

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

## SYNTHESE D'UN SIGNAL CORRESPONDANT A UNE FONCTION DE WIGNER-VILLE A LARGE SUPPORT.

L. CAIRO, M.R. FEIX *PMMS/CNRS Orléans.*

G. MOURGUES *IUT Montluçon,  
Université Clermont Ferrand II.*

P. BERTRAND, B. IZRAR, NGUYEN V. TUAN  
*Physique Théorique - Université de Nancy I.*

### RESUME

On peut associer à tout signal  $S(t)$ , une fonction de Wigner Ville, mais la transformation inverse est beaucoup plus délicate.

Si l'on prend une fonction arbitraire des deux variables indépendantes  $t$  et  $\omega$ , ordinairement, on ne peut lui associer aucun signal. Une première issue à ces difficultés consiste à choisir  $S(t)$  de telle sorte que la fonction de Wigner Ville approxime au mieux, au sens des moindres carrés, la fonction que nous voulons synthétiser.

Notre approche est différente et part de la nécessité logique en mécanique quantique, d'être capable de construire une fonction d'onde décrivant dans la limite classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ), une distribution arbitraire de l'espace des phases. Alors, la synthèse devient possible sous deux conditions :

a) Nous devons traiter des distributions  $\phi(t, \omega)$  à haute fréquence, c'est à dire dont la fréquence caractéristique doit être bien plus grande que la fréquence caractérisant l'évolution temporelle de  $\phi$  ;

b) Nous devons utiliser la fonction de Wigner Ville obtenue en moyennant à l'aide d'un noyau qui ici, est une double gaussienne caractérisée par  $\sigma_t$  et  $\sigma_\omega$  avec  $\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$ .

La synthèse est obtenue en prenant

$$S(t) = \sum_J \sum_m A(J, m) \exp i(J\Delta + md)t$$

En choisissant convenablement  $\sigma_t, \sigma_\omega, \Delta$  et  $d$ , on montre que  $A(J, m)$  est directement lié à  $Q_J(t)$ , l'intégrale sur  $\omega$  de  $\phi(t, \omega)$  dans l'intervalle  $(J-1/2)\Delta, (J+1/2)\Delta$ . Plus précisément,  $A(J, m)$  est le développement de Fourier de  $[Q_J(t)]^{1/2}$ . Nous voyons que, dans cette solution, les informations sur  $t$  et  $\omega$  sont entremêlées et nous construisons des paquets d'onde autour des fréquences caractérisant  $\int \phi(t, \omega) dt$ . La méthode est illustrée par un exemple numérique qui montre comment la synthèse est réalisée et ce qu'il advient quand les inégalités entre les différents paramètres ne sont pas respectées.

### SUMMARY

To any signal  $S(t)$  a Wigner Ville function  $f_w(t, \omega)$  can be associated, but the inverse transformation is much more delicate. Taking an arbitrary function of two independent variables  $t$  and  $\omega$ , usually no signal can be associated.

A first way out of this difficulty is to select  $S(t)$  such that the associated Wigner Ville function approximate best, in the least square sense, the function we want to synthesise. Our approach is different and is based on the logical necessity to be able to build a wave function describing in the classical limit ( $\hbar \rightarrow 0$ ) arbitrary phase space distribution. Then, the synthesis becomes possible under two conditions :

a) We must deal with high frequency distribution  $\phi(t, \omega)$  i.e. the characteristic frequency of  $\phi$  must be much larger than the frequency characterizing the time variation of  $\phi$ .

b) We must use the smoothed Wigner Ville function obtained by averaging through a kernel which here, will be a double gaussian characterised by  $\sigma_t$  and  $\sigma_\omega$  with  $\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$ .

The synthesis is obtained by taking

$$S(t) = \sum_J \sum_m A(J, m) \exp i(J\Delta + md)t$$

With a proper selection of  $\sigma_t, \sigma_\omega, \Delta$  and  $d$ , we show that  $A(J, m)$  is directly connected to  $Q_J(t)$ , the integral on  $\omega$  of  $\phi(t, \omega)$  in the interval  $(J-1/2)\Delta, (J+1/2)\Delta$ . More precisely  $A(J, m)$  is the Fourier expansion of  $[Q_J(t)]^{1/2}$ . We see that in this solution, informations on  $t$  and  $\omega$  are intermingled and we build wave packets around the frequencies characterising  $\int \phi(t, \omega) dt$ . The method is illustrated by a numerical example showing how the synthesis is realised and what happens when the inequalities between the different parameters are no more fulfilled.



SYNTHESE D'UN SIGNAL CORRESPONDANT A UNE FONCTION  
DE WIGNER-VILLE A LARGE SUPPORT.

### INTRODUCTION

\* La transformation de Wigner-Ville (W.V.) d'un signal  $S(t)$ , a été présentée [1] comme une "forme acceptable" de la fonction caractéristique de la répartition d'énergie du signal, dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$ :

$$f_w(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_R S\left(t + \frac{T}{2}\right) S^*\left(t - \frac{T}{2}\right) e^{-i\omega T} dT \quad (1)$$

\* Bien que donnant les distributions marginales, elle présente le défaut important de ne pas être partout positive, et de ne pas donner la fréquence instantanée d'un signal unimodulaire  $S(t) = \exp i\psi(t)$

\* Signalons l'existence de nombreuses autres représentations conjointes (de même, non exemptes de défauts), et le parallèle [2] [3], qui peut être fait entre la tentative de définir une fonction de distribution dans l'espace des phases  $(q, p)$  de la mécanique quantique (M.Q.) et celle, en traitement du signal (T.S.), de l'énergie dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$ :

$$\text{M.Q.} \left\{ \begin{array}{l} q \leftrightarrow t \\ p \leftrightarrow \omega \\ \psi(x) \leftrightarrow S(t) \\ \hbar \leftrightarrow 1 \end{array} \right\} \text{T.S.}$$

\* La forme la plus générale des représentations conjointes, compatibles avec les translations en temps et fréquence du signal, est la suivante :

$$\tilde{f}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iiint_R D(T, \Omega) S\left(t' + \frac{T}{2}\right) S^*\left(t' - \frac{T}{2}\right) e^{-i\omega T} e^{-i\Omega(t-t')} d\Omega dt' dT \quad (2)$$

(avec certaines conditions sur  $D(T, \Omega)$ )

Cette forme est issue d'un travail de L. COHEN [4] en M.Q., et toujours dans le cadre quantique, M.D. SRINIVAS et E. WOLF [5] ont prouvé que la condition de positivité de  $\tilde{f}$  est contradictoire avec celle de l'obtention des marginales.

Le cas de la distribution de W.V. correspond au choix  $D(T, \Omega) = 1/2 \pi$ .

Nous avons précédemment [3] donné une autre interprétation de la transformée de Wigner généralisée (2), comme étant un LISSAGE de la transformée de W.V. par un noyau  $K(t, \omega)$  tel que

$$\tilde{f}(t, \omega) = \iint_R K(t - t', \omega - \omega') f_w(t', \omega') dt' d\omega' \quad (3)$$

avec

$$K(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_R D(T, \Omega) e^{-i(\Omega t + \omega T)} dT d\Omega \quad (4)$$

A ce sujet, une condition réputée nécessaire et suffisante ([5] dans le cadre de la M.Q. et [2] dans celui du T.S.) pour assurer la positivité de  $\tilde{f}$ , est que  $K(t, \omega)$  soit lui-même une distribution de W.V. ; notre interprétation de  $\tilde{f}$  par le lissage nous a conduit à montrer [6] et [7] que cette condition est certes suffisante, mais nullement nécessaire.

\* Le problème de la synthèse d'une fonction d'onde ayant une transformée de Wigner donnée est une nécessité logique en M.Q. ; en effet, nous devons pouvoir traiter un problème classique dans le formalisme quantique, et, conséquemment, trouver une condition initiale pour l'équation d'évolution de SCHROEDINGER qui "correspond" à une condition initiale donnée de l'équation de LIQUVILLE.

Ce même problème de synthèse d'un signal ayant une représentation conjointe donnée apparaît dans des

applications telles que le filtrage variable dans le temps, la suppression du bruit, la séparation de signaux, la compression de largeur de bande ... Nous allons d'abord préciser ce concept délicat d'inversion, puis, ensuite, réaliser cette inversion dans un cadre à définir.

### PROBLEME DE L'INVERSION DE REPRESENTATIONS CONJOINTES

#### A) Inversion de la transformée de Wigner Ville

Ce problème a été résolu dans le cadre quantique [8] par V.I. TATARSKII ; transposons son raisonnement en T.S. :

Nous remarquons que, si  $f_w(t, \omega)$  est la transformée de W.V. d'un signal  $S(t)$ , alors

$$\int_R f_w(t, \omega) e^{i\lambda\omega} d\omega = S\left(t + \frac{\lambda}{2}\right) S^*\left(t - \frac{\lambda}{2}\right) \quad (5)$$

d'où, en posant  $t_1 = t + \frac{\lambda}{2}$  et  $t_2 = t - \frac{\lambda}{2}$

$$\int_R e^{i(t_1 - t_2)\omega} f_w\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \omega\right) d\omega = S(t_1) S^*(t_2) \quad (6)$$

Donc, si  $\phi(t, \omega)$  est une représentation conjointe de W.V., et si l'on pose

$$\rho_\phi(t_1, t_2) = \int_R e^{i(t_1 - t_2)\omega} \phi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \omega\right) d\omega \quad (7)$$

alors,  $\rho_\phi(t_1, t_2)$  est factorisable séparément en  $t_1$  et  $t_2$  c'est à dire

$$\frac{\partial^2 \text{Log } \rho_\phi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 0 \quad (8)$$

On montre facilement que, si on impose à  $\phi(t, \omega)$  d'être réelle, alors, la condition précédente devient une condition nécessaire et suffisante pour que  $\phi(t, \omega)$  soit une représentation conjointe de W.V. que l'on peut inverser analytiquement :

$$S(t) = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{\int_R \phi(t_0, \omega) d\omega}} \int_R \phi\left(\frac{t+t_0}{2}, \omega\right) e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \quad (9)$$

où  $\psi$  est une phase arbitraire, et  $t_0$  choisi tel que la racine soit non nulle.

Il ressort en particulier de la condition (8) que seule une classe très restreinte de fonctions  $\phi(t, \omega)$  sont inversibles au sens de Wigner Ville, l'inversion pouvant alors se faire analytiquement. En conséquence, le problème de l'inversion d'une fonction arbitraire doit être abordé dans un autre contexte ; par exemple, l'inversion faite au sens de G.F. BOUDREAU-BARTELS et T.W. PARKS [9] consiste à construire un signal discret  $S(n)$  qui minimise l'écart quadratique (en  $\omega$ ) entre  $\phi(t, \omega)$  et la transformée de Wigner Ville discrète du signal  $S(n)$ . Malheureusement, une telle approche peut conduire à un signal pour lequel l'erreur sera d'autant plus importante qu'il n'appartiendra pas à la classe définie par la condition (8). De toute manière, le caractère hautement oscillatoire des fonctions de W.V., joint à leur rapide variation de signe, confère peu de sens à un critère d'erreur quadratique moyenne.

#### B) Une philosophie issue de l'aspect limite classique de la M.Q.

Dans le contexte quantique, l'inversion d'une fonction quelconque  $\phi(q, p)$ , au sens de Wigner, ne doit être possible qu'à la limite classique (en effet, a priori, n'importe quelle condition initiale doit pouvoir



SYNTHESE D'UN SIGNAL CORRESPONDANT A UNE FONCTION  
DE WIGNER-VILLE A LARGE SUPPORT.

être donnée à l'équation de Liouville classique). C'est cette condition de limite classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ) qui permet de sortir de la classe restreinte précédente. Sachant d'autre part ([10] et [11]) qu'il ne suffit pas de faire formellement tendre  $\hbar$  vers zéro pour obtenir la limite classique, mais qu'il faut de plus lisser la distribution de Wigner pour détruire ses oscillations, d'autant plus violentes que  $\hbar \rightarrow 0$ , nous chercherons donc à inverser à la limite classique, la distribution de Wigner lissée (par exemple, [11] et [12]), par une double gaussienne de variances  $\sigma_q$  et  $\sigma_p$  telles que  $\sigma_q \sigma_p \geq \hbar/2$ .

En traitement du signal, cela signifie que nous N'INVERSERONS QUE DES REPRESENTATIONS CONJOINTES A HAUTE FREQUENCE par rapport à la fréquence caractérisant l'évolution temporelle (c'est l'équivalent T.S. de la limite classique de la M.Q.) et cela, AU SENS DE LA TRANSFORMEE DE WIGNER LISSEE\* par une double gaussienne de variances  $\sigma_t$  et  $\sigma_\omega$  telles que  $\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$ .

TECHNIQUE DE L'INVERSION DE LA DISTRIBUTION DE WIGNER LISSEE

1) Synthèse d'un signal S(t) dont la représentation conjointe est une fonction uniforme de t

Pour cela, nous considérerons un signal somme d'oscillateurs à des fréquences multiples d'un intervalle  $\Delta$  fixé :

$$S(t) = \sum_{j=-N}^N A_j e^{ij\Delta t} \quad (10)$$

qui a pour transformée de W.V.

$$f_w(t, \omega) = \sum_{j, k=-N}^N A_j A_k^* e^{i(j-k)\Delta t} \delta(\omega - \frac{j+k}{2} \Delta) \quad (11)$$

C'est une somme de faisceaux, modulés dans le temps, aux fréquences multiples de  $\Delta/2$ . Le lissage par la double gaussienne de variances  $\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$  donne

$$\hat{f}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \sum_j \sum_k A_j A_k^* e^{i(j-k)\Delta t} e^{-(1/2\sigma_\omega^2)(\omega - (j+k)(\Delta/2))^2} e^{-((j-k)^2 \Delta^2 \sigma_t^2)/2} \quad (12)$$

Si nous choisissons  $\Delta$  tel que  $\Delta \sigma_t / \sqrt{2} \gg 1$ , les termes de cette double somme d'indice  $j \neq k$  sont détruits par la dernière exponentielle, et il ne reste que

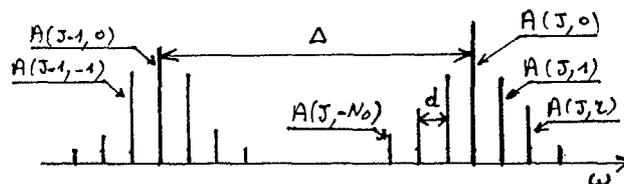
$$\hat{f}(t, \omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \sum_j |A_j|^2 e^{-(1/2\sigma_\omega^2)(\omega - j\Delta)^2} \quad (13)$$

ce qui rend la synthèse possible.

2) Cas de la représentation conjointe  $\phi(t, \omega)$  périodique en t, de période  $L_t$

Nous adoptons une technique du genre "paquets d'onde" en joignant à chacun des oscillateurs précédents, des satellites espacés d'une distance  $d$  comme indiqué sur la figure 1 suivante :

Figure 1



$$\text{Le signal } S(t) = \sum_{J=-N_\omega}^{N_\omega} \sum_{m=-N_0}^{N_0} A(J, m) e^{i(J\Delta + md)t} \quad (14)$$

aura pour transformée de Wigner Ville lissée par la double gaussienne à variances vérifiant la condition

$$(I) \quad \sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2$$

$$\hat{f}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \sum_J \sum_K \sum_m \sum_n A(J, m) A(K, n) \times \exp i((J-K)\Delta + (m-n)d)t \times \exp -\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\omega - \frac{(J+K)\Delta + (m+n)d}{2})^2 \times \exp -\frac{\sigma_t^2}{2} ((J-K)\Delta + (m-n)d)^2 \quad (15)$$

La condition (II)  $\frac{\Delta \sigma_t}{\sqrt{2}} = A \gg 1$  permet de ne prendre

en compte dans la quadruple somme, que les termes d'indice  $J = K$ .

La condition (III)  $\frac{\Delta}{2N_0 d} = B \gg 1$  permet de négliger

dans la deuxième exponentielle, les termes en  $d$  par rapport aux termes en  $\Delta$ .

Sous réserve de ces deux conditions,  $\hat{f}(t, \omega)$  s'écrit

$$\hat{f}(t, \omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \sum_K \sum_m \sum_n A(K, m) A^*(K, n) \exp i(m-n) dt \exp -\frac{1}{2\sigma_\omega^2} (\omega - K\Delta)^2 \exp -\frac{\sigma_t^2}{2} (m-n)^2 d^2 \quad (16)$$

Soit maintenant

$$Q_J(t) = \int_{J\Delta - (\Delta/2)}^{J\Delta + (\Delta/2)} \phi(t, \omega) d\omega \quad (17)$$

Pour réaliser la synthèse de  $\phi$ , en VALEUR MOYENNE, sur chaque intervalle  $\Delta$ , il faudra que

$$Q_J(t) = \int_{J\Delta - (\Delta/2)}^{J\Delta + (\Delta/2)} \hat{f}(t, \omega) d\omega \quad (18)$$

soit encore

$$Q_J(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \sum_K \sum_m \sum_n A(K, m) A^*(K, n) e^{i(m-n)dt} e^{-(\sigma_t^2/2)(m-n)^2 d^2} \int_{J\Delta - (\Delta/2)}^{J\Delta + (\Delta/2)} e^{-(1/2\sigma_\omega^2)(\omega - K\Delta)^2} d\omega \quad (19)$$

La condition supplémentaire IV  $\Delta/\sigma_\omega = C \gg 1$  permet de réduire la sommation en  $K$  au seul terme  $K = J$  car l'intégrale vaut  $\sqrt{2\pi} \sigma_\omega$  si  $J = K$  et 0 sinon.

Nous devons donc choisir les  $A(J, m)$  tels que

$$\forall J \quad Q_J(t) = \sum_m \sum_n A(J, m) A^*(J, n) e^{i(m-n)dt} e^{-(\sigma_t^2/2)(m-n)^2 d^2} \quad (20)$$

Moyennant la dernière condition V  $\sqrt{2}/\sigma_t 2N_0 d = D \gg 1$  qui rend l'exponentielle très peu différente de 1, et utilisant le fait que  $Q_J(t)$  est périodique (du fait de la périodicité de  $\phi$ ), la déconvolution se fait facilement en prenant  $A(J, r)$  égal au  $r^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier de  $\sqrt{Q_J(t)}$ .

\* Cette représentation conjointe à inverser est en M.Q. issue du principe de correspondance antinormale de R.J. GLAUBER lorsque  $\sigma_q \sigma_p = \hbar/2$ .



SYNTHESE D'UN SIGNAL CORRESPONDANT A UNE FONCTION  
DE WIGNER-VILLE A LARGE SUPPORT.

Il ne reste plus qu'à vérifier la COMPATIBILITE des conditions I à V ; un calcul simple montre que c'est le cas, et qu'il suffit de choisir les termes A, B, C, D, tels que  $AD = B$  et  $C \leq 2\sqrt{2} A$ .

Finalement, les nombres  $N_0$  et  $N_\omega$  devront être choisis de telle façon que  $N_\omega \Delta = \alpha \sum_\omega$  (où  $\sum_\omega$  est la "Variance" en  $\omega$  de  $\phi(t, \omega)$  et  $\alpha$  tel que  $\alpha \sum_\omega$  contienne le support de  $\phi$ ).

Cela conduit à la

règle de faisabilité de la synthèse :

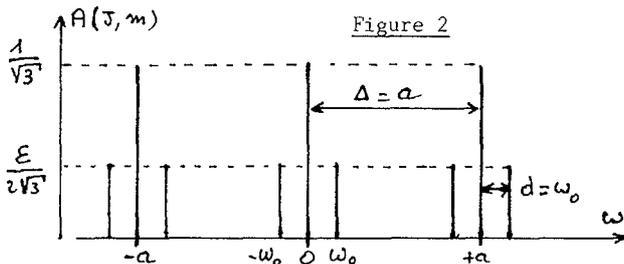
$$\sum_\omega L_t = \frac{2\pi}{\alpha} B N_\omega N_0 \quad \text{cohérent avec } B \text{ grand.}$$

#### Application Numérique

Nous avons choisi à titre d'exemple test, la représentation conjointe suivante à synthétiser

$$\phi(t, \omega) = \frac{1}{3} (\delta(\omega-a) + \delta(\omega) + \delta(\omega+a)) (1 + \varepsilon \cos \omega_0 t)^2 \quad (21)$$

La méthode précédente construit les faisceaux comme indiqué sur la figure suivante :



La condition de faisabilité s'écrit présentement  $a \gg \omega_0$ .

On remarquera sur les figures 3 et 4 les conséquences du non respect de la condition I : la présence de "fantômes" intermédiaires, et l'existence d'oscillations violentes alternativement positives et négatives.

Si, de plus, on ne respecte pas la condition de la règle de faisabilité, on constate sur la figure 5 que les faisceaux aux fréquences  $\Delta/2$  ne sont pas détruits par le lissage.

La figure 6 montre le résultat correct de la synthèse faite en respectant toutes les conditions.

#### 3) Cas de la représentation conjointe à synthétiser, a périodique

Soit  $\Sigma_t$  la "variance en t de  $\phi(t, \omega)$ . Le terme  $Q_J(t)$  n'est plus périodique. Pour que la déconvolution précédente garde un sens, il faudra imposer encore une condition supplémentaire VI  $N_0 d = \alpha / \Sigma_t$  qui s'avère compatible avec les autres ; nous obtenons cette fois la

règle de faisabilité de la synthèse

$$\sum_\omega \Sigma_t = 2 B N_\omega \quad \text{cohérent avec } B \text{ grand.}$$

#### 4) Remarque importante

Un traitement "dual" du précédent est possible, la synthèse se faisant alors en paquets "d'impulsion" (par analogie avec la M.Q.).

#### CONCLUSION

A titre de conclusion, insistons sur les deux points fondamentaux :

1) La synthèse n'est possible, au sens de Wigner lissée, que pour les fonctions  $\phi(t, \omega)$  à  $\omega$  moyen  $\gg \partial\phi/\partial t$  ; c'est là une autre expression de la règle de faisabilité, équivalente en M.Q. à la limite classique.

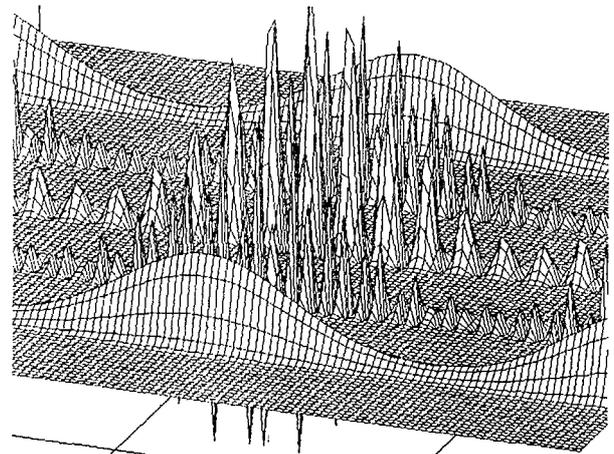
2) Cette synthèse n'est possible pour cette classe de représentations conjointes, qu'au sens de Wigner lissée.

Comme remarque finale, notons que nous pouvons choisir un noyau lissant avec corrélation entre t et  $\omega$ , comme par exemple la transformée de W.V. d'un signal du type "créneau" en  $\omega$ . Un tel noyau permet de réaliser une "synthèse interpolante", rigoureuse sur une grille  $\Delta t \Delta \omega$ , telle que  $\Delta t \Delta \omega \geq 1/2$  (ce point est intéressant pour réaliser la synthèse de fonctions  $\phi(t, \omega)$  définies par des tables numériques).

Si la partie "technique" de la synthèse est alors simplifiée, c'est au détriment de la simplicité du noyau lissant  $K(t, \omega)$  qui devient à structure compliquée et présente notamment des valeurs négatives.

#### FIGURES

Figure 3



Distribution conjointe, vue du dessus, côté positif, du signal synthétisé (14) décrit par la figure 2, dans le cas de

$$\phi(t, \omega) = \frac{1}{3} (\delta(\omega-a) + \delta(\omega) + \delta(\omega+a)) (1 + \varepsilon \cos \omega_0 t)^2$$

$$\text{lorsque } a = 20. \quad \omega_0 = .2 \quad \varepsilon = .5$$

La double gaussienne de lissage est caractérisée par le choix des variances

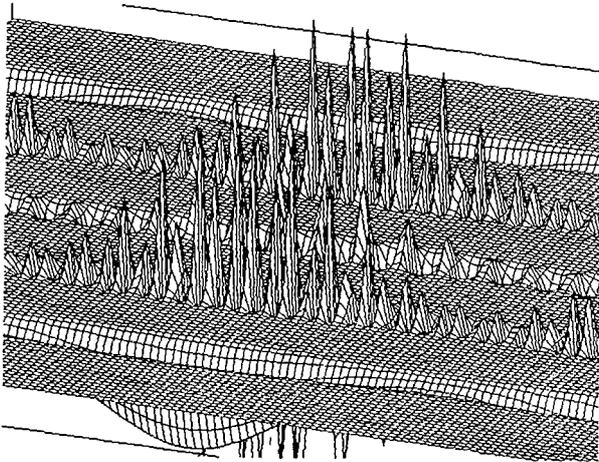
$$\sigma_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 a}{2}} \quad \text{et } \sigma_t \text{ tel que } \sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2} \times 0.01$$

Le plan de vue est le plan  $(t, \omega)$ ,  $\omega$  étant l'axe fuyant.



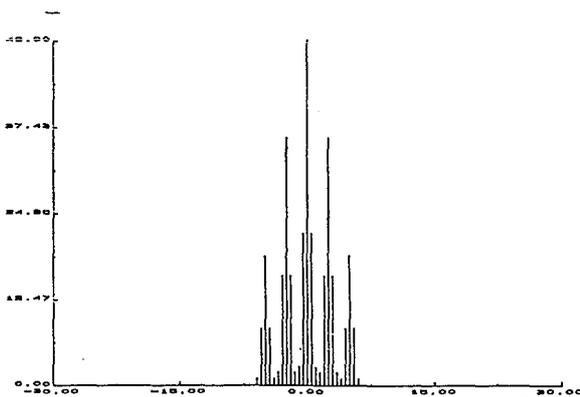
SYNTHESE D'UN SIGNAL CORRESPONDANT A UNE FONCTION  
DE WIGNER-VILLE A LARGE SUPPORT.

Figure 4



Même conditions que pour la figure 3 ; la vue est faite par le dessous, c'est à dire du côté des valeurs négatives de la distribution conjointe.

Figure 5

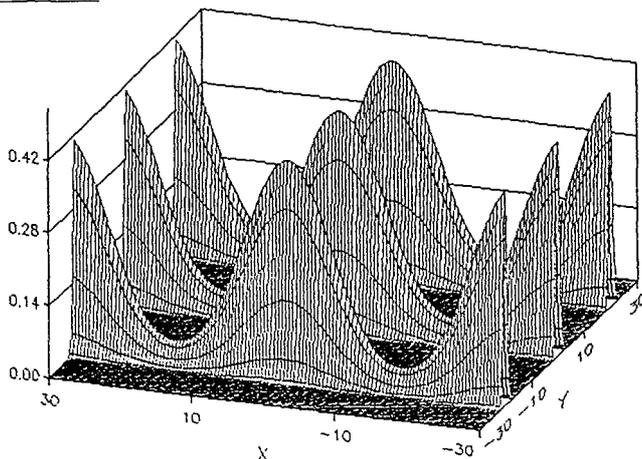


Coupe (pour  $t = 0$ ) en  $\omega$  de la distribution conjointe du signal synthétisé, lorsque

$$a = 1. \quad \omega_0 = 1. \quad \varepsilon = .5$$

avec  $\sigma_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 a}{2}}$  et  $\sigma_t$  tel que  $\sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2} \times 0.01$

Figure 6



Synthèse correcte obtenue pour  $a = 20$ .  $\omega_0 = .2$   
 $\varepsilon = .5$  avec les valeurs

$$\sigma_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0 a}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma_t \quad \text{tel que} \quad \sigma_t \sigma_\omega = \frac{1}{2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. VILLE Cables et transmissions 2 (1) 1948 pp. 61-74.
- [2] B. ESCUDIE, J. GREA, C.R.A.S. t 283 Série A pp. 1049-1051.
- [3] M.R. FEIX, G. MOURGUES, P. BERTRAND, B. IZRAR, V.T. NGUYEN, GREMI 9th Colloquium Vol 1 1983 pp 57-62.
- [4] L. COHEN J. of Math. Phys. 7 1966 pp. 781-786.
- [5] M.D. SRINIVAS et E. WOLF Phys. Rev. D 11 1975 pp. 1477-1485.
- [6] "Optimum smoothing of the WignerVille distribution" J.C. ANDRIEUX, M.R. FEIX, G. MOURGUES, P. BERTRAND, B. IZRAR, V.T. NGUYEN, soumis à IEEE (Signal).
- [7] "Not necessary but sufficient conditions for the positivity of generalized Wigner functions", G. MOURGUES, M.R. FEIX, J.C. ANDRIEUX, P. BERTRAND, soumis à Journal of Mathematical Physics.
- [8] V.I. TATARSKII Sov. Phys. Usp. 26 (4) April 85 pp. 311-327.
- [9] G.F. BOUDREAUX-BARTELS and T.W. PARKS, IEEE ICASSP - 84.
- [10] E.J. HELLER, Journal of Chemical Physics 65 (4) August 76 pp 1289-1298.
- [11] G. MOURGUES, J.C. ANDRIEUX, M.R. FEIX, Eur. J. Phys. 5 (1984) pp 112-118.
- [12] N.D. CARTWRIGHT, Physica 83A 1976 pp 210-212.

