

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

FACTORISATION SPECTRALE ET REPRESENTATION CONJOINTE DE WIGNER-VILLE  
DANS LE CAS DES SIGNAUX ASYMPTOTIQUES

B. ESCUDIE

P. FLANDRIN

Laboratoire Traitement du Signal - LA 346b CNRS I.C.P.I. 25 rue du Plat 69288 LYON Cedex 02

---

## RESUME

Le développement des méthodes d'analyse en temps et fréquence permet d'étudier des signaux aléatoires harmonisables et des signaux certains modulés. Une voie commode pour condenser l'information, obtenue à chaque date  $t$ , est d'utiliser la factorisation spectrale par voie AR ou ARMA. Ce procédé traitant de grandeurs positives conduit à étudier le carré de la Représentation conjointe. Celle-ci est le plus souvent du type Pseudo WIGNER-VILLE lissé, qui permet d'analyser sur une fenêtre donnée et d'éviter les termes d'interaction. La formalisation de cette quantité pour des signaux asymptotiques montre que la factorisation sera d'autant plus commode que l'on disposera d'un signal à loi linéaire pendant la durée d'observation. Dans les cas de loi de modulation non linéaire sur cette durée la représentation s'exprime à l'aide d'une fonction d'AIKY à comportement nettement dissymétrique.

## SUMMARY

Time and frequency joint representations are well suited techniques to analyse non stationary random processes and wideband modulated signals. A way to get data compression at each time  $t$  is to use spectral factorization, such as AR or ARMA techniques. These techniques are dealing with positive data as spectrum densities. A way to get such data compression is to factorize the square modulus of the time-frequency representation. An easy and convenient representation is the so called "Pseudo WV" one or the smoothed one, which represents the weighted signal as a function of  $t$  and  $\omega$  and avoids the cross terms due to multiple components of asymptotic signals. Factorization techniques may be easily used if during the observation interval the frequency law is very near a linear one. If this law is not a linear one the joint representation may be expressed by Airy function.



INTRODUCTION

Le développement actuel des techniques d'étude des phénomènes non stationnaires ou des milieux à paramètres variables dans le temps favorise diverses méthodes d'étude :

- la Représentation conjointe en temps et fréquence des signaux harmonisables, et notamment la représentation de WIGNER-VILLE [1] [2]
- la Représentation des signaux à l'aide des procédés de factorisation utilisant les modèles AR et ARMA à paramètres variables permettant un type particulier d'analyse spectrale [3] [4]

Dans cette double perspective il peut apparaître intéressant de formaliser, à date t donnée, le contenu fréquentiel de la Représentation de WIGNER-VILLE à l'aide des méthodes de factorisation. Ces méthodes conçues par principe en vue de l'analyse spectrale conduisent tout naturellement à modéliser par voie AR ou ARMA le carré de la Représentation conjointe de WIGNER VILLE [5]

Il peut paraître contradictoire de vouloir unir dans un même procédé deux méthodes d'analyse dont l'un est paramétrique et l'autre pas. Cette contradiction n'est qu'apparente, car la méthode de factorisation spectrale permet ici de condenser l'information contenue dans la représentation conjointe par la constellation pôle zéro utilisée.

1) PRINCIPE DU PROCÉDE RETENU

Les méthodes de factorisation cherchent à représenter la densité spectrale  $\mathcal{S}_x(\nu)$  du signal étudié à l'aide d'un filtrage linéaire :

$$\mathcal{S}_x(\nu) = \mathcal{S}_0 |h(\nu)|^2$$

où  $\mathcal{S}_0$  est la densité spectrale d'un bruit à large bande ou à corrélation microscopique devant la réponse du filtre. Si le signal X(t) est du type déterministe ceci revient à chercher le filtre de réponse  $H(t) \xrightarrow{t} h(\nu)$ , tel que : [5] [6]

$$H(t) = X(t)$$

On retient dans la version discrète échantillonnée deux types de filtres linéaires :

- le filtre AR ou polynômial :  $\mathcal{H} = Q(z^{-1})$  tous pôles
- le filtre MA ou transversal :  $\mathcal{H} = P(z^{-1})$  tous zéros

et la version combinée de type ARMA :

$$\mathcal{H}(z) = P(z^{-1}) \cdot Q(z^{-1})$$

Utiliser les méthodes de modélisation AR ou ARMA implique l'étude de  $\mathcal{S}_x(\nu)$  densité spectrale du signal X(t). C'est une grandeur essentiellement positive.

2 Modéliser à la date  $t_0$  le contenu fréquentiel  $\rho_z(t_0, \nu; 1)$  associé au signal analytique Z lié à X par l'un des procédés ci-dessus nécessite une grandeur positive telle que :

$$|\rho_z(t_0, \nu; 1)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} z(t_0 + \frac{\tau}{2}) z^*(t_0 - \frac{\tau}{2}) e^{-2imv\tau} d\tau \right|^2 = |h(\nu)|^2 \mathcal{S}_0$$

Pour réaliser la modélisation il faut considérer à la date  $t_0$  :

$$|\rho_z(t_0, \nu; 1)|^2 = |h(\nu)|_{t_0}^2 \mathcal{S}_0$$

où  $h(\nu)_{t_0}$  est la fonction de transfert du filtre équivalent qui représente à toute date t.

l'évolution du signal, supposé modulé en amplitude et fréquence, ou localement stationnaire harmonisable dans le cas aléatoire.

Il faut noter en ce point de l'exposé que dans la plupart des cas on étudie par analyse en temps et fréquence des signaux modulés multicomposantes, ou des processus localement stationnaires possédant un comportement de type "résonnant" même s'il est évolutif. Par conséquent il faut entendre ici distribution comportant des pics fréquentiels modélisables par des filtres de type accordé.

2) PROPRIETES DU CARRE DE LA REPRESENTATION CONJOINTE

a - liens avec la fonction d'Ambiguïté

Nous présentons ici quelques résultats généraux relatifs au module carré des Représentations conjointes de valeur réelle caractérisées par la fenêtre d'observation  $f(n, \tau)$ . [7]. Rappelons que  $\rho_z(t, \nu; f)$  a pour propriété principale de distribuer soit l'énergie du signal Z, soit sa puissance instantanée dans le plan temps-fréquence. [7]. La définition de  $\rho_z(t, \nu; f)$  est la suivante :

$$\rho_z(t, \nu; f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(m, \tau) e^{2im(u-t)} Z(u + \frac{\tau}{2}) Z^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-2imv\tau} dm d\tau d\tau$$

avec  $f(m, \tau) = f^*$ ,  $|f| \leq 1 = f(0, 0)$

La contrainte  $f = f^*$  n'est nécessaire que si on impose  $\rho_z \in \mathbb{R}$ . Puisque nous discutons ici du module carré de  $\rho_z$  cette contrainte n'est pas nécessaire. Seule la propriété  $|f(m, \tau)| \leq f(0, 0) = 1$  nous importe pour assurer l'existence de  $\rho_z$  et la propriété de distribution énergétique dans le plan :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_z(t, \nu; f) dt d\nu = \langle z, z \rangle = E_z$$

Prenant en compte le fait que :

$$\rho_z(t, \nu; f) \xrightarrow{t, \nu} f(\theta, \Phi) \cdot \chi_z^*(\theta, \Phi)$$

où  $\chi_z$  est la fonction d'Ambiguïté symétrique définie par J.VILLE et S.M. SUSSMANN [8], il vient :

$$|\rho_z(t, \nu; f)|^2 \xrightarrow{t, \nu} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_z^*(\theta, \Phi) = \Gamma_w(\theta, \Phi)$$

où  $\Gamma$  est la fonction de corrélation bidimensionnelle de W telle que :

$$|\rho_z(t, \nu; f)|^2 \xrightarrow{t, \nu} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\theta', \Phi') f^*(\theta - \theta', \Phi - \Phi') \chi_z^*(\theta', \Phi') \chi_z(\theta - \theta', \Phi - \Phi') d\theta' d\Phi'$$

Ceci conduit immédiatement à la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\rho_z(t, \nu; f)|^2 dt d\nu = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\theta', \Phi')|^2 |\chi_z(\theta', \Phi')|^2 d\theta' d\Phi'$$

Si  $|f| \leq 1$  c'est-à-dire si f appartient à la classe unimodulaire il vient :

$$f = e^{ig}, \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_z(t, \nu; f)|^2 dt d\nu = \int_{\mathbb{R}^2} |\chi_z(\theta', \Phi')|^2 d\theta' d\Phi' = E_z^2$$

$|\rho_z(t, \nu; f)|^2$  est alors une DENSITE en temps et fréquence qui répartition dans le plan (t, nu) le carré de l'énergie  $E_z^2 = \|z\|^4$  associée au signal Z. Dans la classe des fonctions d'observation unimodulaires, le cas f = 1 (WIGNER-VILLE) joue un rôle particulier. Les propriétés en sont les suivantes. En particulier :

$$|\rho_z(t, \nu; 1)|^2 \xrightarrow{t, \nu} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_z^*(\theta', \Phi') \chi_z(\theta', \Phi', \Phi) d\theta' d\Phi'$$

$\Gamma_{\chi_z^*}$  étant une fonction de corrélation possède la propriété de symétrie hermitique,  $\Gamma_{\chi_z^*} = \Gamma_{\chi_z}^*$  soit :

$$|\rho_z(t, \nu; 1)|^2 \xrightarrow{t, \nu} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_z(\theta', \Phi') \chi_z^*(\theta + \theta', \Phi + \Phi') d\theta' d\Phi'$$

Par définition  $\rho_z(t, \nu; 1)$  est liée par transformation de FOURIER à la Représentation bitemporelle  $R_z(t, \tau; 1)$  :

$$\rho_z(t, \nu; 1) \xrightarrow{t, \nu} R_z(t, \tau; 1) = Z(t + \frac{\tau}{2}) Z^*(t - \frac{\tau}{2})$$

FACTORISATION SPECTRALE ET REPRESENTATION CONJOINTE DE WIGNER-VILLE  
DANS LE CAS DES SIGNAUX ASYMPTOTIQUES

B. ESCUDIE

P. FLANDRIN

Par transformation de FOURIER, il vient :

$$\Gamma_{\chi_z^*}(0, \Phi) \stackrel{\Phi}{\leftarrow} \frac{t}{\nu} |\rho_z(t, \nu; 1)|^2 \stackrel{\nu}{\leftarrow} R_z(t, \tau)$$

2) ECRITURE DANS LE CAS ASYMPTOTIQUE DE  $\rho_z(t, \nu; 1)$  :

Les problèmes de factorisation étudiés ici sont liés à l'analyse en temps et fréquence de signaux asymptotiques ; leur amplitude  $A(t)$  et leur loi de fréquence instantanée  $\nu_i(t)$  évoluent lentement à l'échelle de la fréquence centrale  $\nu_c$ . Autrement dit ce sont des signaux tels que :

$$\frac{d}{dt} \log A(t) = \frac{\dot{A}}{A} \ll \dot{\Phi}, \quad \frac{\dot{A}}{A\dot{\Phi}} \ll 1$$

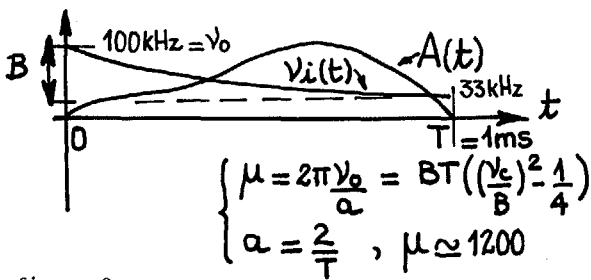


figure 0

comme la figure 0 le montre.

Le signal analytique  $Z(t) = Ae^{i\Phi(t)}$  conduit à la Représentation bitemporale suivante :

$$\rho_z(t, \nu; 1) \stackrel{\nu}{\leftarrow} R_z(t, \tau; 1) = A(t + \frac{\tau}{2}) A(t - \frac{\tau}{2}) e^{i\mu L(t, \tau)}$$

avec  $\mu L(t, \tau) = \Phi(t + \tau/2) - \Phi(t - \tau/2)$  est le paramètre caractéristique traduisant la situation asymptotique. Ce terme  $e^{i\mu L(t, \tau)}$  peut créer une distribution de DIRAC dans le plan  $(t, \nu)$ . En effet considérons le cas de la modulation linéaire en fréquence où  $\Phi(t) = 2\pi(\nu_0 t + \alpha t^2/2)$  on a : [9]

$$\frac{1}{2\pi} \mu L(t, \tau) = \tau(\nu_0 + \alpha t)$$

$$\rho_z(t, \nu; 1) = \left( \delta(n - (\nu_0 + \alpha t)) * \int_R A(t + \frac{\tau}{2}) A(t - \frac{\tau}{2}) e^{-2im\tau} d\tau \right)_{(t, \nu)}$$

ce que l'on écrit :

$$\rho_z(t, \nu; 1) = \rho_A(t, \nu - \nu_i(t); 1)$$

avec  $\rho_A(t, \nu; 1)$  représentation de WIGNER VILLE de l'amplitude  $A(t)$  du signal analytique associé.

Une technique possible est de réaliser une analyse en temps et fréquence conduite sur une fenêtre de pondération centrée sur la date  $t$ . C'est la Représentation conjointe dite pseudo WIGNER-VILLE [10][11]. Pour ce type de représentation la fenêtre d'observation  $f(n, \tau)$  s'exprime comme suit : [10]

$$f(n, \tau) = 1.Q(\tau), \quad p(n) = 1$$

En effet en écrivant la représentation conjointe de  $H(u - t)Z(u)$  on obtient en posant :

$$H(u - t + \frac{\tau}{2}) H^*(u - t - \frac{\tau}{2}) = |H(\frac{\tau}{2})|^2$$

(symétrie hermitique ou parité). L'expression de  $\rho_z(t, \nu; pQ)$  est alors :

$$\rho_z(t, \nu; pQ) \stackrel{\nu}{\leftarrow} Q(\tau) \int_R Z(t + \frac{\tau}{2}) Z^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-2im\tau} d\tau$$

3) ETUDE DU CAS OU  $\nu_i(t)$  EST UNE LOI LINEAIRE

a - Représentation PWV

L'expression suivante traduit l'hypothèse d'une amplitude  $A(t)$  constante sur la durée de  $H$  et le caractère linéaire de  $\nu_i(t)$ , assimilée à  $\nu_0 + \alpha t$  où  $\nu_0 = \nu_i(u)$  à la date  $u = t$  :

$$\rho_z(t, \nu; PWV) \stackrel{\nu}{\leftarrow} Q(\tau) \int_R Z(t + \frac{\tau}{2}) Z^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-2im\tau} d\tau$$

La figure 1 illustre ce fait :

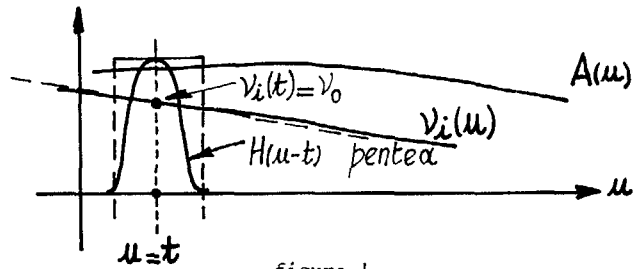


figure 1

Ceci nous fournit l'expression finale de  $\rho_z(t, \nu; PWV)$  :

$$\rho_z(t, \nu; PWV) = A_t^2 \left\{ 2 \Gamma_h^2(m) * \delta(n - (\nu_0 + \alpha t)) \right\} = 2 A_t^2 \Gamma_h^2(\nu - (\nu_0 + \alpha t))$$

le carré de cette expression se met sous la forme suivante en supposant que  $\Gamma_h^2(m)$  est une quantité réelle :

$$\rho_z^2(t, \nu; PWV) = A_t^4 \Gamma_h^2(\nu - (\nu_0 + \alpha t)) = A_t^4 \Gamma_g^2(\nu - (\nu_0 + \alpha t))$$

En notant que  $\Gamma_h^2$  est le carré d'une fonction de corrélation, c'est-à-dire dans la même classe on pose :

$$\Gamma_h^2(m) = \Gamma_g^2(m)$$

Il nous faut remarquer que cette quantité positive est paire et décroissante. Son maximum est centré à la fréquence  $\nu = \nu_i(t)$ . La modélisation d'une telle quantité par le module carré du gain complexe d'un filtre accordé à la fréquence  $\nu = \nu_i(t)$  est donc possible compte-tenu des propriétés obtenues.

b - Etude de la Représentation PWV lissée

Nous allons maintenant étudier le cas  $f(n, \tau) = p(n)Q(\tau)$  qui correspond à la Représentation de WIGNER VILLE de type pseudo WV lissé. Dans ce cas on a :

$$\rho_z(t, \nu; f=pQ) \stackrel{\nu}{\leftarrow} |H(\frac{\tau}{2})|^2 \int_R P(u-t) Z(u + \frac{\tau}{2}) Z^*(u - \frac{\tau}{2}) du$$

avec  $p(n) \stackrel{n}{\leftarrow} P(\theta)$ . Ce terme introduit un filtrage par convolution temporelle de  $P$  avec la forme bilinéaire en  $Z$ . Ce filtrage étant le plus souvent de type passe-bas par moyenne temporelle cette représentation est dite lissée. Un tel filtrage est utilisé pour éliminer les termes d'interaction, ou fantômes apparaissant dans le cas de signaux multicomposantes [1].

$$\rho_z(t, \nu; pQ) \stackrel{\nu}{\leftarrow} \int_R A(t + \frac{\tau}{2}) A(t - \frac{\tau}{2}) P(u-t) e^{i[\Phi(u + \frac{\tau}{2}) - \Phi(u - \frac{\tau}{2})]} du$$

Sous les mêmes hypothèses que précédemment on obtient :

$$\rho_z(t, \nu; pQ) \stackrel{\nu}{\leftarrow} A^2(t) |H(\frac{\tau}{2})|^2 \int_R P(u-t) e^{i2m\tau u} du \cdot e^{2i\pi\nu\tau}$$

ce qui conduit à l'expression suivante en remarquant que  $p(n) \stackrel{n}{\leftarrow} P(\theta)$  :

$$\rho_z(t, \nu; pQ) \stackrel{\nu}{\leftarrow} A^2(t) |H(\frac{\tau}{2})|^2 \cdot p(-\alpha\tau) \cdot e^{i2m\alpha t} \cdot e^{i2m\nu\tau}$$



où  $f = p(n) \cdot |H(\omega)|^2$ ,  $\alpha$  est la pente de modulation de fréquence relative à  $\nu_i(\omega)$ , loi de modulation de fréquence observée à la date centrale  $t$  caractérisant la fenêtre  $P(\omega)$ . En posant :

$$W(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi n\tau} p(-\alpha\tau) d\tau, \quad \alpha \sim \text{Hz/s}$$

soit  $W(n) = \frac{1}{|\alpha|} P(n/\alpha)$  il vient :

$$\rho_Z(t, \nu; p|H|^2) = A_t^2 \left\{ \left[ \Gamma_h^* * W_n^* \delta(n - \nu_0 - \alpha t) \right] (t, \nu) \right\}$$

soit encore :

$$\rho_Z(t, \nu; p|H|^2) = \frac{A_t^2}{\alpha} \left( \Gamma_h^* * P\left(\frac{n}{\alpha}\right) \right)_{(\nu - \nu_0 - \alpha t)}$$

Si l'on admet que  $P$  est réel et appartient à la classe des fonctions de corrélation  $\{\mathcal{E}\}$  :

$$|P| \leq P(0), \quad P = \overset{\#}{P} = \overset{*}{P}(-u)$$

$$P(u) = \Gamma_{\nu}^*(u)$$

l'expression de  $\rho_Z(t, \nu; p|H|^2)$  devient alors :

$$\rho_Z(t, \nu; p|H|^2) = \frac{A_t^2}{\alpha} \left( \Gamma_h^* * \Gamma_{\nu} \right)_{(\nu - \nu_0 - \alpha t)}$$

quantité qui est centrée en  $\nu = \nu_i(t)$  dans le plan  $(t, \nu)$ . Le module carré de cette quantité est maximal et pair autour du point  $(\nu = \nu_i, t)$  du plan temps fréquence.

$$|\rho_Z(t, \nu; p|H|^2)|^2 = \frac{A_t^4}{\alpha^2} \left| \left( \Gamma_h^* * \Gamma_{\nu} \right)_{(\nu - \nu_i(t))} \right|^2$$

En remarquant que  $(\Gamma_h^* * \Gamma_{\nu})$  est une fonction d'auto-corrélation que l'on note  $\Gamma_{\gamma}$  on a :

$$|\rho_Z(t, \nu; p|H|^2)|^2 = \frac{A_t^4}{\alpha^2} \left| \Gamma_{\gamma}(\nu - \nu_i(t)) \right|^2$$

L'intérêt de cette formulation est de montrer que la modélisation doit fournir une fonction de transfert telle qu'elle corresponde à un filtre accordé à la fréquence  $\nu = \nu_i(t)$ .

4) ETUDE DU CAS OÙ  $\nu_i(t)$  EST UNE LOI QUELCONQUE SUR LA DUREE D'OBSERVATION:

Un résultat dû à P. FLANDRIN indique pour un signal asymptotique que : [9]

$$\rho_{\mathcal{E}}(t, \nu; 1) \approx \tilde{\varepsilon}(t) Ai\left[\frac{\nu - \nu_i(t)}{\tilde{\varepsilon}(t)}\right], \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \left(\frac{\nu_i^{(2)}(t)}{32\pi^2}\right)^{1/3}$$

où  $e^{i\Phi(t)}$  est le signal unimodulaire associé à  $Z$ ,  $Z = e^{i\Phi} |z|$ .

Si  $\nu_i^{(2)}(t) \rightarrow 0$ , cas de la courbure nulle on a :

$$\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}^{-1} Ai\left(\frac{x}{\tilde{\varepsilon}}\right) = \delta(x)$$

En considérant le cas de la Représentation conjointe WIGNER-VILLE de type lissé ( $f = pQ$ ) on obtient pour une loi de modulation non linéaire :

$$\rho_Z(t, \nu; pQ) \Rightarrow Q(\omega) \int_{\mathbb{R}} P(u-t) Z(u+\frac{t}{2})^* Z(u-\frac{t}{2}) du, \quad Z = Ae^{i\Phi}, \quad Q = |H(\omega)|^2$$

$$\text{et : } \rho_Z(t, \nu; pQ) = \left( \rho_A(t, \nu; 1) * \rho_{\mathcal{E}}(t, \nu; 1) \right) (t, \nu)$$

en utilisant le résultat précédent  $\rho_Z$  s'exprime à l'aide de la fonction d'AIROY :

$$\rho_Z(t, \nu; 1) \approx \tilde{\varepsilon}^{-1}(t) \left[ \rho_A(t, \nu; 1) * Ai\left(\frac{\nu - \nu_i(t)}{\tilde{\varepsilon}(t)}\right) \right] (t, \nu)$$

Toute représentation conjointe  $\rho_Z(t, \nu; f)$  s'exprime à partir de celle de WIGNER-VILLE par convolution bidimensionnelle puisque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_Z(t, \nu; f) \stackrel{t \rightarrow \Phi}{\underset{\nu \rightarrow \Phi}{\rightleftharpoons}} f(\theta, \Phi) \cdot \chi_Z^*(\theta, \Phi) \\ \rho_Z(t, \nu; 1) \stackrel{t \rightarrow \Phi}{\underset{\nu \rightarrow \Phi}{\rightleftharpoons}} \chi_Z^*(\theta, \Phi) \end{array} \right.$$

$$\text{Soit : } \rho_Z(t, \nu; f) = \left[ \rho_Z(t', \nu'; 1) * \mathcal{F}(t, \nu) \right] (t, \nu)$$

où  $\mathcal{F}(\theta, \Phi)$  est la transformée de FOURIER de  $f(n, \tau)$ . Ceci nous conduit à :

$$\mathcal{F}(t, \nu) = P(t) \cdot q(\nu) = \tilde{P}(t) \cdot q(\nu), \quad P \in \mathcal{R}$$

d'où :

$$\rho_Z(t, \nu; p|H|^2) = \left[ \rho_Z(t', \nu'; 1) * P(t') \cdot q(\nu') \right] (t, \nu)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme ci-dessous :

$$\rho_Z(t, \nu; pQ) = \int_{\mathbb{R}^2} P(t-t') q(\nu - \nu') \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(t')} \int_{\mathbb{R}} \rho_A(t', \nu'; 1) Ai\left[\frac{\nu - \nu_i}{\tilde{\varepsilon}}\right] d\nu' d\nu' \right) dt' d\nu'$$

effets de filtrage dus au procédé PWVE      effets dus à A(t) sur Ai  $\left(\frac{\nu - \nu_i}{\tilde{\varepsilon}}\right)$

Si on admet que  $A(t)$  évolue lentement à l'échelle de la fréquence centrale du signal, on est en droit de considérer que l'effet de convolution dû à  $\rho_A$  est celui d'une fonction "impulsive" à durée brève devant le lobe principal de  $Ai(x)$  (cf. figure 2)

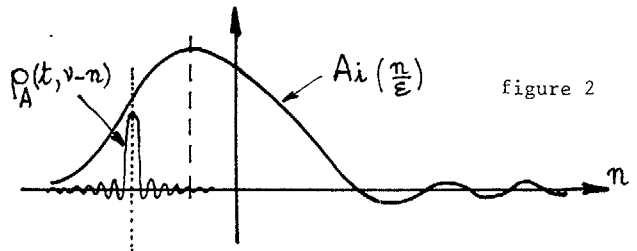


figure 2

Dans une telle perspective on peut admettre que :

$$\left[ \rho_A * \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} Ai\left(\frac{\nu - \nu_i}{\tilde{\varepsilon}}\right) \right] \approx Ai\left(\frac{\nu - \nu_i}{\tilde{\varepsilon}}\right)$$

Ce qui conduit à :

$$\rho_Z(t, \nu; \text{PWVE}) \approx \int_{\mathbb{R}^2} \frac{P(t-t')}{\tilde{\varepsilon}(t')} q(\nu - \nu') Ai\left(\frac{\nu - \nu_i(t)}{\tilde{\varepsilon}(t)}\right) dt' d\nu'$$

$$\text{avec : } \tilde{\varepsilon}(t') = \left(\frac{\nu_i^{(2)}(t')}{32\pi^2}\right)^{1/3}$$

fenêtre  $P(t)$  la phase  $\Phi(t)$  soit de type cubique :

$$\Phi(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$\nu_i^{(2)}(t) = \frac{3a}{\pi}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3a}{4}\right)^{1/3}$$

et on a :

$$\rho_Z(t, \nu; \text{PWVE}) \approx \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0} \int_{\mathbb{R}^2} P(t-t') q(\nu - \nu') Ai\left(\frac{\nu - \nu_i(t)}{\tilde{\varepsilon}_0}\right) dt' d\nu'$$

FACTORISATION SPECTRALE ET REPRESENTATION CONJOINTE DE WIGNER-VILLE  
DANS LE CAS DES SIGNAUX ASYMPTOTIQUES

B. ESCUDIE

P. FLANDRIN

Dans une telle expression il faut noter l'effet du filtrage fréquentiel qui "lisse" les oscillations dues à la fonction  $Ai(x)$  comme la figure 3 le montre :

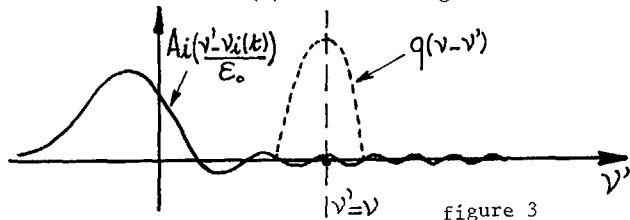


figure 3

Le résultat final peut donc être positif ou nul, ou ne comporter que des valeurs négatives très faibles. Dans ce cas la possibilité de modélisation de ce quantité par le module carré d'une fonction de transfert de filtre est envisageable avec une erreur de modélisation faible. Il faut toutefois noter que dans une telle situation les pentes dissymétriques du pic central de la fonction d'AIROY ne procurent pas une donnée aisément approchable à l'aide d'une fonction de transfert de filtre accordé. Il peut s'ensuivre une difficulté à modéliser une telle quantité par le module carré d'un filtre accordé.

CONCLUSION

A titre de variante dans l'analyse des signaux modulés et des processus aléatoires harmonisables on envisage de condenser l'information à l'aide d'une représentation paramétrique de type pôle zéro. La recherche à toute date t d'une factorisation spectrale AR ou ARMA nécessite d'explorer les propriétés du module carré d'une représentation conjointe en temps et fréquence. Dans le cas de signaux déterministes asymptotiques il y a concentration dans le plan temps fréquence autour de la loi  $\nu_i(t)$  pour des signaux modulés linéairement en fréquence de type unimodulaire. Une représentation conjointe à durée finie d'un tel signal est du type pseudo WIGNER-VILLE lissé, qui a l'avantage d'éliminer les termes parasites dus aux interactions entre les composantes multiples du signal. La factorisation spectrale associée au carré de ce type de représentation profite de la loi de modulation linéaire pendant la durée d'observation. Dans le cas général d'une modulation non linéaire pendant cette durée le carré de la représentation conjointe s'exprime à l'aide d'une fonction d'AIROY dont le comportement asymétrique ne permet pas aisément de la représenter à l'aide du module carré d'un filtre récursif et transversal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.MARTIN P.FLANDRIN EUSIPCO-83 sept.83 p.455-458 North Holland Ed. 1983

[2] W.MARTIN P.FLANDRIN GRETSI 83 (mai 83) p.43-49 Colloque Traitement Signal 1983

[3] Y.GRENIER GRETSI 83 (mai 83) p.35-41 Colloque Traitement Signal 1983

[4] " " Thèse doct.es sc.phys. EN Sup. Télécomm.21/12/1983 PARIS 1984

[5] P.FLANDRIN à paraître GRETSI 85 (mai 85) 1985

[6] Y.GRENIER GRETSI 81 (mai 81) p.185-192 Colloque Traitement du Signal 1981

[7] W.MARTIN ATP Modèles mathématiques pour l'Automatique et l'analyse des Signaux juin Nice 1984

[8] J.VILLE Câbles et Transmissions 2ème année n°1 p.61-74 1948

[9] P.FLANDRIN Comptes-rendus Acad.Soc. (Paris)(\*)

[10] P.FLANDRIN-B.ESCUDE Signal Processing vol.6 n°1 p.27-36 1984

[11] P.FLANDRIN IEEE ICASSP 84 San Diego (cal.) USA vol.III p.41B41-B44 1983

(\*) Comptes-Rendus Acad.Sc.PARIS I t.295 p.475-481 1982

Note :

On trouvera une tentative d'application de la méthode décrite ici dans le présent Colloque GRETSI sous le titre :

"Séparation de fréquences modulées proches par Analyse de WIGNER VILLE autorégressive" P.FLANDRIN  
10è Colloque GRETSI Nice mai 1985

