



NICE du 20 au 24 MAI 1985

REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE ET CAUSALITE

P. Flandrin ^{1) 3)} B. Escudié ¹⁾ W. Martin ²⁾

- 1) Laboratoire de Traitement du Signal LA 346 b CNRS ICPI 25 rue du Plat 69288 Lyon Cedex 02
2) Botanisches Institut der Universität Bonn, D-5200 Bonn, FRG
3) GRECO CNRS 69 "Systèmes adaptatifs en Robotique, Traitement du Signal et Automatique"

RESUME

On étudie à quelles conditions une représentation temps-fréquence peut être rendue causale, c'est-à-dire obtenue à tout instant par l'intermédiaire des seules valeurs antérieures du signal considéré. On montre qu'un petit nombre de conditions physiques supplémentaires suffit à réduire l'ensemble des solutions admissibles à la seule représentation de Page. Quelques propriétés de cette représentation sont discutées, permettant d'envisager des lissages lui assurant un meilleur comportement. Une formulation discrète est proposée ainsi que son calcul par un algorithme récursif.

S'intéressant alors à des processus aléatoires non-stationnaires admettant une représentation causale du type Cramer-Hida, on compare le spectre de Tjøstheim-Mélard (issu d'une telle représentation) avec ceux de Page et de Wigner-Ville. Les différences de points de vue sous-jacentes à ces représentations sont discutées sur une factorisation de la matrice de covariance du processus.

SUMMARY

The problem of finding conditions ensuring that a time-frequency representation is a causal one (i.e. obtained at each time point by means of only past values of the analyzed signal) is addressed. We show that a few extra conditions reduce the candidates to the only representation proposed by Page. Properties of this representation are discussed, smoothings are introduced for a better behaviour and a discrete version is proposed, together with its recursive computation.

Considering then non-stationary random processes for which a Cramer-Hida causal decomposition can be obtained, we compare the resulting (so-called Tjøstheim-Mélard) spectrum with Page and Wigner-Ville spectra. The underlying differences of these approaches are discussed through a factorization of the covariance matrix of the process.



1. Introduction.

Lorsque l'on s'intéresse à la représentation conjointe en temps et fréquence d'un signal certain ou d'un processus aléatoire non-stationnaire, le problème de la causalité peut se poser à deux niveaux :

- i) celui de la nature causale du système engendrant le signal ou le processus : on considère alors que seul le passé peut conditionner l'état présent, interdisant par principe toute influence du futur ou rétro-diction ;
- ii) celui de la nature causale de la transformation élaborant la représentation conjointe à partir de l'histoire du signal : on considère alors que la représentation temps-fréquence doit être obtenue par une transformation sur le signal telle qu'à tout instant le seul passé intervienne.

Ces deux interventions de la causalité peuvent s'envisager indépendamment l'une de l'autre.

Dans une première partie, nous discuterons les conditions de causalité de la représentation temps-fréquence d'un signal certain en convenant d'appeler représentation conjointe causale toute représentation temps-fréquence élaborée à chaque instant à partir des seules valeurs antérieures du signal.

Dans une deuxième partie, nous étudierons comment cette notion peut s'étendre au cas des processus aléatoires harmonisables. Ceci permettra de comparer plusieurs "spectres dépendant du temps" déjà connus, dans le cas de processus admettant une représentation causale de type Cramer-Hida.

2. Représentations conjointes causales.

2.1. Condition générale de causalité.

La représentation temps-fréquence générale d'un signal certain $x(t)$ s'écrit [1,2] :

$$\rho_x(t, \nu; f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu(u-t)} f(n, \tau) x(u + \frac{\tau}{2}) x^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi\nu\tau} du d\tau \quad (1)$$

où f est une fonction de pondération (éventuellement complexe) arbitraire. Réécrivant (1) sous la forme :

$$\rho_x(t, \nu; f) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu(\frac{v+w}{2}-t)} f(n, \nu-w) x(v) x^*(w) e^{-i2\pi\nu(v-w)} dv dw \quad (2)$$

la condition de causalité considérée plus haut (et selon laquelle l'élaboration de $\rho_x(t, \nu; f)$ se fait par l'intermédiaire des seules valeurs antérieures ($x(u), u \leq t$) revient à imposer que :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \dots dv dw = \iint_{-\infty}^t \dots dv dw$$

soit encore : $F(\frac{v+w}{2}-t, \nu-w) = F(\frac{v+w}{2}, \nu-w) U(t-v) U(t-w)$ (3)

où U est l'échelon unité de Heaviside et :

$$F(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(n, \tau) e^{i2\pi n\theta} dn$$

Un changement de variables dans (3) conduit à la condition recherchée :

$$\rho_x(t, \nu; f) \text{ causale} \Leftrightarrow F(\theta, \tau) = F(\theta, \tau) U(-\theta - \frac{|\tau|}{2}) \quad (4)$$

2.2. Relations entre parties réelle et imaginaire des pondérations assurant la causalité.

Par transformation de Fourier, (4) est équivalente à :

$$f(n, \tau) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(m, \tau)}{n-m} e^{i\pi m|\tau|} dm \quad (5)$$

En appelant R_f (resp. I_f) la partie réelle (resp. imaginaire) de f et en identifiant parties réelles et parties imaginaires, on est conduit aux relations :

$$R_f(n, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [I_f(m, \tau) \cos \pi m \tau + R_f(m, \tau) \sin \pi m |\tau|] \frac{dm}{n-m} \quad (6a)$$

$$I_f(n, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R_f(m, \tau) \cos \pi m \tau - I_f(m, \tau) \sin \pi m |\tau|] \frac{dm}{n-m} \quad (6b)$$

Conséquence : il n'existe pas de pondération non nulle purement réelle (ou purement imaginaire) assurant la causalité de la représentation associée.

Supposons en effet que $I_f(n, \tau) \equiv 0$, on a alors par (6b) :

$$0 = \mathcal{H} \left\{ R_f(m, \tau) \cos \pi m \tau \right\}_{m \rightarrow n} \quad (7)$$

où \mathcal{H} désigne la transformation de Hilbert. Sachant que $\mathcal{H} \{0\} = 0$ et $\mathcal{H}^2 = -Id$, on déduit de (7) que l'on doit avoir :

$$R_f(m, \tau) \cos \pi m \tau = 0, \quad \forall (m, \tau)$$

égalité ne pouvant être satisfaite que si $R_f = 0$ et donc $f = 0$. Une conclusion analogue suivrait de l'hypothèse $I_f \neq 0$ \square .

2.3. Conditions d'unicité d'une représentation causale.

La condition de causalité (4) ne suffit pas à caractériser de manière unique une fonction de pondération. Une solution unique peut cependant être retenue si l'on impose des contraintes supplémentaires. Plus précisément, si l'on considère les propriétés :

P1 : $\iint_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \nu; f) \rho_y^*(t, \nu; f) dt d\nu = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2$

P2 : $(x(t) = 0, |t| > T) \Rightarrow (\rho_x(t, \nu; f) = 0, |t| > T)$

P3 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_x(t, \nu; f) dt = |X(\nu)|^2 ; X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$

on peut montrer la :

Proposition : la seule représentation causale satisfaisant à la formule de Moyal (P1), conservant le support temporel (P2) et fournissant la densité spectrale comme distribution marginale (P3) est caractérisée par la fonction de pondération :

$$f(n, \tau) = e^{i\pi n |\tau|}$$

correspondant à la représentation de Page.



En effet, reprenant les résultats donnés par A.J.E.M. Janssen dans [3], on sait que :

P1 $\Rightarrow |f(n, \tau)| = 1$

P2 $\Rightarrow f(\cdot, \tau)$ est une fonction entière de type exponentiel telle que :

$$\exists(A, \sigma) \mid |f(n, \tau)| < A(\tau) e^{\sigma(\tau) \cdot |n|}$$

avec : $\sigma(\tau) \leq |\tau|/2$ et $A(\tau)$ borné.

P3 $\Rightarrow f(0, \tau) = 1$

L'ensemble de ces conditions conduit à ne retenir que les pondérations de la forme [3] :

$$f(n, \tau) = e^{i c(\tau) n}, \quad c(\tau) \in \mathbb{R}, \quad |c(\tau)| \leq \pi |\tau| \quad (8)$$

Imposer alors la condition de causalité à une pondération satisfaisant (8) et donc :

$$F(\theta, \tau) = \delta\left(\theta + \frac{1}{2\pi} c(\tau)\right)$$

n'est possible que si : $-\frac{1}{2\pi} c(\tau) \leq -\frac{|\tau|}{2}$

soit encore : $c(\tau) \geq \pi |\tau|$.

Cette condition n'est compatible avec (8) que si : $c(\tau) = \pi |\tau|$. \square

Portant $f_p(n, \tau) = e^{i\pi n |\tau|}$ dans (1), on obtient pour la représentation associée les deux formes équivalentes :

$$P_x(t, v; f_p) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t x(t) e^{-i2\pi v t} dt \right|^2 \quad (9a)$$

$$P_x(t, v; f_p) = 2 \operatorname{Re} \left\{ x(t) \left[\int_{-\infty}^t x(u) e^{-i2\pi v u} du \right]^* e^{-i2\pi v t} \right\} \quad (9b)$$

mettant chacune en évidence leur caractère causal. La représentation unique ainsi obtenue est celle proposée par C.H. Page [4].

2.4. Propriétés de la représentation de Page.

Outre les propriétés imposées précédemment pour établir son unicité, la représentation de Page vérifie :

- i) $f_p^*(-n, -\tau) = f_p(n, \tau)$ et la représentation est réelle [5] ;
- ii) $f_p(n, 0) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t, v; f_p) dv = |x(t)|^2$ et la puissance instantanée peut s'obtenir comme distribution marginale [5] ;
- iii) $f_p(n, \tau) \cdot f_p(n', \tau) = f_p(n+n', \tau)$ et la représentation de Page est stable pour les produits [6] :

iv) la fréquence instantanée peut être obtenue par un moment local d'ordre un.

La représentation de Page présente ainsi un grand nombre de propriétés intéressantes; quelques propriétés importantes lui font cependant défaut :

- i) elle peut prendre des valeurs négatives ;
- ii) $f_p(n, \tau) \cdot f_p(n, \tau') \neq f_p(n, \tau + \tau')$ si $\tau\tau' < 0$ et la représentation de page n'est pas stable pour les filtrages linéaires [6] ;
- iii) $\frac{\partial f_p}{\partial \tau}(0, \tau) \neq 0$ et le retard de groupe ne peut s'obtenir comme moment local [5] ;
- iv) la propriété $f(0, \tau) = 1$ assure à la représentation de Page de se comporter idéalement comme un Dirac le long des fréquences instantanées constantes mais cette propriété n'est pas extensible aux lois de modulation de fréquence linéaires comme c'est le cas pour la représentation de Wigner-Ville [7].

Ce point peut se préciser : si l'on considère le signal complexe :

$$x(t) = e^{i2\pi(v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2)}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (10)$$

de loi de "fréquence instantanée" :

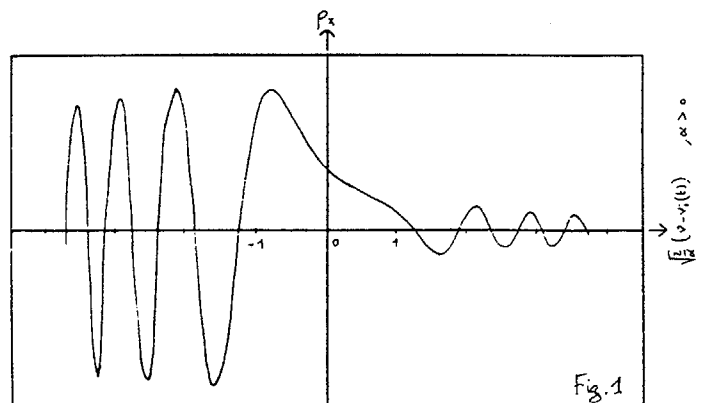
$$v_i(t) = v_0 + \alpha t \quad (11)$$

sa représentation de Page s'écrit :

$$P_x(t, v; f_p) = \frac{1}{2|\alpha|} \frac{\partial}{\partial t} \left| F\left(-\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|} \operatorname{sgn} \alpha \cdot (v - v_i(t))\right) e^{i\frac{\pi}{4}} \right|^2 \quad (12)$$

avec : $F(x) = \int_0^x e^{i\pi t^2/2} dt$, intégrale de Fresnel.

L'allure de (12) est donnée en Fig.1 dans le cas $\alpha > 0$. Elle présente de nombreuses oscillations autour de son centre de gravité $v_i(t)$, oscillations dont la rapidité porte une information sur la valeur absolue de la pente de modulation et la dissymétrie une information supplémentaire sur le signe de cette dernière.



Cet exemple conduit naturellement à s'interroger sur la possibilité de lisser une telle représentation pour lui assurer un comportement plus régulier et localisé

2.5. Affaiblissement des hypothèses et lissages.

Lisser la représentation de Page revient à choisir une fonction de pondération de la forme :

$$f(n, \tau) = G(n, \tau) \cdot f_p(n, \tau)$$



Si l'on veut conserver à la représentation associée sa propriété P2 de support ainsi que son caractère réel, les seules pondérations admissibles prennent la forme :

$$f(n, \tau) = q(\tau) e^{i\pi n \tau / T}, \quad q^*(-\tau) = q(\tau), \quad q(0) = 1 \quad (13)$$

Dans le cas : $q(\tau) = q(\tau) \cdot \Pi_{2T}(\tau)$ (14)

on obtient l'expression à mémoire finie :

$$P_x(t, \nu) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{t-T}^t x(u) q^*(t-u) e^{-i2\pi \nu u} du \right|^2 \quad (15)$$

qui n'est autre que la dérivée temporelle du spectre à court terme proposé par M.R. Schroeder et B.S. Atal [9].

2.6. Formulation discrète et calcul récursif.

La discrétisation directe des formules (9) peut se faire par exemple suivant l'expression :

$$P_x(t, \nu) = \left| \sum_{u=-\infty}^t \tilde{x}(u) e^{-i2\pi \nu u} \right|^2 - \left| \sum_{u=-\infty}^{t-1} \tilde{x}(u) e^{-i2\pi \nu u} \right|^2 \quad (16)$$

où $\tilde{x}(u)$ est le signal $x(u)$ après échantillonnage (à un taux supérieur ou égal à celui de Shannon) dont la période est prise comme unité. Nous retiendrons cette formulation discrète pour deux raisons principales :

- i) elle repose sur une estimée causale de la dérivée (9a) (dérivée à gauche) tout en satisfaisant au caractère intuitif d'apport d'information à chaque nouvel échantillon;
- ii) elle permet de transposer directement au cas discret la propriété P3 :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} P_x(t, \nu) d\nu = |\tilde{x}(t)|^2 \quad (17)$$

Si l'on pose : $L(t, \nu) = \sum_{u=-\infty}^t \tilde{x}(u) e^{-i2\pi \nu u}$ (18)

il est immédiat de constater que :

$$L(t, \nu) = L(t-1, \nu) + \tilde{x}(t) e^{-i2\pi \nu t} \quad (19)$$

ce qui permet d'envisager le calcul récursif de (16) présenté en Fig. 2 :

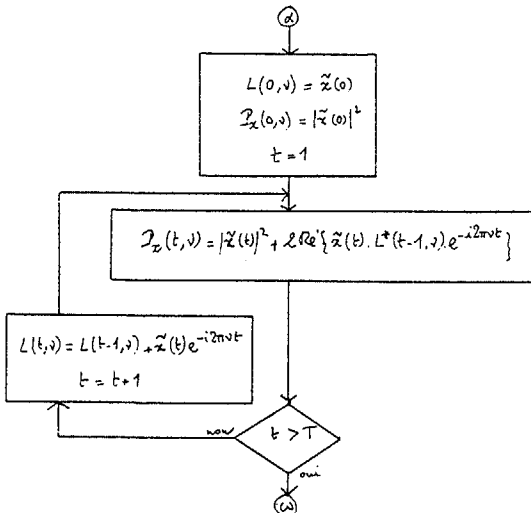


Fig. 2

3. Représentations causales de processus aléatoires.

3.1. Page et Wigner-Ville.

Si l'on considère maintenant que $x(t)$ est un processus aléatoire harmonisable de covariance $K_x(t, u)$, on sait que (1) peut fournir une classe générale de représentations conjointes de tels processus en remplaçant $x(u+\tau/2)x^*(u-\tau/2)$ par $K_x(u+\tau/2, u-\tau/2)$ [2].

En particulier, et dans le cas discret, on obtient ainsi l'équivalent dans le cas aléatoire de la représentation de Page avec :

$$\bar{P}_x(t, \nu) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u=-\infty}^t K_x(t, u) e^{-i2\pi \nu (t-u)} \right\} - K_x(t, t) \quad (20)$$

Rappelons que le spectre de Wigner-Ville est quant à lui défini par [11, 12] :

$$\overline{WV}_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} K_x(t+\tau, t-\tau) e^{-i4\pi \nu \tau} \quad (21)$$

Le spectre de Page étant par nature causal, on peut être tenté de le rapprocher d'un spectre lui aussi causal, obtenu par l'intermédiaire d'une représentation elle-même causale du processus : le spectre de Tjøstheim [13] et Méléard [14]

3.2. Cramer-Hida et Tjøstheim-Méléard.

La généralisation de la décomposition de Wold au cas des processus non-stationnaires fournit la représentation à moyenne ajustée d'ordre éventuellement infini, dite représentation de Cramer-Hida :

$$x(t) = \sum_{u=-\infty}^t h(t, u) \varepsilon(u) \quad (22)$$

où $\varepsilon(u)$ est le processus d'innovation tel que $E\{\varepsilon(t)\varepsilon^*(u)\} = \delta(t-u)$

Le spectre au sens de Tjøstheim-Méléard s'en déduit alors par :

$$\overline{TM}_x(t, \nu) = \left| \sum_{u=-\infty}^t h(t, u) e^{-i2\pi \nu u} \right|^2 \quad (23)$$

On sait qu'un tel spectre présente des inconvénients justifiant l'introduction d'une définition modifiée plus intéressante [15]. Nous nous restreindrons cependant à la définition (23), compte tenu de sa généralité et des possibilités de calcul qu'elle offre.

Si l'on considère la décomposition (22), il est facile de montrer que la covariance du processus s'écrit :

$$K_x(t, u) = \sum_{v=-\infty}^{\min(t, u)} h(t, v) h^*(u, v) \quad (24)$$

Il apparaît ainsi qu'en remplaçant K_x par (24), les trois spectres \bar{P} , \overline{WV} et \overline{TM} sont fonction bilinéaire des coefficients de décomposition $h(t, u)$. Explicitant cette dépendance et développant les calculs, on montre alors que l'on a, dans le cas de processus réels :

$$\overline{TM}_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=-\infty}^{t-|\tau|} h(t, u-\tau) h(t, u+\tau) e^{-i4\pi \nu \tau} \quad (25a)$$

$$\bar{P}_x(t, \nu) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=-\infty}^{t-|\tau|} h(t-|\tau|, u) h(t, u) e^{-i2\pi \nu \tau} \quad (25b)$$

$$\overline{WV}_x(t, \nu) = 2 \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sum_{u=-\infty}^{t-|\tau|} h(t+\tau, u) h(t-\tau, u) e^{-i4\pi \nu \tau} \quad (25c)$$

Les trois définitions, qui, rappelons-le, se réduisent à la notion classique de densité spectrale dans le cas stationnaire, présentent ainsi des analogies de

structure tout en conservant des spécificités caractéristiques des points de vue sous-jacents à chacune d'elles.

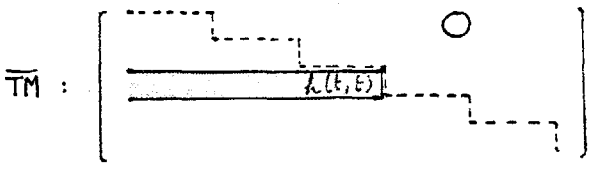
3.4. Interprétation.

La comparaison de (25a), (25b) et (25c) appelle plusieurs remarques :

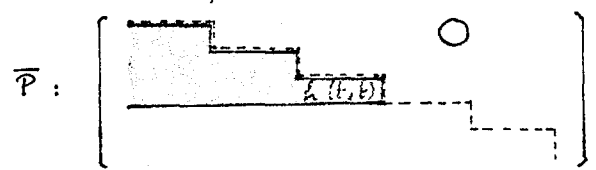
- i) seul le spectre \overline{TM} est construit sur un mélange des indices de sommation τ et μ , ce qui semble le disjoindre des spectres \overline{P} et \overline{WV} dont on sait qu'ils font partie d'une même classe ;
- ii) si l'on considère symboliquement la matrice infinie :

$$H = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k(t_1, t_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & k(t_1, t_3) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

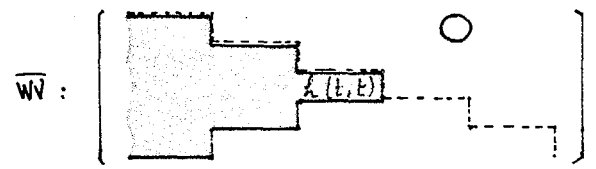
intervenant dans la factorisation (24), il apparait que les trois spectres à comparer utilisent différemment l'information connue dans les coefficients de H . En particulier, à un instant donné t , le spectre \overline{TM} n'utilise que les éléments de la ligne t [16] :



Le spectre \overline{P} utilise en plus les éléments du triangle supérieur :



Le spectre \overline{WV} est le seul qui, par sa nature non-causale, utilise également l'information du triangle inférieur :



Dans les trois cas, la contrainte de causalité imposée au processus se traduit par la nature triangulaire inférieure de H . La contrainte supplémentaire de causalité de la représentation se traduit quant à elle par le fait de borner inférieurement H à la date t de l'instant présent.

4. Conclusion.

L'introduction de la contrainte de causalité dans une représentation temps-fréquence peut sembler naturelle, par exemple pour un souci de mise en oeuvre en temps réel. Cette contrainte conduisant au choix de la représentation de Page, imposer la causalité ne pourra se faire qu'au détriment d'autres propriétés souhaitables que vérifie par exemple la représentation de Wigner-Ville. Lorsqu'on s'intéresse à des processus admettant une décomposition causale, on a vu qu'incorporer cette modélisation a priori peut permettre de comprendre en quoi les définitions de Page, Tjøstheim-Mélard et Wigner-Ville diffèrent. Cette approche peut laisser espérer une comparaison entre les méthodes non-paramétriques (issues de Wigner-Ville) et paramétriques (issues de Tjøstheim-Mélard). Elle pose néanmoins le problème de définir la grandeur dont chacun des spectres serait un estimateur. Si ce problème est clairement résolu dans le cas où la fréquence est définie de manière non-causale [11], il n'en est plus de même lorsque la causalité est imposée a priori dans la définition de la fréquence.

5. Références.

- [1] B. Escudié, J. Gréa : "Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie", C.R.Ac.Sc., Paris 283 A, pp.1049-1051, 1976.
- [2] L. Cohen : "Generalized phase-space distribution functions", J.Math.Phys. 7, pp.781-786, 1966.
- [3] A.J.E.M. Janssen : "On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane", Philips J.Res. 37, pp.79-110, 1982.
- [4] C.H. Page : "Instantaneous power spectra", J.Appl. Phys. 23, 1, pp.103-106, 1952.
- [5] B. Escudié : "Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie, analyse et observation des signaux", Ann.Télécomm. 35, pp.101-111, 1979.
- [6] P. Flandrin : "Représentation des signaux dans le plan temps-fréquence", Thèse D.I., Grenoble, 1982.
- [7] P. Flandrin, B. Escudié : "Sur la localisation des représentations conjointes dans le plan temps-fréquence", C.R.Ac.Sc. Paris 295, I, pp.475-479, 1982.
- [8] T.A.C.M. Claassen, W.F.G. Mecklenbräuker : "The Wigner distribution - A tool for time-frequency signal analysis", Philips J.Res. 35, 3, pp.217-250, 1980.
- [9] M.R. Schroeder, B.S. Atal : "Generalized short-time power spectra and autocorrelation functions", J.Acoust.Soc.Am. 34, 11, pp.1679-1683, 1962.
- [10] M. Unser : "Recursion in short-time signal analysis", Sig. Proc. 5, 3, pp.229-240, 1983.
- [11] P. Flandrin, W. Martin : "A general class of estimators for the Wigner-Ville spectrum of non-stationary processes", in : Lectures Notes in Control and Information Sciences, vol.62, Analysis and Optimization of Systems, pp.15-23, Springer Verlag, 1984.
- [12] P. Flandrin, W. Martin : "Sur les conditions physiques assurant l'unicité de la représentation de Wigner-Ville comme représentation temps-fréquence", GRETSI-83, pp.43-49, Nice, 1983.



-
- [13] D. Tjøstheim : "Spectral generating operators for non-stationary processes", Adv.Appl.Prob. 8, pp. 831-846, 1976.
- [14] G. Méléard : "Propriétés du spectre évolutif d'un processus non-stationnaire", Ann.Inst.H.Poincaré B 14, 4, pp.411-424, 1978.
- [15] Y. Grenier : "Estimation de spectres rationnels non-stationnaires", GRETSI-81, pp.185-192, Nice, 1983.
- [16] Y. Grenier : "Modélisation de signaux non-stationnaires", Thèse d'Etat, Paris, 1984.
-