DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

SUR L'OPERATEUR COVARIANCE D'UNE CLASSE GENERALE DE PROCESSUS NON STATIONNAIRES

Georges TZIRITAS

CEPHAG-ENSIEG (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques) - Laboratoire associé au CNRS
Domaine Universitaire bp 46 - 38402 St-Martin-d'Hères (FRANCE)

RESUME

La détermination de la distribution de probabilité d'une forme quadratique définie positive d'un processus gaussien nécessite l'évaluation des traces des puissances d'un opérateur défini positif, symétrique et nucléaire, c'est-à-dire d'un opérateur covariance (Hilbert-Schmidt). Dans cet article nous nous intéressons à une classe générale de covariance des processus non stationnaire. Nous mettons en évidence la structure de cet opérateur covariance qui concerne particulièrement la fonction de covariance d'un processus aléatoire à la sortie d'un filtre linéaire aléatoire, quand l'entrée est un signal certain connu. Nous donnons l'expression générale des traces des puissances d'un opérateur covariance de cette forme et nous illustrons le résultat sur certains exemples, en particulier pour des voies de transmission aléatoires et dispersives en retard et/ou en fréquence.

SUMMARY

The determination of the probability distribution of a positive definite quadratic form of a gaussian process necessitate the evaluation of the traces of powers of a definite, symmetric and nuclear operator, i.e. a covariance operator (Hilbert Schmidt). In this article we are interested in a general class of covariances of non stationary process.
We show the structure of this covariance operator, which concern particularly the covariance functions of a random process at the output of linear random filter, when the imput is a know deterministic signal. We give the general expression of the traces of powers of a covariance operator of this form and we illustrate the result in some examples, in particular for random delay and/or doppler spread channels

SUR L'OPERATEUR COVARIANCE D'UNE CLASSE GENERALE DE PROCESSUS NON STATIONNAIRES

1 - INTRODUCTION

La statistique exhaustive pour toute décision ou estimation concernant la covariance d'un processus gaussien est une forme quadratique de l'observation. Traitement quadratique et covariance d'un processus gaussien sont par conséquent deux notions fortement liées. La qualité du traitement par rapport aux critères utilisés peut-être déterminée de manière globale à l'aide des propriétés probabilistes des formes quadratiques. L'obtention de la loi de probabilité d'une forme quadratique d'un processus gaussien s'avère très souvent un problème plutôt difficile. Dans la littérature différentes approches sont proposées. La présentation de différentes méthodes dépasse largement l'objectif de notre article. Le lecteur interessé pourrait consulter les références [1,2]. Nous nous contentons ici de commenter de manière générale la philosophie qui régit les différentes approches. On peut distinguer deux grandes classes de méthodologie. L'une se limite à l'aspect calculatoire de la détermination de la loi de probabilité : sachant la fonction caractéristique d'une forme quadratique à l'aide des valeurs propres d'un opérateur symétrique (= produit de la covariance par le noyau de la forme quadratique) on inverse cette fonction caractéristique pour obtenir la densité de probabilité. Cette méthode présente un double inconvénient : d'une part déterminer les valeurs propres et inverser la fonction caractéristique sont des problèmes difficiles, d'autre part la structure de l'opérateur associé à la forme quadratique est diluée dans la décomposition en valeurs propres. L'autre méthodologie fournit de façon indirecte la densité de probabilité à l'aide des polynômes ou des fonctions orthonormales. Sans que ceci soit gênant, les paramètres qui entrent en jeu sont les traces des puissances de l'opérateur associé à la forme quadratique. Là encore l'avantage est double : le calcul est toujours plus facile que la détermination des valeurs propres et les aspects structurels de la forme quadratique sont mis en évidence. Nous nous proposons de s'intéresser dans cet article à la determination des traces de certains opérateurs covariance à une puissance donnée. On pourrait dire que la covariance considérée résulte de la transmission d'un signal connu à travers une voie aléatoire gaussienne. Dans la section 2 nous allons mettre plus en évidence la structure d'une telle covariance. Ci-après nous tacherons de montrer de quelle manière on utilise ces méthodes en détection ou en estimation. Soit K l'opérateur covariance d'un processus noyé dans un bruit blanc. On sait que, sous l'hypothèse de présence du processus, l'opérateur associé à la forme quadratique, qui constitue la statistique exhaustive, est égal à l'opérateur covariance K. La densité de probabilité de la forme quadratique sous l'hypothèse de présence nécessite alors la détermination des traces de puissances de la covariance K. Quant à la probabilité de fausse alarme elle s'exprime à l'aide de cette même densité de probabilité [2]. Considérons aussi le cas où le processus est stationnaire et considérons l'estimateur banal de la puissance moyenne. L'opérateur associé à la forme quadratique est la covariance du processus. Mais soulignons que la classe des covariances qu'on considère dans la suite est presque toujours non stationnaire. Nous les discuterons dans la section 2 et nous donnerons les résultats importants de cette contribution dans la section 3.

2 - CLASSE DE PROCESSUS

Dans ce qui suit nous utiliserons un outil mathématique plus abstrait que ce qu'on retient habituellement mais nous pensons plus fécond pour l'objectif cherché, car plus axé vers l'aspect structurel et algébrique. Nous considérons que la réalisation d'un processus aléatoire appartient à un espace de Hilbert séparable H. L'espace est probabilisé [3], fait exprimé par le triplet $(H, \mathcal{B}, \nu)$, $\mathcal{B}$ étant une tribu des boréliens de H et ν une mesure de probabilité. Si le vecteur $\underline{x}$ signifie une réalisation d'un processus aléatoire centré, on définit l'opérateur covariance par la relation

$$\langle K\underline{u},\underline{v}\rangle = \int_H \langle \underline{x},\underline{u}\rangle^* \langle \underline{x},\underline{v}\rangle d\nu(\underline{x})$$

$\langle .,.\rangle$ étant le produit scalaire dans H. Cette définition est valable tant pour un processus réel que pour un processus complexe circulaire. La relation ci-dessus montre implicitement que toute représentation linéaire des processus conduit à une représentation bilinéaire de la covariance et vice-versa.

Dans la suite nous nous interessons uniquement à une classe de processus, en général non stationnaires. A l'origine ce sont des processus qui resultent d'un filtrage linéaire aléatoire d'un signal certain [4]. Nous allons reformuler et étendre cette classe des processus.

Soit $(T_\xi, \xi \in \Xi)$ une famille d'opérateurs linéaires unitaires dans H. A l'élément $\underline{f}$ de H on associe un opérteur linéaire K par la relation

$$K\underline{g} = \int_\Xi T_\xi \underline{f} \langle \underline{g}, T_\xi \underline{f}\rangle \mu(d\xi), \forall \underline{g} \in H \tag{1}$$

$(\Xi, \sigma(\Xi), \mu)$ étant un espace mesuré et normalisé par

$$\int_\Xi \mu(d\xi) = 1$$

On peut prouver que l'opérateur K est Hilbert-Schmidt et donc un opérateur covariance. Pour montrer le lien et la généralisation par rapport aux filtres linéaires aléatoires nous présentons ci-dessous trois exemples :

Exemple 2.1 : Considérons la famille d'opérateur retard sur des signaux f(t)

$$T_\xi : f(t) \longrightarrow f(t-\xi), \forall t$$

T_ξ est un opérateur unitaire $(\forall \xi)$. La covariance qui correspond à cet opérateur par l'intermédiaire de la relation (1) est la suivante

$$K(t,s) = \int f(t-\xi) f^*(s-\xi) \mu(d\xi)$$

Cette covariance résulte à la sortie d'un filtre linéaire aléatoire homogène, dont la fonction de diffusion en retard est $\mu(d\xi)/d\xi$, quand l'entrée du filtre est le signal f(t).

Exemple 2.2. L'opérateur considéré est la translation fréquentielle

$$T_\nu \;:\; f(t) \longrightarrow f(t)e^{j2\pi\nu t}, \quad \forall t$$

On obtient la covariance suivante

$$K(t,s) = f(t)\, f^*(s)\, \varphi(t-s)$$

φ (.) étant la fonction caractéristique de μ, c'est à dire

$$\varphi(\tau) = \int_{\mathcal{F}} e^{j2\pi\nu\tau}\,\mu(d\nu)$$

Cette covariance résulte d'une modulation d'amplitude aléatoire du signal f(t) par un processus stationnaire dont la covariance est $\varphi(t-s)$, $\mu(d\nu)/d\nu$ étant la fonction de diffusion en fréquence du filtre aléatoire.

Exemple 2.3. Considérons maintenant l'opérateur compression en temps

$$T_\lambda \;:\; f(t) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, f\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda > 0, \quad \forall t$$

La covariance résultant est donnée par

$$K(t,s) = \int_{\mathcal{F}} \frac{1}{\lambda}\, f\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) f^*\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) \mu(d\lambda)$$

Ceci correspond au filtrage linéaire suivant

$$Y(t) = \int_{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, f\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) dX(\lambda)$$

avec $E\left\{dX(\lambda)\,dX^*(\lambda')\right\} = \delta(\lambda-\lambda')\,\mu(d\lambda)$

Nous considérons maintenant une généralisation de la covariance (1) à l'aide de deux opérateurs unitaires commutables.

$$K\underline{g} = \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{N}} T_\xi S_\nu \underline{f} \left\langle \underline{g}, T_\xi S_\nu \underline{f} \right\rangle \mu(d\xi\, d\nu), \quad \forall \underline{g} \in H \qquad (2)$$

$(\mathcal{F}\times\mathcal{N}, \sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{N}), \mu)$ étant un espace mesuré et normalisé $\int_{\mathcal{F}\times\mathcal{N}} \mu(d\xi\, d\nu) = 1$.

L'exemple qui suit montre le domaine d'applications possibles de cette covariance.

Exemple 2.4. Soient T_ξ et S_ν les opérateurs de l'exemple 2.1 et 2.2 respectivement. Alors la covariance de la relation (2) s'exprime de la façon suivante

$$K(t,s) = \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{N}} f(t-\xi)\, f^*(s-\xi)\, e^{j2\pi\nu(t-s)}\,\mu(d\xi . d\nu)$$

Ceci correspond au processus à la sortie d'un filtre linéaire aléatoire dont la fonction de diffusion est $\mu(d\xi\, d\nu)/d\xi\, d\nu$, quand le signal d'entrée est f(t).

Dans la section qui suit nous allons prouver deux théorèmes concernant les traces d'une puissance donnée de l'opérateur covariance K donné dans (1) et (2).

3 - TRACES DES PUISSANCES DE L'OPERATEUR COVARIANCE

Lemme 3.1. Soit K un opérateur covariance dans un espace de Hilbert H défini par

$$K\underline{g} = \int_{\mathcal{F}} T_\xi \underline{f} \left\langle \underline{g}, T_\xi \underline{f} \right\rangle \mu(d\xi), \quad \forall \underline{g} \in H$$

T_ξ étant une famille d'opérateur linéaires unitaires $(\xi \in \mathcal{F})$. Alors l'opérateur K^n est donné par

$$K^n\underline{g} = \int_{\mathcal{F}^n} T_{\xi_1} \underline{f} \left\langle \underline{g}, T_{\xi_n} \underline{f} \right\rangle \rho_f(\xi_{n-1}, \xi_n) \cdots \rho_f(\xi_1, \xi_2) \prod_{i=1}^{n} (d\xi_i) \qquad \forall \underline{g} \subset H \quad (3)$$

où $\rho_f(\xi, \zeta) = \left\langle T_\zeta \underline{f}, T_\xi \underline{f} \right\rangle$ est l'"autocorrélation" du vecteur $\underline{f}$ en $\mathcal{F}$.

Preuve : Il suffit de montrer que si la relation (3) est valable à un ordre donné n, elle est aussi valable à l'ordre suivant n+1. Effectivement on a, quelque soit $\underline{g} \in H$,

$$K^{n+1}\underline{g} = \int_{\mathcal{F}^n} T_{\xi_1} \underline{f} \left\langle K\underline{g}, T_{\xi_n} \underline{f} \right\rangle \rho_f(\xi_{n-1}, \xi_n) \cdots \rho_f(\xi_1, \xi_2) \prod^{n}_{i=1} \mu(d\xi_i)$$

$$= \int_{\mathcal{F}^{n+1}} T_{\xi_1} \underline{f} \left\langle \underline{g}, T_{\xi_{n+1}} \underline{f} \right\rangle \rho_f(\xi_{n+1}, \xi_n) \cdots \rho_f(\xi_1, \xi_2) \prod_{i=1}^{n+1} \mu(d\xi_i)$$

CQFD

Théorème 3.1. Dans les conditions du lemme 3.1. les traces des puissances d'ordre n de l'opérateur K sont données par

$$\mathrm{tr}[K^n] = \mathrm{tr}[\rho_f^n]$$

ρ_f étant l'opérateur "autocorrélation" de $\underline{f}$ dans $\mathcal{F}$, qui opère dans l'espace $L^2(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$. Explicitement on obtient

$$\mathrm{tr}[K^n] = \int_{\mathcal{F}^n} \rho_f(\xi_1, \xi_2) \cdots \rho_f(\xi_n, \xi_1) \prod_{i=1}^{n} \mu(d\xi_i) \qquad (4)$$

Preuve. Soit $\{\underline{e_i}\}$ une base orthonormale complète de H. On sait que par définition

$$\mathrm{tr}[K^n] = \sum_k \left\langle K^n \underline{e}_k, \underline{e}_k \right\rangle \quad ; \; n = 1,2\ldots$$

Considérons d'abord la trace de K

$$\mathrm{tr}[K] = \sum_k \left\langle K\underline{e}_k, \underline{e}_k \right\rangle$$

D'après (1), on peut écrire

$$\mathrm{tr}[K] = \sum_k \left\langle \int_{\mathcal{F}} T_\xi \underline{f} \left\langle \underline{e}_k, T_\xi \underline{f} \right\rangle \mu(d\xi), \underline{e}_k \right\rangle$$

Utilisant la linéarité du produit scalaire on obtient

$$\mathrm{tr}[K] = \int_{\mathcal{F}} \sum_k \left\langle \underline{e}_k, T_\xi \underline{f} \right\rangle \left\langle T_\xi \underline{f}, \underline{e}_k \right\rangle \mu(d\xi)$$

$$= \int_{\mathcal{F}} \| T_\xi \underline{f} \|^2 \mu(d\xi)$$

Puisque quel que soit ξ, T_ξ est un opérateur unitaire et l'espace $\mathcal{F}$ normalisé par rapport à $\mu(d\xi)$, on obtient facilement

$$\mathrm{tr}[K] = \|\underline{f}\|^2 = \mathrm{tr}[\rho_f]$$

En utilisant la relation 3 pour l'opérateur K^n, et en appliquant la définition de la trace suivant la même démarche que pour tr[K] on obtient (4).

Ci-après nous donnons le résultat de l'application du théorème dans les exemples de la section 2 (Exemples : 2.1, 2.2 et 2.3).

Exemple 3.1. Pour l'opérateur retard l'"autocorrélation" de f(t) est la fonction d'autocorrélation habituelle

$$\rho_f(\xi-\zeta) = \int f(t-\xi)f^*(t-\zeta)\,dt$$

Si $Q(\xi)$ est la fonction de diffusion du filtre linéaire aléatoire, alors

$$tr[K^n] = \int_{\Xi^n} \rho_f(\xi_1-\xi_2)\cdots\rho_f(\xi_n-\xi_1)\prod_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,d\xi_i$$

Exemple 3.2. Pour l'opérateur translation fréquentielle, l'"autocorrélation" de f(t) est la transformée de Fourier de la puissance temporelle de f(t).

$$\rho_f(\nu_2-\nu_1) = \int |f(t)|^2 e^{-j2\pi(\nu_2-\nu_1)t}\,dt$$

La trace de K^n s'obtient de la même manière que celle de l'exemple 3.1..

Exemple 3.3. Pour l'opérateur compression en temps, l'"autocorrélation" de f(t) en compression est donnée par

$$\rho_f(\xi,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\xi\zeta}}\int f\left(\frac{t}{\sqrt{\xi}}\right)f^*\left(\frac{t}{\sqrt{\zeta}}\right)dt$$

Le lemme 3.1. et le théorème 3.1. peuvent être généralisés pour un produit d'opérateurs unitaires commutables. Nous donnons ici sans démonstration l'énoncé du lemme et du théorème correspondant. La preuve suit la même démarche que pour le cas d'un opérateur unitaire.

Lemme 3.2. Soit K un opérateur covariance dans un espace de Hilbert séparable et probabilisé H, défini par

$$Kg = \int_{\Xi\times\mathcal{N}} S_\nu T_\xi f \langle g, S_\nu T_\xi f\rangle\,\mu(d\xi d\nu)\ ,\ \forall g\in H$$

$(T_\xi, \xi\in\Xi)$, $(S_\nu, \nu\in\mathcal{N})$ étant deux familles d'opérateurs unitaires commutables pour tout ξ et ν. Alors l'opérateur K^n est donné par

$$K^n g = \int S_{\nu_1}T_{\xi_1}f\,\langle g, S_{\nu_n}T_{\xi_n}f\rangle\,\theta_f(\nu_n,\xi_n;\nu_{n-1},\xi_{n-1}) \cdots \theta_f(\nu_2,\xi_2,\nu_1,\xi_1)\prod_{i=1}^{n}\mu(d\xi_i d\nu_i)\ ,\ \forall g\in H \quad (5)$$

où $\theta_f(\nu,\xi;\lambda,\zeta) = \langle S_\lambda T_\zeta f, S_\nu T_\xi f\rangle$

Théorème 3.2. Les traces de l'opérateur K définies dans le lemme 3.2. sont données par

$$tr[K^n) = tr[\theta_f^n]$$

θ_f étant l'opérateur "ambiguïté" de f entre Ξ et $\mathcal{N}$ opérant dans l'espace $\mathcal{L}^2(\Xi\times\mathcal{N}, \sigma(\Xi\times\mathcal{N}), \mu)$ $\sigma(\Xi\times\mathcal{N})$ étant la σ-algèbre des boréliens de $\Xi\times\mathcal{N}$. Explicitement on obtient

$$tr[K^n] = \int_{\Xi^n\times\mathcal{N}^n}\theta_f(\nu_1,\xi_1;\nu_2,\xi_2)\cdots\theta_f(\nu_n,\xi_n;\nu_1,\xi_1)\prod_{i=1}^{n}\mu(d\xi_i d\nu_i)$$

Considérons maintenant la covariance de l'exemple 2.4.

Exemple 3.4. L'opérateur "ambiguïté" est la fonction d'ambiguïté (Woodward) du signal f(t)

$$\theta_f(\xi_1-\xi_2, \nu_1-\nu_2) = \int f(t-\xi_1)f^*(t-\xi_2)e^{j2\pi(\nu_1-\nu_2)t}\,dt$$

Si $S(\nu,\xi)$ est la fonction de diffusion en fréquence et en retard du filtre linéaire aléatoire, alors on obtient

$$tr[K^n] = \int_{\Xi^n\times\mathcal{N}^n}\theta_f(\xi_1-\xi_2,\nu_1-\nu_2)\cdots\theta_f(\xi_n-\xi_1,\nu_n-\nu_1)\prod_{i=1}^{n}S(\nu_i,\xi_i)\,d\nu_i d\xi_i \quad (6)$$

Nous allons appliquer ce résultat à un cas particulier de signal f(t) et de fonction de diffusion.

Exemple 3.5. Considérons le signal "gaussien"

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi T^2}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{t^2}{4T^2}\right)\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

dont la fonction d'ambiguïté est

$$\theta_f(\xi,\nu) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{8T^2} - 2\pi^2\nu^2T^2\right)$$

Considérons la fonction de diffusion "gaussienne" en retard et en fréquence

$$S(\nu,\xi) = \frac{1}{2\pi BL}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2L^2}-\frac{\nu^2}{2B^2}\right)$$

Vu que le retard et la fréquence se découplent et pour la fonction de diffusion et pour la fonction d'ambiguïté, l'intégration dans (6) peut être faite séparément en Ξ^n et $\mathcal{N}^n$. Nous donnons ci-dessous l'expression de l'intégrale pour le retard.

$$I_n = (L\sqrt{2\pi})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{(\xi_1-\xi_2)^2+\ldots+(\xi_n-\xi_1)^2}{8T^2}-\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{2L^2}\right)\prod_{i=1}^{n}d\xi_i$$

Nous évaluons cette intégrale dans l'annexe. On obtient une relation récursive

$$I_n = \left(\frac{T\sqrt{2}}{L}\right)^n\left(D_n\left(1+\frac{2T^2}{L^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

où le polynôme $D_n(.)$ satisfait à

$$D_1(\lambda) = \lambda - 1$$

$$D_n(\lambda) = 2^{-n}[\Delta_n(2\lambda)-\Delta_{n-2}(2\lambda)-2]\ ,\ n\geq 2$$

avec

$$\Delta_n(\lambda) = \lambda\Delta_{n-1}(\lambda)-\Delta_{n-2}(\lambda)\quad ;\ n\geq 2$$

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda\ ,\quad \Delta_0(\lambda) = 1$$

De la même manière on peut obtenir l'intégrale sur le domaine de fréquence et finalement on peut écrire

$$tr[K^n] = (2\pi BL)^{-n}\left(D_n\left(1+\frac{2T^2}{L^2}\right)D_n\left(1+\frac{1}{8\pi^2B^2T^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Dans [5] nous avons défini la diversité d'une transmission comme le rapport

$$a = \frac{(tr[K])^2}{tr[K^2]}$$

Pour le cas particulier de cet exemple on obtient l'expression

$$a = 4\pi BL\sqrt{\left(1+\frac{T^2}{L^2}\right)\left(1+\frac{1}{16\pi^2B^2T^2}\right)}$$

Cette relation met en rapport les principaux paramètres de la transmission : dispersion en retard 2L et élargissement fréquentiel 2B d'une part, durée effective 2T et bande effective 1/2T du signal émis d'autre part. L'importance de cette relation dépasse donc l'exemple particulier étudié.

On pourrait aussi poser la question du choix optimal du signal émis, par l'intermédiaire du paramètre T suivant la méthode développée dans [5]. Mais cette question dépasse l'objectif de cet article.

CONCLUSION

Dans cet article nous avons étudié des caractéristiques très importantes d'un opérateur covariance. Ce sont les traces des puissances d'un ordre quelconque de l'opérateur. Cet ensemble des valeurs numériques est équivalent à celui des valeurs propres. Il contient par conséquent toute l'information sur la répartition de l'énergie du processus, mais pas du tout les directions où se trouve cette énergie. Cet ensemble des caractéristiques est suffisant pour décrire les dispositifs quadratiques qu'on utilise pour des décisions statistiques concernant la covariance. Nous nous sommes particulièrement intéressés à une classe générale des processus non-stationnaires. Il s'agit surtout, mais pas uniquement, des processus résultant de la transmission dans une voie aléatoire et dispersive.

Pour le cas d'une voie dispersive en retard, nous donnons une expression des traces à l'aide de la fonction de diffusion en retard de la voie de transmission et de l'autocorrélation du signal émis. Pour le cas d'une voie de transmission dispersive en fréquence nous exprimons les traces à l'aide de la fonction de diffusion en fréquence et de la transformée de Fourier de la puissance du signal émis. Pour le cas d'une voie dispersive en retard et en fréquence nous donnons les traces des puissances de la covariance à l'aide de la fonction de diffusion en retard et en fréquence et de la fonction d'ambiguïté du signal émis. Pour l'ensemble de ces cas nous avons mis en évidence la structure des opérateurs covariance correspondant. Ceci nous a permis d'obtenir les théorèmes 3.1. et 3.2. D'autres applications donc sont possibles pourvu que la covariance résulte de l'application d'une famille d'opérateurs unitaires ou d'un produit commutable de tels opérateurs suivant l'expression donnée dans le lemme 3.1 et 3.2 respectivement.

ANNEXE

Mettons $\underline{x} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$

On peut facilement vérifier que

$$(\xi_1-\xi_2)^2 + \dots + (\xi_n-\xi_1)^2 = 2\,\underline{x}^T(I-A_1)\underline{x}$$

I étant la matrice identité et

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & \cdot & 1 \\ 1 & & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'exposant de l'exponentielle sera donc

$$-\frac{1}{4T^2}\underline{x}^T(I-A_1)\underline{x} - \frac{1}{2L^2}\underline{x}^T\underline{x} = -\frac{1}{2}\underline{x}^T\left[\left(\frac{1}{2T^2}+\frac{1}{L^2}\right)I - \frac{1}{2T^2}A_1\right]\underline{x}$$

Ainsi on obtient

$$I_n = L^{-n}\left(\det\left[\left(\frac{1}{2T^2}+\frac{1}{L^2}\right)I - \frac{1}{2T^2}A_1\right]\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{T\sqrt{2}}{L}\right)^n\left(\det\left[\left(1+\frac{2T^2}{L^2}\right)I - A_1\right]\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Si $D_n(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A_1, on obtient

$$I_n = \left(\frac{T\sqrt{2}}{L}\right)^n\left(D_n\left(1+\frac{2T^2}{L^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous donnons ci-dessous une relation récursive sur l'ordre pour le déterminant $D_n(\lambda)$. Effectivement on peut montrer que

$$D_1(\lambda) = \lambda - 1$$

$$D_n(\lambda) = 2^{-n}\left[\Delta_n(2\lambda) - \Delta_{n-1}(2\lambda) - 2\right]; \quad n \geq 2$$

où $\Delta_n(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour cette matrice on a

$$\Delta_n(\lambda) = \lambda\,\Delta_{n-1}(\lambda) - \Delta_{n-2}(\lambda); \quad n \geq 2$$

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda$$

$$\Delta_0(\lambda) = 1$$

Ce qui permet de déterminer récursivement $D_n(\lambda)$.

REFERENCES

[1] N.JOHNSON, S.KOTZ "Distributions in statistics Continuous univariate distributions-2" ch. 29 "Quadratic forms in normal variables" J. Wiley, N.York, 1970.

[2] G.TZIRITAS "Contribution à l'étude des tests d'hypothèses concernant l'opérateur covariance d'un processus gaussien" Thèse de Docteur ès Sciences, INP et USM Grenoble, 1985.

[3] A.T.BHARUCHA-REID "Random Integral equations" Academic Press, N. York, 1972.

[4] G.JOURDAIN "Filtres linéaires aléatoires et non stationnaires. Modèles, simulations et applications" Thèse de Docteur ès Sciences, INP et USM Grenoble, 1976.

[5] G.TZIRITAS "Approximations de la probabilité d'erreur des récepteurs à traitement quadratique" 8ème Colloque GRETSI, Nice, 1-5 Juin 1981.