

DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

89



NICE du 20 au 24 MAI 1985

UN ALGORITHME DUAL POUR LE CALCUL RAPIDE DE LA TRANSFORMÉE H_0^1

Sébastien M. Candel*, Eric Boussarie⁺,
Jean-Marc Loesch[#] et Annie Lelarge[§]

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 92322 Châtillon Cedex,
Ecole Centrale des Arts et Manufactures, 92290 Chatenay Malabry — SINTRA-Alcatel, 94117 Arcueil

RESUME

La transformée H_0^1 est rencontrée dans un grand nombre d'applications pratiques comme par exemple en acoustique sous marine, en électromagnétisme, en traitement des données géophysiques. Cette transformée a comme noyau la fonction de Hankel d'ordre zéro et de première espèce. On présente ici une méthode originale pour le calcul de cette transformée basée sur le concept de procédure duale. Le calcul fait intervenir deux algorithmes raccordés. Le premier fournit les composantes d'ordre peu élevé de la transformée et le second calcule de façon asymptotique les composantes d'ordre intermédiaire et élevé. La procédure ainsi définie génère des valeurs estimées précises et le temps de calcul nécessaire est comparable à celui de quelques FFT.

SUMMARY

The H_0^1 transform is encountered in numerous practical applications such as underwater acoustics, electromagnetics, geophysical data processing. The kernel of this transform contains the Hankel function of zero-th order and first kind. An original method is presented in this paper for the calculation of this transform. The dual procedure concept is used and the calculation is based on two matched algorithms. The first provides the lower order components of the transform and the second yields intermediate and higher order samples. Accurate estimates of the H_0^1 transform are obtained in this way and the computation time is comparable to that of a few FFT.

* Ingénieur à l'ONERA et Professeur à l'Ecole Centrale,
+ Adresse actuelle : CNES, Division des Lanceurs, 91000 Evry,
Adresse actuelle : SDP, 92150 Suresnes,
§ SINTRA Alcatel, 94117 Arcueil.



1 - INTRODUCTION

Des progrès importants ont été accomplis au cours des vingt dernières années avec le développement d'algorithmes rapides comme les transformées de Fourier rapides (FFT) ou les transformées de Walsh-Hadamard rapides (FWHT). Un certain nombre d'études récentes ont aussi eu pour objet le développement de méthodes de calcul pour les transformées de Fourier-Bessel (Hankel) définies par :

$$F_K(r) = \int_0^{\infty} J_K(\zeta r) \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad k = 0, \dots, N \quad (1)$$

Le noyau de ces transformations intégrales fait intervenir la fonction de Bessel J_k , avec comme argument, le produit ζr . La plupart des travaux concernent la transformée d'ordre zéro $F_0(r)$ et une grande variété de méthodes sont proposées par Siegman [1], Talman [2], Brunolet Chavel [3], Cavanagh et Cook [4], Nachamkin et Maggiore [5], Miraglia et al. [6], Johansen et Sorensen [7], Oppenheim et al. [8], Candel [9,10] et Mook [11]. Le calcul des transformées d'ordre quelconque est aussi envisagé par Candel [12-14].

Le choix de méthodes permettant le calcul des transformées de Fourier-Bessel est donc relativement vaste. Par contre nous n'avons pas trouvé de référence qui concerne spécifiquement le calcul de la transformée H_0^1

$$F(r) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^1(\zeta r) \zeta f(\zeta) d\zeta \quad (2)$$

où H_0^1 désigne la fonction de Hankel d'ordre zéro et de première espèce ($H_0^1(z) = J_0(z) + i Y_0(z)$). On peut cependant noter que l'évaluation asymptotique d'intégrales ayant la forme (2) est effectuée dans des études de propagation sous marine, par exemple par Di Napoli et Deavenport [15].

Pourtant les représentations intégrales de champs d'ondes basées sur la fonction de Hankel de première espèce H_0^1 sont très souvent moins ambiguës que celles qui ont recours à la fonction de Bessel J_0 . Ces représentations sont aussi mieux adaptées aux problèmes de propagation en champ libre. En effet la fonction H_0^1 a le bon comportement à l'infini (celui d'une onde divergente) alors que la fonction J_0 se présente à l'infini comme une onde stationnaire formée par la somme d'une onde divergente et d'une onde convergente.

Dans ces conditions, les applications analytiques de la transformée H_0^1 sont multiples (voir par exemple les ouvrages de Felsen et Marcuvitz [16] et Aki et Richards [17]) et diverses applications numériques au calcul de champs d'ondes ont déjà été proposées, par exemple, par Di Napoli et Deavenport [15]. C'est en fait ce type d'utilisation qui motive notre étude. Nous présentons ici une procédure duale pour le calcul de la transformée H_0^1 . Les bases mathématiques de ce type de procédure sont données à la section 2. Les formulations discrètes qui permettent le calcul rapide de la transformée H_0^1 sont présentées sans démonstration à la section 3 et quelques résultats de calcul sont décrits à la section 4. Une présentation plus complète avec, en particulier, une analyse d'erreur et d'autres cas tests font l'objet de la référence [18].

2 - BASES THEORIQUES

La procédure duale que nous allons décrire est semblable à celle développée dans la réf. [10] pour la transformée de Fourier-Bessel. Ce type de méthode utilise deux algorithmes raccordés. Le premier (algorithme L) fournit les composantes d'ordre peu élevé de la transformée (c'est-à-dire les composantes dont l'argument r est petit). Le second (algorithme A) utilise des formulations asymptotiques et permet la détermination des composantes d'ordre intermédiaire

et élevé. Le passage du premier algorithme au second s'effectue lorsque les résultats concordent à une certaine erreur près. L'avantage principal de ce type de procédure provient de ce que la charge de calcul principale est fixée par l'algorithme asymptotique et nous verrons que cet algorithme fait intervenir un nombre d'opérations égal à celui de trois à cinq FFT.

Formulation de l'algorithme L

La transformée H_0^1 est définie dans l'introduction par l'expression (2). En générale $f(\zeta)$ et $F(r)$ sont des fonctions complexes, l'argument r est positif et appartient à l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. Le noyau de la transformation contient la fonction de Hankel de première espèce. Cette fonction peut être remplacée par l'expression intégrale suivante :

$$H_0^1(x) = (2/i\pi) \int_0^{\infty} \exp(ix \cos t) dt \quad (3)$$

La substitution de l'expression (3) dans la définition (2) conduit facilement à

$$F(r) = (2/i\pi) \int_0^{\infty} \phi(r \cos t) dt \quad (4)$$

où

$$\phi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \zeta \exp(i\zeta\eta) d\zeta \quad (5)$$

désigne la transformée de Fourier de la fonction $f(\zeta) \zeta$ et η est l'argument de cette transformée. D'après ces expressions, la transformée $F(r)$ peut être obtenue en sommant les composantes de Fourier $\Phi(\eta)$ correspondant à la variable $\eta = r \cos t$ pour t appartenant à l'intervalle semi infini $[0, +\infty[$. Les expressions (4) et (5) ne sont utiles en pratique que si l'intégrale (4) converge. Cet aspect important est examiné dans la réf. [18]. La convergence est assurée sous des conditions relativement peu restrictives et on peut approximer $F(r)$ par l'intégrale finie :

$$G(r, \eta_M) = (2/i\pi) \int_0^{t_M} \phi(r \cos t) dt \quad (6)$$

où

$$t_M = \cosh^{-1}(\eta_M/r) \quad (7)$$

$G(r, \eta_M)$ tend uniformément vers $F(r)$ lorsque η_M tend vers l'infini.

Les expressions (7) et (5) définissent l'algorithme L.

Formulation de l'algorithme A

La détermination des composantes d'ordre élevé de la transformée H_0^1 peut être effectuée à l'aide du développement asymptotique de la fonction de Hankel pour les grands arguments. Dans ce développement nous allons uniquement retenir le premier terme mais nous montrons, dans la réf. [18], qu'il est possible d'améliorer les résultats en incluant le deuxième terme.

On peut écrire, pour les grands arguments :

$$H_0^1(z) = (2/\pi z)^{1/2} \exp(iz - i\pi/4) + O(1/z^{3/2}) \quad (8)$$

Si l'on porte cette expression dans la définition (2) on obtient :

$$F^{(1)}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \zeta^{1/2} \exp(i\zeta r - i\pi/4) d\zeta \quad (9)$$

L'approximation asymptotique au premier ordre de la transformée H_0^1 apparaît ici sous la forme d'une intégrale de Fourier qui peut être directement évaluée à l'aide d'une FFT.

3 - DISCRETISATION

L'application pratique des expressions précédentes nécessite l'établissement de formulations discrètes.


 UN ALGORITHME DUAL POUR LE CALCUL RAPIDE DE LA TRANSFORMÉE H_0^1

Ces formulations sont obtenues sans difficultés (voir réf. [18]). Nous donnons uniquement les principales définitions et les résultats.

Soit $\Delta\zeta$ la période d'échantillonnage et $\hat{f}(n)$ la séquence discrète obtenue par échantillonnage périodique de la fonction $f(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= f(n\Delta\zeta), \quad n = 0, \dots, P/2 \\ \hat{f}(n) &= f[(n - P)\Delta\zeta], \quad n = P/2 + 1, \dots, P - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Nous allons chercher à estimer la transformée $F(r)$ pour un ensemble de valeurs discrètes de r

$$r_l = l \Delta r, \quad l = 1, \dots, L$$

Il est commode (mais facultatif pour l'algorithme L) de relier les périodes $\Delta\zeta$ et Δr par une expression de la forme $\Delta\zeta \Delta r = 2\pi/N$ où N est un entier divisant exactement P . La règle habituelle pour les procédures duales est en fait de prendre N égal au nombre P d'échantillons.

Nous définissons à présent la transformée H_0^1 échantillonnée et normalisée

$$\tilde{F}(l) = F(l\Delta r) / (\Delta\zeta)^2, \quad l = 1, \dots, L \quad (11)$$

et nous représentons par $F(l)$ les valeurs estimées de cette séquence calculées numériquement.

Les expressions discrètes qui permettent le calcul de $F(l)$ suivant les algorithmes L et A sont données respectivement aux tableaux 1 et 2.

Procédure duale

A la première étape de la procédure duale les valeurs estimées asymptotiques sont obtenues à l'aide de l'algorithme A. On commence alors le calcul de la transformée à l'aide de l'algorithme L en partant de l'échantillon correspondant à $l = 1$.

A chaque étape, les transformées estimées sont comparées. Lorsque la différence entre les valeurs estimées devient suffisamment faible, on arrête les calculs par l'algorithme L et on retient comme valeurs estimées de la transformée H_0^1 celles obtenues par l'algorithme A.

4 - RESULTATS DE CALCUL ET DISCUSSION

Plusieurs cas tests sont déjà présentés dans la réf. [18]. Nous utilisons ici une fonction test particulièrement importante pour les applications à la propagation d'onde. Considérons la fonction :

$$f(\zeta) = \frac{a}{\zeta - a} \quad (12)$$

où a est une constante réelle.

La fonction $f(\zeta)$ possède un pôle simple sur le chemin d'intégration (l'axe réel). On peut facilement montrer, à l'aide du théorème des résidus, que la transformée H_0^1 de $f(\zeta)$ s'écrit sous la forme :

$$F(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\zeta - a} H_0^1(\zeta r) d\zeta = i\pi a^2 H_0^1(ar) \quad (13)$$

D'un point de vue numérique, la singularité de la fonction $f(\zeta)$ au point $\zeta = a$ pose un problème sérieux. En effet, nous avons déjà montré par ailleurs (Candel [19]) et pour une situation analogue que le résultat de l'intégration dépendait essentiellement de la position respective du pôle et des points d'échantillonnage. Lorsque le pôle se trouve sur l'axe réel il doit être au milieu d'un intervalle d'échantillonnage si l'on veut obtenir un résultat convenable par intégration numérique directe.

Nous prenons donc la constante a sous la forme $a = (M + 1/2)\Delta\zeta$ où M est un nombre entier. La transformée H_0^1 échantillonnée et normée, définie par

(11), s'écrit dans ce cas :

$$\tilde{F}(l) = i\pi(M + \frac{1}{2})^2 H_0^1 \left[2\pi(M + \frac{1}{2}) l/N \right] \quad (14)$$

Les séquences de valeurs correspondant à cette expression sont représentées aux figures 1 et 2 par des lignes continues pour deux valeurs de M . Les valeurs estimées numériquement, à l'aide de la procédure duale combinant les algorithmes L et A, sont représentées par des symboles.

Les valeurs estimées coïncident presque partout avec les valeurs exactes de la transformée H_0^1 . Les différences les plus importantes sont observées pour les toutes premières composantes de la transformée (pour $l \leq 4$).

Pour compléter cette comparaison, la figure 3 représente les modules des transformées exacte et numérique calculées pour $M = 80$. Les modules sont donnés en dB avec comme référence $\tilde{F}(1)$.

Là encore, on peut observer l'excellent accord entre les valeurs exactes et calculées.

Ainsi, dans un cas test particulièrement délicat constitué par une fonction singulière comportant un pôle simple, la transformée H_0^1 numérique donne des résultats très satisfaisants.

La transformée H_0^1 peut être utilisée avec certaines précautions pour traiter des problèmes d'acoustique sous marine et, en particulier, le cas de la propagation en eau peu profonde. Les difficultés les plus sérieuses de ce type de problèmes sont associées aux pôles situés sur l'axe réel (l'axe d'intégration). Nous avons montré ici qu'un traitement numérique direct pouvait être envisagé. Plusieurs problèmes de propagation sous marine ont déjà été traités à l'aide de la transformée H_0^1 et les résultats seront présentés par ailleurs.

REMERCIEMENTS

Une partie de ce travail a été effectué au cours du stage de fin d'étude d'ingénieur de E. Boussarie et J.M. Loesch. Ce stage a été effectué au département DSM de la Société SINTRA-Alcatel. Une partie de l'étude a bénéficié d'un contrat de la DRET.

REFERENCES

- [1] - A.E. Siegman, Opt. Lett., 1 (1977), 13
- [2] - J.D. Talman, J. Comput. Phys., 29 (1978), 35.
- [3] - J. Brunol and P. Chavel, Proc. IEEE (1977), 1089.
- [4] - E. Cavanagh and B. Cook, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 27 (1979), 361.
- [5] - J. Nachamkin and C.J. Maggiore, J. Comput. Phys., 37 (1980), 41.
- [6] - J.E. Miraglia, R.D. Piacentini and R.D. Rivarola, Comput. Phys. Commun., 19 (1980), 299.
- [7] - H.K. Johansen and K. Sorensen, Geophysical Prospecting, 27 (1979), 876.
- [8] - A.V. Oppenheim, G.V. Frisk, and D.R. Martinez, J. Acoust. Soc. Am., 68 (1980), 523.
- [9] - S.M. Candel, Comput. Phys. Commun., 23 (1981), 343.
- [10] - S.M. Candel, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 29 (1981), 963.
- [11] - D.R. Mook, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 31 (1983), 979.
- [12] - S.M. Candel, Rech. Aerosp., (1981), 315.
- [13] - S.M. Candel, J. Comput. Phys., 44 (1981), 243.
- [14] - S.M. Candel, Proceedings of IEEE, 1982 Int. Conf. on Acoustics Speech and Signal Processing, IEEE, New York (1982), 2042.
- [15] - F.R. Di Napoli and R.L. Deavenport, J. Acoust. Soc. Am., 67 (1980), 92.



UN ALGORITHME DUAL POUR LE CALCUL RAPIDE DE LA TRANSFORMEE H_0^1

[16] - L.B. Felsen and N. Marcuvitz, "Radiation and Scattering of waves", Prentice Hall, Englewood Cliffs (1973).
 [17] - W. Aki and P.G. Richards, "Quantitative Seismology, Vol. 1", Freeman, San Francisco, 1980.
 [18] - S.M. Candel, E. Boussarie, J.M. Loesch and A. Lelarge, soumis pour publications au J. Computat. Phys. (1984).
 [19] - S.M. Candel, Proceedings of the International Symposium on Recent Advances in Aerodynamics and Acoustics, Stanford U. (1983).

TABLEAU 1
 EXPRESSIONS CONDUISANT A LA TRANSFORMEE H_0^1
 (ALGORITHME L)

1. Soit $f(\zeta)$ la fonction à transformer
2. Les périodes d'échantillonnage $\Delta\zeta$ et Δt sont choisies telles que $\Delta\zeta \Delta t = 2\pi/N$
3. La taille P de la FFT est choisie telle que $P = 2^Y$ (Y est un entier) avec $P \geq N$
4. Le nombre d'échantillons L à déterminer est fixé, $L \leq N/2$.
5. Le nombre S de segments d'intégration est fixé. S est typiquement de l'ordre de N.
6. La séquence $\hat{h}(n)$ est définie par
 $\hat{h}(n) = f(n\Delta\zeta)$, $n = 0, \dots, P/2$
 $\hat{h}(n) = f[(n-P)\Delta\zeta]$ ($n-P$), $n = P/2 + 1, \dots, P-1$.
7. La transformée de Fourier discrète de $\hat{h}(n)$ est calculée

$$\hat{\phi}(k) = \sum_{n=0}^{P-1} \hat{h}(n) \exp(i 2\pi kn/P), k = 0, \dots, P-1$$
8. La valeur de l est initialisée. $l = 1$.
9. La valeur maximum de t et l'incrément Δt sont calculés
 $t_{MAX} = \cosh^{-1}(N/2l)$
 $\Delta t = t_{MAX}/S$
10. Les points d'intégrations sont définis
 $t_j = (j + 1/2) \Delta t$ pour $j = 0, \dots, S-1$
11. Les indices $k(j,l)$ sont calculés
 $k(j,l) = \text{int} [l(P/N) \cosh(t_j) + 1/2]$
 où $\text{int}(\cdot)$ désigne la partie entière de son argument.
12. La valeur estimée de la transformée H_0^1 est obtenue à l'aide de :

$$\hat{F}(l) = (2 \Delta t / i\pi) \sum_{j=0}^{S-1} \hat{\phi}[k(j,l)]$$
13. Si $l < L-1$, l est incrémenté d'une unité $l = l + 1$ et le calcul reprend à l'étape 9.

TABLEAU 2
 EXPRESSIONS CONDUISANT A LA TRANSFORMEE H_0^1
 (ALGORITHME A)

1. Soit $f(\zeta)$ la fonction à transformer
2. La période d'échantillonnage $\Delta\zeta$ est choisie
3. La taille N de la FFT est choisie telle que $N = 2^Y$ (Y est un entier). Si l'algorithme A est utilisé dans une procédure duale, la valeur de N doit être la même que celle choisie pour l'algorithme L.
4. La séquence $\hat{h}(n)$ est déterminée
 $\hat{h}(n) = f(n\Delta\zeta) n^{\frac{1}{2}} \exp(-i\pi/4)$, $n = 0, \dots, N/2$
 $\hat{h}(n) = f[(n-N)\Delta\zeta] (N-n)^{\frac{1}{2}} \exp(i\pi/4)$, $n = N/2 + 1, \dots, N-1$.
5. La transformée de Fourier discrète de $\hat{h}(n)$ est calculée

$$\hat{\psi}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(n) \exp(i 2\pi kn/N), k = 0, \dots, N-1$$
6. Les valeurs estimées de la transformée H_0^1 sont déterminées par :

$$\hat{F}^1(l) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{N}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(l), l = 1, \dots, N/2$$

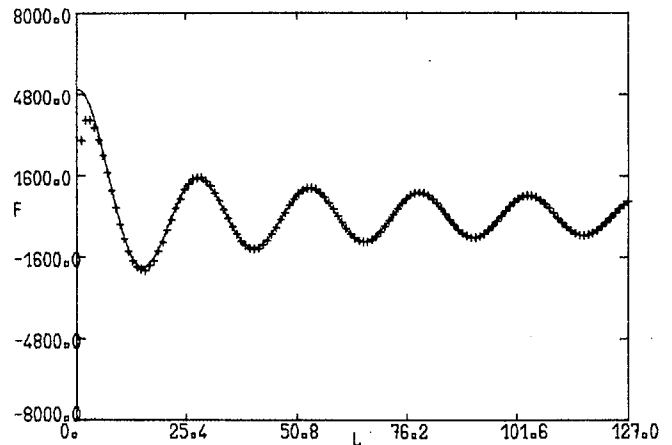
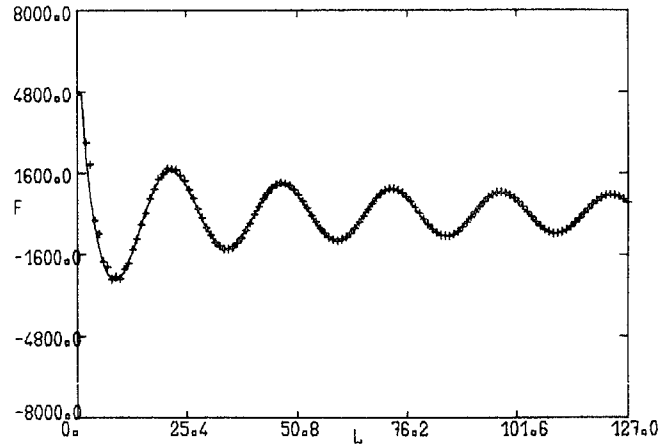


Fig. 1 - Transformées H_0^1 de la fonction test $f(\zeta) = a/(\zeta-a)$. La transformée exacte est représentée par une ligne continue. Les valeurs estimées apparaissent sous forme de symboles. La constante a est donnée sous la forme $a = (M + 1/2)\Delta\zeta$. $M = 40$. Les paramètres de calcul sont $P = N = 1024$, $S = 512$, $L = 512$.
 (a) partie réelle de la transformée,
 (b) partie imaginaire de la transformée.

UN ALGORITHME DUAL POUR LE CALCUL RAPIDE DE LA TRANSFORMEE H_0^1

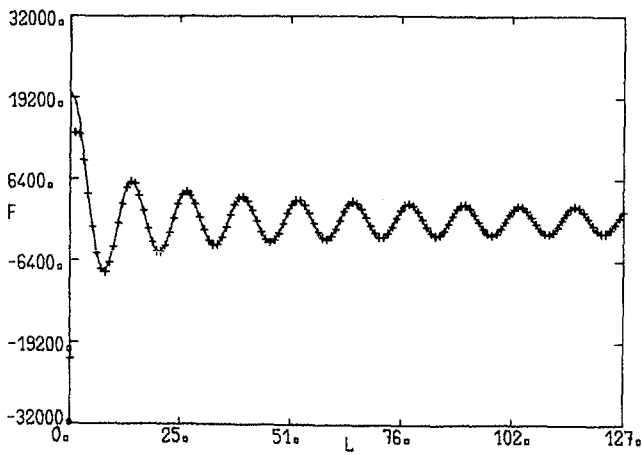
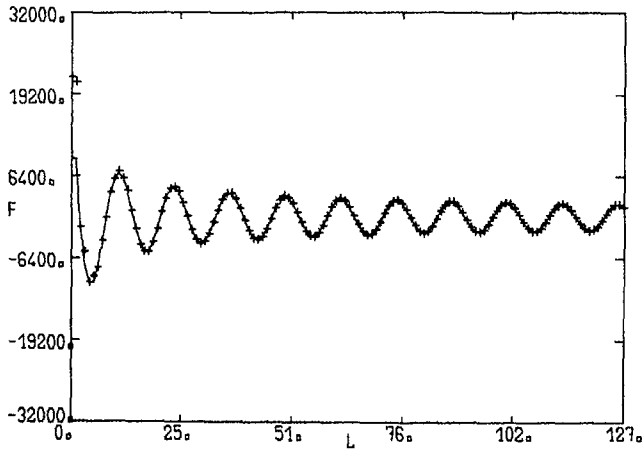


Fig. 2 - Meme légende que pour la Fig. 1. Ici $M = 80$.

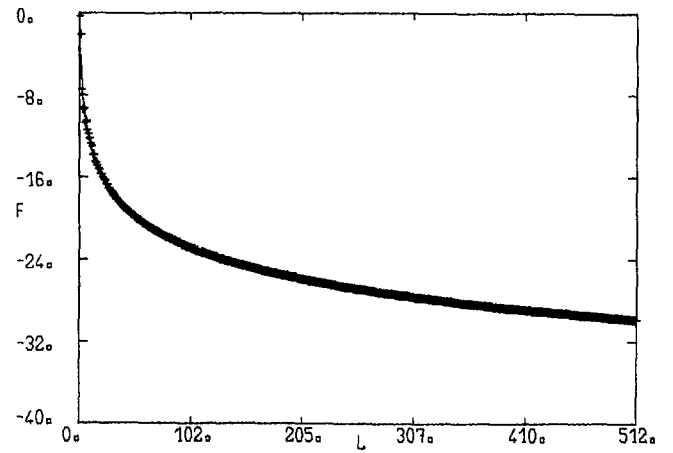


Fig. 3 - Modules des transformées H_0^1 de la fonction test $f(\zeta) = a/(\zeta-a)$. Le calcul est effectué dans les conditions de la Fig. 2. Les modules sont représentés en dB rapportés à la valeur $|F(1)|$. Le module exact est représenté par une ligne continue, le module estimé apparaît sous forme de symboles.

