.

Quand la dimension de la matrice est finie mais suffisante, la matrice inverse garde au centre une structure de TOEPLITZ, dont les coefficients sont les Γ' , mais des distorsions apparaissent dans les coins (effets de bord). C'est cependant une matrice symétrique et persymétrique.



C. MACCHI montre que les effets de bord sont de dimension $c = \min(N_r, N_r')$.

N_r longueur de la suite Γ ,
 N_r' longueur de la suite Γ' ,

(on suppose qu'une de ces deux suites tend vers zéro au bout d'un certain ordre).

3.- CALCUL DE Γ^{-1} EN FONCTION DES COEFFICIENTS DE PREDICTION LINEAIRE

Intéressons-nous à l'expression de l'inverse d'une matrice de TOEPLITZ symétrique en fonction des coefficients de prédiction linéaire ou coefficients autorégressifs.

Γ_N est considérée comme la matrice de corrélation d'un signal aléatoire $H(i)$.

Les coefficients de prédiction linéaire associés à H sont définis comme étant les coefficients permettant de calculer une estimation $\hat{H}(q)$ à partir des échantillons précédents $\{H(i) \quad i \leq q-1\}$
 $\hat{H}(q) = \sum_{i=1}^{q-1} a_i H(q-i)$ de façon que l'erreur de prédiction $u(q) = H(q) - \hat{H}(q)$ soit à variance minimale $E\{u^2(q)\} = \sigma_{\min}^2$.

On a alors $u(q) = H(q) - \hat{H}(q)$ on peut montrer que $u(q)$ est un bruit blanc.

Dans la pratique, pour de nombreux signaux, il est possible de considérer une somme finie de p termes. Il existe différents critères pour déterminer p (AKAIKE, PARZEN) [2], [3].

Les coefficients $\{a_i\}$ correspondent à une modélisation autorégressive du bruit.

On peut également interpréter les a_i comme étant les coefficients d'un filtre linéaire blanchissant et on peut montrer qu'il s'agit d'un filtre blanchissant à déphasage minimum.

Différents algorithmes permettent de calculer ces coefficients (LEVINSON, BURG, maximum de vraisemblance, moindres carrés). Les performances de ces algorithmes ont été largement étudiées dans la littérature [2], [3].



ANALYSE DES EFFETS DE BORD DANS L'INVERSION
D'UNE MATRICE DE TOEPLITZ SYMETRIQUE

Les coefficients $\{a_i\}$ $1 \leq i \leq N$ sont liés à la matrice Γ_N par les équations de Yule WALKER :

$$\begin{pmatrix} \Gamma(0) & \dots & \Gamma(N-1) \\ & \ddots & \\ \Gamma(N-1) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{min}^2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Système de N équations à N inconnues.

Les coefficients $\{a_i\}$ contiennent la même information que $\Gamma(0) \dots \Gamma(N-1)$. La description du signal par un modèle AR résume les propriétés au second ordre du signal.

On peut montrer que la matrice Γ_N^{-1} s'exprime en fonction des coefficients AR Γ^{-1} :

$$\Gamma_N^{-1} = \frac{A_0^T A_0 - A_1^T A_1}{\sigma^2} = \frac{A_0 A_0^T - A_1 A_1^T}{\sigma^2}$$

où :

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ & a_p & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_p & \\ & & & & a_0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_p & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_p & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_p \end{pmatrix}$$

Rappelons quelques éléments de la démonstration : H est supposé être un bruit gaussien.

Soit Y le vecteur de dimension $2(N) = (H_1) \dots (H(N) \dots H(2(N)))$ que l'on peut décomposer en deux vecteurs Y_0 et Y_1 de dimension N .

La densité composée $p(Y_0, Y_1)$ peut alors s'évaluer de deux façons :

$$p(Y_0, Y_1) = p(Y_0) p(Y_1 / Y_0) = p(Y_1) p(Y_0 / Y_1)$$

Calculons chaque expression :

$$p(Y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma} 2\pi^N} \exp -\frac{1}{2} (Y_1^T \Gamma_N^{-1} Y_1)$$

(de même pour Y_0)

$p(Y_1 / Y_0)$ peut s'exprimer en utilisant le modèle de prédiction. Une estimation de Y_1 peut être calculée en fonction de Y_0 :

$$H(N+2) = -a_1 H(N+1) - \sum_{i=2}^p a_i H(N+2-i) + u(N+2)$$

de proche en proche on peut exprimer toutes les composantes de Y_1 :

$$y(n+i) = f_i(Y_0) + w_i$$

avec :

$$w_i = \sum_{j=0}^i L(i, j) u(N+1+j)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1.

$$Y_0 \text{ étant connu } p(Y_1 / Y_0) = p \begin{pmatrix} w_{N+2} \\ \vdots \\ w_{2N+2} \end{pmatrix}$$

La loi multidimensionnelle des w s'exprime en fonction de la loi de u .

On en déduit :

$$p(Y_1 / Y_0) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{t=N+1}^{2(N+1)} u_t^2 \right\}$$

de même :

$$p(Y_0 / Y_1) = \frac{1}{2\pi^N \sqrt{\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{t=1}^{N+1} u_t^2 \right\}$$

Pour calculer Y_0 en fonction de Y_1 , on utilise le modèle de prédiction sur les $y(i)$ classés dans l'ordre des temps décroissants.

Les termes $\sum_{t=1}^{N+1} u_t^2$ et $\sum_{t=N+1}^{2(N+1)} u_t^2$ peuvent s'exprimer sous forme matricielle à l'aide de la matrice B .

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_p & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & a_0 & & & \\ & & & a_p & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{matrix} N$$

$$\sum_{t=N+1}^{2(N+1)} u_t^2 = Y^T J B B^T J Y \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{t=1}^{(N+1)} u_t^2 = Y^T B B^T Y$$

En reprenant l'expression de $p(Y_0, Y_1)$ on en déduit :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_N^{-1} & 0 \\ 0 & -\Gamma_N^{-1} \end{bmatrix} = \frac{B B^T - J B B^T J}{\sigma^2} = \begin{bmatrix} A_0^T A_0 - A_1^T A_1 & 0 \\ 0 & A_1^T A_1 - A_0^T A_0 \end{bmatrix}$$

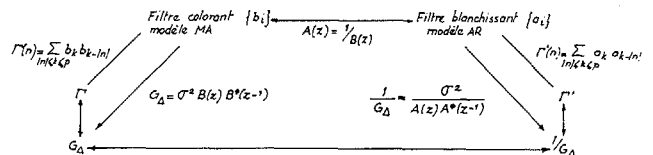
Cette expression nous donne la structure suivante pour la matrice Γ_N^{-1} :

$$\Gamma_N^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a_p & & \\ & \ddots & \\ & & a_p \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(n) = \sum_{|n| \leq k < \varphi} a_k a_{k-n}$$

On retrouve une structure de TOEPLITZ au centre et des effets de bord. Les propriétés de symétrie et persymétrie sont vérifiées. On retrouve au centre la relation entre la suite Γ^n et les coefficients AR.

Nous rappelons ci-dessous les liens entre les différentes grandeurs



$A(z)$ et $B(z)$ désignent les fonctions de transfert en z des filtres :

$$A(z) = \sum a_i z^{-i} \quad z = e^{i 2\pi f \Delta}$$

$$B(z) = \sum b_i z^{-i}$$



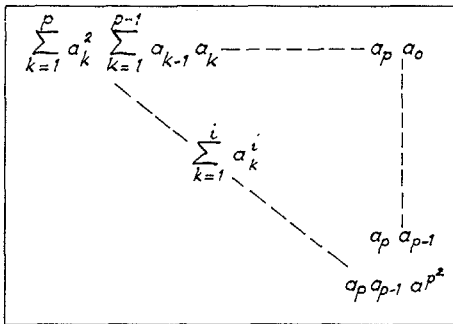
Les effets de bord sont de dimension p . Ce résultat est cohérent avec celui du paragraphe 2 car les deux suites $\{a_i\}$ et $\{\Gamma^{-1}(i)\}$ sont de même taille si elles sont finies.

Détaillons la structure des effets de bord. Considérons par exemple le coin inférieur droit.

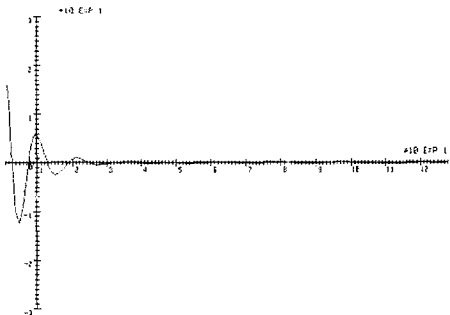
Le terme (i, j) de ce coin est :

$$\sum_{\rho} a_{p-j-\rho} a_{p-i-\rho} ; 1 \leq \rho \leq \inf(p-j, p-i)$$

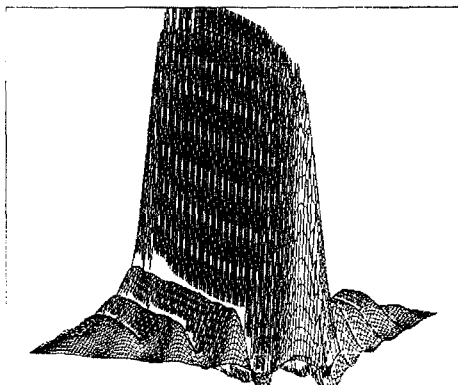
Le tableau suivant donne l'allure de l'effet de bord :



Sur la figure suivante nous montrons la structure de la matrice Γ^{-1} pour $N = 100$. Le signal étudié est un bruit de houle correspondant au spectre de BRETSCHNEIDER dont nous donnons également la fonction d'autocorrélation.



Autocorrélation



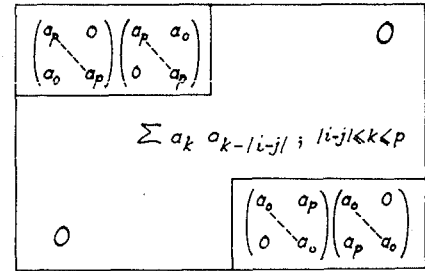
Γ^{-1} pour $N=100$ et $\Delta t = 1.6$

4.- CALCUL DE $A^T A$

Soit A la matrice du filtre linéaire blanchissant construit à partir des a_i :

$$A = \begin{pmatrix} a_p & \dots & a_0 & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & a_p & & \\ & & & & & a_0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad N$$

On peut comparer le produit $A^T A$ avec la matrice Γ^{-1} . La structure de $A^T A$ est la suivante :



On retrouve les éléments de Γ^{-1} partout sauf dans le coin supérieur gauche.

La matrice n'est plus persymétrique.

L'approche par filtre linéaire introduit une orientation du temps qui n'existe pas dans la matrice de corrélation.

Ecrire les lignes de A dans le sens $a_p \dots a_0$ suppose une orientation de l'entrée du filtre $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_N^{(N)} \end{pmatrix}$ temps croissant.

Si on avait choisi l'autre orientation, les lignes de A seraient $a_0 \dots a_p$ et il y aurait inversion des effets de bord de la matrice $A^T A$.

Les deux matrices Γ^{-1} et $A^T A$ seraient identiques si les coefficients du filtre étaient symétriques $a_0 = a_p$ $a_1 = a_{p-1}$.

La matrice Γ_N est associée à un vecteur de échantillons du bruit

La matrice A associée au même vecteur est de dimension

On remarque qu'en complétant la matrice A par un triangle dans le coin inférieur droit nous obtenons une matrice A' telle que $A'^T A'$ reste de TOEPLITZ dans le coin inférieur droit.

$$A' = \begin{pmatrix} a_p & \dots & a_0 & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & a_p & & \\ & & & & & a_0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_p & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & a_p & & \\ & & & & & a_0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'^T A' = A^T A + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & a_p & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_1 & \\ & & & & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & a_p & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_1 & \\ & & & & a_p \end{pmatrix}$$



Il n'est plus possible de décomposer ce filtre en filtre inverseur suivi d'une corrélation mais on peut mettre $h_{\theta}(\tau)$ sous la forme :

$$\int_0^{\theta} \Gamma^{-1}(\tau, \tau_0) \delta_{\theta}(\theta - \tau_0) d\tau_0$$

où

$$\Gamma^{-1}(\tau, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} a(\tau - \tau') a(\tau_0 - \tau') d\tau'$$

Ces $\Gamma^{-1}(\tau, \tau_0)$ correspondent aux $\Gamma^{-1}(i, j)$ du coin inférieur droit de Γ^{-1} .

5.- CONCLUSION

Nous avons étudié la structure de l'inverse d'une matrice de corrélation. C'est une matrice de TOEPLITZ en son centre mais on observe des effets de bord. Nous avons analysé ces effets de bord et nous avons vu comment ils intervenaient dans le calcul du rapport de vraisemblance $S^T \Gamma^{-1} X$, dans le problème de détection d'un signal connu dans un bruit coloré. Nous avons vu comment l'analyse des effets de bord permettent de mieux comprendre l'influence de la contrainte d'une détection sans retard.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] GUEGUEN (C). Cours sur l'approche "systématique" au traitement du signal. (Ecole du Trégor, 1977).
- [2] HAYKIN (S), al. Non linear methods of spectral analysis. Springer Verlag Topics in Applied physics, vol. 34, 1973.
- [3] KAY (S.M), MARPLE (S.L). Spectrum analysis. A modern perspective. Proceeding of IEEE, vol. 69, n° 11, novembre 1981.
- [4] LABASQUE (Y). Détection sans retard d'un signal transitoire dans un bruit de spectre connu. 10ème colloque GRETSI, 20-24 mai 1985.
- [5] MACCHI (C). Interaction stochastique et traitements numériques adaptifs. Thèse d'état, 1972.

Nous tenons à remercier Monsieur LAVAL de la Société AERO pour ses conseils qui nous ont permis d'obtenir ces résultats.