



NICE du 20 au 24 MAI 1985

ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DES ESTIMATEURS  
AUTOREGRESSIFS

Nadine MARTIN - Jean-Louis LACOUME

CEPHAG-ENSIEG (Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques) - Laboratoire associé au CNRS  
Domaine Universitaire bp 46 - 38402 St-Martin-d'Hères (FRANCE)

**RESUME**

L'objet de cette communication est d'étudier les propriétés statistiques (biais, variance) d'un estimateur autorégressif basé sur la méthode des Moindres Carrés.

Les propriétés des estimateurs construits à partir des modèles AR ou ARMA sont souvent illustrées par des moyennes obtenues à partir de nombreuses simulations. Ces évaluations peuvent difficilement être utilisées pour des comparaisons ou pour définir un comportement général de l'estimateur.

Récemment les propriétés statistiques des estimateurs autorégressifs ont commencé à être étudiées. Les expressions obtenues sont souvent approchées ou valables uniquement dans le cas asymptotique (nombre suffisamment grand d'échantillons du signal) à cause de la rapide complexité des calculs.

Dans cet article, nous montrons que l'estimateur des Moindres Carrés des paramètres d'un filtre AR est un estimateur du Maximum de Vraisemblance (M.V.) dans le cas général d'un processus AR complexe d'ordre M.

Ce résultat nous permet d'accéder à une expression analytique du biais (non nul) et de la variance de l'estimateur des paramètres d'un filtre AR d'ordre 1.

Nous montrons (en négligeant le biais qui est du second ordre) que la variance obtenue atteint la borne de CRAMER RAO (estimateur efficace). Cette étude, faite complètement dans le cas simple d'un ordre 1 est illustrée dans un cas plus général sur des signaux simulés.

**SUMMARY**

The aim of this paper is to study the statistical properties of an autoregressive (AR) estimator based on a Least Squares Method (L.S.).

The properties of the estimators built from AR (or ARMA) models are often illustrated by results obtained with a lot of computer simulations. These evaluations cannot be easily used for comparisons or to define a general behaviour of this estimator.

Theoretical results on the statistical properties appeared recently. The expressions proposed are often approximated or valuable only in asymptotic cases (great number of samples) because of the rapid complexity of the calculation.

In this paper, we show that a LS estimator of AR parameters is a Likelihood estimator. This demonstration is done in the general case of a complex AR process of order M.

This result allows us to approximate the value of the bias and the variance of the estimator of an AR filter of order 1.

Comparing its variance to the CRAMER RAO bound (in the non biased case which is a first order asymptotic approximation) we show that the estimator is efficient. These results are illustrated by simulations in the more general case of an AR model of order 2.



## INTRODUCTION

Les modèles autorégressifs (AR) sont actuellement bien connus et très souvent utilisés notamment dans l'analyse spectrale de signaux. Il est alors nécessaire de connaître les performances des algorithmes développés. Très fréquemment, les performances sont illustrées par des moyennes statistiques obtenues par de nombreuses simulations sur ordinateur. Ces évaluations sont données à titre indicatif et peuvent difficilement être utilisées pour des comparaisons entre différents algorithmes ou pour définir un comportement général de l'analyseur.

La caractérisation théorique de ces estimateurs est un problème théorique délicat, qui commence à être étudié. En particulier, nous pouvons citer les travaux de FRIEDLANDER [1] [2], de TUFT [3] et ceux de KAY et MAKHOUL [4].

A cause de la rapide complexité des calculs, la caractérisation de l'estimateur n'est obtenue que dans des cas asymptotiques où le nombre d'échantillons du signal est grand devant l'ordre du filtre AR. En général, les auteurs supposent a priori que l'estimateur est non biaisé. Or, sur un nombre fini de points, l'estimateur des paramètres AR est biaisé. Cette constatation découle directement de simulations. Dans ce cas, la borne de CRAMER-RAO est différente et l'estimateur n'est plus efficace. Nous avons donc essayé de caractériser complètement l'estimateur des paramètres AR d'un point de vue statistique en calculant théoriquement la valeur du biais, non nul, de la variance et la borne de CRAMER-RAO.

Dans cet article, nous présentons les premiers résultats de cette étude [5]. Dans la première partie, nous montrons l'équivalence de l'estimateur des paramètres AR par une méthode de Moindres Carrés ou méthode de covariance avec un estimateur du Maximum de Vraisemblance. Cet estimateur est ensuite caractérisé en calculant la valeur approchée du biais (partie II) et de la variance (partie III). La valeur exacte de la borne de CRAMER-RAO d'un estimateur non biaisé est explicitée dans la partie IV.

Ces résultats sont donnés dans le cas simple d'un processus AR avec un seul paramètre donc un seul pôle. Pour que le problème traité ait une signification physique malgré le coefficient unique, le processus a été choisi complexe. Ainsi, le pôle de ce modèle AR a une phase non nulle équivalente à une résonance ; la distance de ce pôle au cercle unité représente l'amortissement de cette résonance.

Dans la partie V, nous présentons des simulations effectuées à partir d'un modèle AR réel d'ordre 2.

## I - ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Le modèle AR d'ordre M d'un processus  $X(n)$  discret et complexe est défini par :

$$X(n) = \underline{A}^T \underline{X}(n) + B(n)$$

avec  $\underline{X}^T(n) = (X(n-1), \dots, X(n-M))$

$$\underline{A} = (a(1), \dots, a(M))$$

$\underline{B}(n)$  est un bruit blanc gaussien complexe centré c'est-à-dire  $E\{B(n)\} = 0$

$$E\{B(n)B^*(m)\} = P_B \delta(n-m)$$

$$E\{B(n)B(m)\} = 0$$

$B^*(\cdot)$  est le conjugué de  $B(\cdot)$

$$\delta(n) = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$\delta(n) = 1 \text{ si } n = 0$$

La densité de probabilité d'amplitude du processus  $X(n)$  supposé gaussien complexe de longueur N conditionnellement au vecteur  $\underline{A}$  des paramètres s'écrit : [7]

$$p(X(1) \dots X(N) / \underline{A}) = \frac{1}{(\pi P_B)^{N-M}} \exp \left[ -\frac{1}{P_B} \sum_{n=M+1}^N |X(n) - \underline{A}^T \underline{X}(n)|^2 \right]$$

L'estimateur du Maximum de vraisemblance de l'estimateur  $\underline{A}$  des paramètres,  $\hat{\underline{A}}_{MV}$ , est défini par le maximum du logarithme de cette densité de probabilité.

$$\hat{\underline{A}}_{MV} = \left( \sum_{n=M+1}^N \underline{X}(n) \underline{X}^+(n) \right)^{-1} \left( \sum_{n=M+1}^N X(n) \underline{X}^*(n) \right)$$

avec  $\underline{X}^+(\cdot)$  vecteur transposé conjugué de  $\underline{X}(\cdot)$

Cette équation est de la forme  $\hat{\underline{A}}_{MV} = \underline{R}^{-1} \underline{S}$  ; elle est identique à celle estimant le vecteur  $\underline{A}$  des coefficients par la méthode des Moindres Carrés [6]. Ainsi, une estimation des coefficients AR par la méthode des Moindres Carrés aboutit à une estimation du Maximum de Vraisemblance.

En remplaçant  $X(n)$  par sa valeur en fonction de  $\underline{A}$ , on peut calculer le vecteur aléatoire complexe  $\delta \underline{A}$  défini par l'écart entre le vecteur estimé  $\hat{\underline{A}}_{MV}$  et le vecteur complexe  $\underline{A}$  :

$$\delta \underline{A} = \hat{\underline{A}}_{MV} - \underline{A}$$

Il vient

$$\delta \underline{A} = \left( \sum_{n=M+1}^N \underline{X}(n) \cdot \underline{X}^+(n) \right)^{-1} \left( \sum_{n=M+1}^N B(n) \underline{X}^*(n) \right)$$

Afin de déterminer les propriétés statistiques des pôles, nous allons calculer le biais et la variance de l'estimateur MV  $\hat{\underline{A}}_{MV}$  ainsi défini.

## II - BIAIS DE L'ESTIMATEUR DES PARAMETRES AR

Etant donné la forme de l'équation de l'estimateur MV des paramètres AR, le calcul du biais pour un ordre M quelconque est possible mais laborieux. Pour cette raison, nous nous sommes limités à un ordre  $M=1$ . Dans ce cas, l'estimateur  $\hat{\underline{A}}_{MV} = \hat{a}_{MV}$  s'écrit :

$$\hat{a}_{MV} = a + \frac{\sum_{n=2}^N B(n) X^*(n-1)}{\sum_{n=2}^N X(n-1) X^*(n-1)} \text{ avec } a = a(1)$$

Le biais  $b(a)$  de l'estimateur des paramètres AR d'un filtre d'ordre  $M=1$  est donc défini par :

$$b(a) = E \{ \hat{a}_{MV} - a \} = E \left\{ \frac{\sum_{n=2}^N B(n) X^*(n-1)}{\sum_{n=2}^N X(n-1) X^*(n-1)} \right\} = E \{ Y/Z \}$$

L'estimateur MV des paramètres AR est non biaisé si la quantité  $b(a)$  est nulle. De nombreux auteurs supposent a priori cette quantité nulle.

Or,  $b(a)$  est égale à la valeur moyenne du rapport de deux variables aléatoires  $Y$  et  $Z$ , seule celle du numérateur  $Y$  est complexe. Si nous calculons le développement limité d'ordre 2 de ce rapport, nous montrons que l'approximation d'ordre 1 est effectivement nulle tandis que l'approximation d'ordre 2 n'est pas nulle pour une longueur  $N$  finie du processus  $X(n)$ .

D'après l'annexe 1, nous pouvons écrire à l'ordre 2 :

$$E\{Y/Z\} \approx \frac{y_m}{z_m} \left( -1 + \frac{E\{\tilde{Y}^2\}}{z_m^2} \right) - \frac{E\{\tilde{Y} \tilde{Z}\}}{z_m}$$

$$\text{avec } Y = \tilde{Y} + y_m \quad E\{\tilde{Y}\} = 0$$

$$Z = \tilde{Z} + z_m \quad E\{\tilde{Z}\} = 0$$

$$\text{Nous avons : } y_m = E \left\{ \sum_{n=2}^N B(n) X^*(n-1) \right\} = 0$$

$$z_m = E \left\{ \sum_{n=2}^N X(n-1) X^*(n-1) \right\} = (N-1) \Gamma_X(0)$$

$$\text{avec } \Gamma_X(m) = E \{ X(n) X^*(n-m) \}$$



ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DES ESTIMATEURS AUTOREGRESSIFS

Ainsi, l'approximation d'ordre 1 est nulle à cause de  $y_m$ .  $b(a)$  est approché par la partie de l'approximation d'ordre 2 qui n'est pas nulle lorsque  $N$  est fini :

$$b(a) \approx \frac{E\{\tilde{Y}\tilde{Z}\}}{(N-1)^2 \Gamma_x(0)}$$

Il ne reste plus qu'à calculer :  $E\{\tilde{Y}\tilde{Z}\} = E\{YZ\}$

$$E\{YZ\} = \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N E\{B(n)X^*(n-1)X(m-1)X^*(m-1)\}$$

Etant donné que nous avons supposé le bruit  $B(n)$  gaussien complexe, le processus  $X(n)$  est aussi gaussien complexe. Les moments d'ordre 4 s'expriment en fonction des moments d'ordre 2 et nous obtenons :

$$E\{YZ\} = \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N E\{B(n)X^*(m-1)\} \Gamma_x(m-n)$$

Le processus  $X(n)$  est autoregressif d'ordre 1 d'où :

$$X^*(m-1) = (a^*)^{m-n-1} + \sum_{i=1}^{m-n-1} (a^*)^{i-1} B(m-i)$$

$$\Gamma_x(k) = a^k \Gamma_x(0) ; P_B = (1-aa^*) \Gamma_x(0)$$

On en déduit :

$$E\{\tilde{Y}\tilde{Z}\} = a \Gamma_x(0)^2 \cdot \left[ (N-1) - \frac{1-(aa^*)^{N-1}}{1-aa^*} \right]$$

Le biais de l'estimateur MV des paramètres AR s'écrit donc :

$$b(a) = -\frac{a}{(N-1)^2} \left[ (N-1) - \frac{1-aa^*^{N-1}}{1-aa^*} \right]$$

Le processus  $X(n)$  étant complexe et autorégressif d'ordre 1, le coefficient  $a$  du filtre est complexe et représente le pôle du filtre AR. La formule du biais  $b(a)$  nous indique que ce biais sur le pôle  $a$  est colinéaire et opposé à  $a$ . Etudions maintenant le module de ce biais :

$$|b(a)| = \frac{\rho}{(N-1)^2} \left| (N-1) - \frac{1-\rho^2(N-1)}{1-\rho^2} \right|$$

Soit  $\rho = (aa^*)^{1/2}$

Quelles que soient les valeurs de  $N$ , lorsque  $\rho$  tend vers 0 ou lorsque  $\rho$  tend vers 1,  $|b(a)|$  tend vers 0. En fonction de  $N$ , longueur du processus  $X(n)$ , on obtient le réseau de courbes de la figure 1.

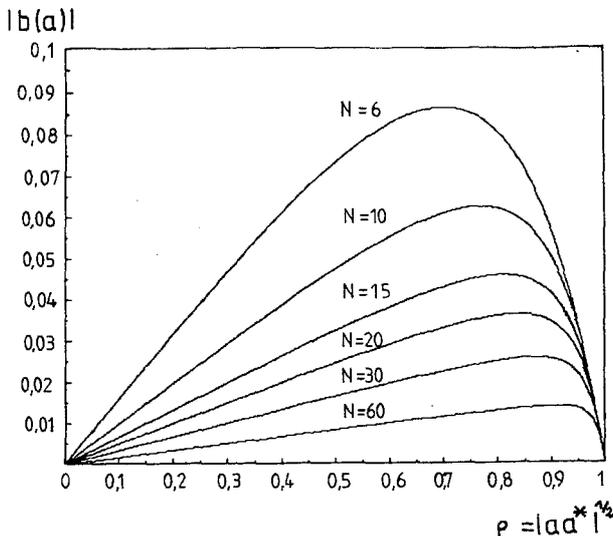


Figure 1 : Module du biais de  $a$  en fonction de  $\rho$   
M=1  $\rho = (aa^*)^{1/2}$

Si on transpose ces résultats dans le plan des  $z$ , on obtient la figure 2.

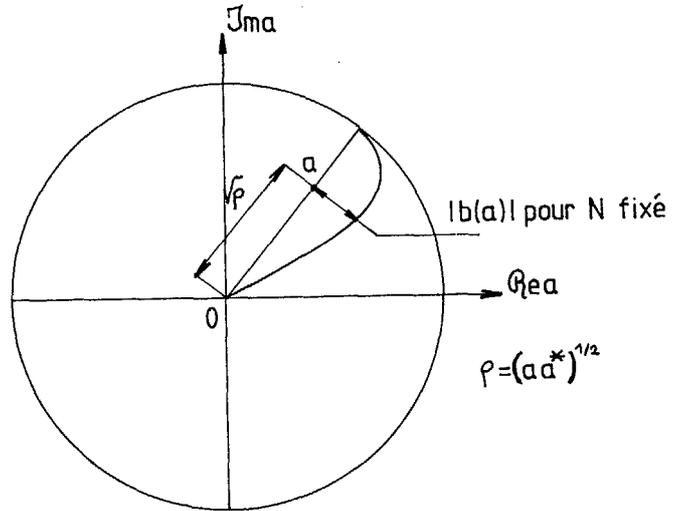


Figure 2 : Allure du biais de  $a$  dans le plan complexe des  $z$   
M = 1

Lorsque  $\rho$  tend vers 1, c'est-à-dire lorsque le pôle estimé tend vers le pôle associé à une fréquence pure, le module du biais tend vers 0 quelle que soit la valeur de  $N$ . Ce résultat est intéressant puisqu'on peut considérer qu'à la limite, l'estimateur MV des paramètres d'un filtre AR d'ordre 1 est non biaisé.

D'autre part, nous constatons que dans des cas asymptotiques où  $N$  est grand devant l'ordre du filtre, l'estimateur MV des paramètres AR est bien un estimateur non biaisé puisque  $b(a)$  tend vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini.

III VARIANCE DE L'ESTIMATEUR DES PARAMETRES AR

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, nous ne calculerons la variance que pour un ordre  $M=1$ .

$$\text{Var } \hat{a}_{MV} = \text{Var}(a+Y/Z)$$

Par un développement limité d'ordre 2, nous pouvons écrire (cf annexe 2) :

$$\text{Var}(Y/Z) = \frac{1}{z_m z_m^*} E\{YY^*\} + \frac{y_m y_m^*}{(z_m z_m^*)^2} E\{ZZ^*\}$$

$$- \left[ \frac{y_m^*}{z_m z_m^*{}^2} E\{YZ^*\} + \frac{y_m^*}{z_m^* z_m^2} E\{Y^*Z\} \right]$$

$$\text{or } y_m = 0 = y_m^* \\ z_m = (N-1) \Gamma_x(0) = z_m^*$$

$$\text{d'où } \text{Var}(Y/Z) = \frac{1}{(N-1) \Gamma_x(0)} \cdot E\{YY^*\}$$

$$\text{or } E\{YY^*\} = \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N E\{B(n)X^*(n-1)B^*(m)X(m-1)\} \\ = (N-1) P_B \Gamma_x(0)$$

Donc, la valeur approchée à l'ordre 2 de la variance de l'estimateur MV s'écrit : (cf figure 3)

$$\text{Var } \hat{a}_{MV} = \frac{1-aa^*}{(N-1)}$$

On remarque que lorsque le module de  $a$  tend vers 1, la variance de l'estimateur MV des paramètres AR tend vers 0. Mais, dans le cas d'un processus complexe, la variance ne suffit pas pour déterminer les propriétés statistiques à l'ordre 2. Toute information de phase a été perdue.

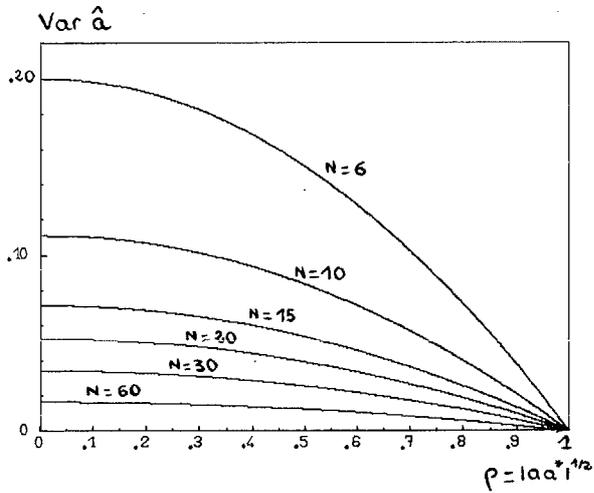


Figure 3 : Variance de a en fonction de  $M=1$   $\rho = (aa^*)^{1/2}$

Pour cette raison, nous avons calculé  $E \{ \delta a^2 \}$ , avec  $\delta a = \hat{a} - a$ , qui est un terme complexe par rapport à  $\text{Var } \hat{a}_{MV} = E \{ \delta a \cdot \delta a^* \}$  qui est réelle.

$$E \{ \delta a^2 \} = \frac{1}{z_m^2} E \{ \tilde{y}^2 \} = \frac{1}{(N-1) \Gamma_x(0)} \cdot E \{ y^2 \}$$

$$\text{or } E \{ y^2 \} = \sum_{n=2}^N \sum_{m=2}^N E \{ B(n) X^*(n-1) B(m) X^*(m-1) \} = 0$$

$$\text{d'où } E \{ \delta a^2 \} = E \{ (\hat{a} - a)^2 \} = 0$$

$\delta a$  étant une variable aléatoire complexe :  $\delta a = \text{Re}(a) + i \text{Im}(a)$   
l'égalité  $E \{ \delta a^2 \} = 0$  se traduit par :

$$\begin{aligned} E \{ \text{Re}(\delta a)^2 \} &= E \{ \text{Im}(\delta a)^2 \} \\ E \{ \text{Re}(\delta a) \cdot \text{Im}(\delta a) \} &= 0 \end{aligned}$$

La densité de probabilité de  $\hat{a}_{MV} = a + \delta a$  est telle que la partie réelle de  $\delta a$  et sa partie imaginaire ont même variance et sont indépendantes.  $\hat{a}_{MV}$  est donc peu différent d'une variable aléatoire gaussienne complexe. Alors les courbes d'isodensité sont des cercles centrés sur  $a + b(a)$  - (cf figure 4).

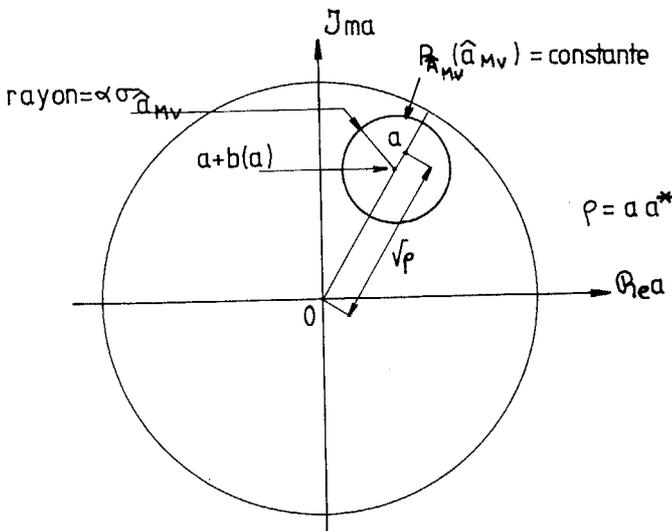


Figure 4 : Courbe d'isodensité de  $\hat{a}_{MV}$

La phase de  $\hat{a}_{MV}$  est équipartie à l'intérieur de ces cercles dont le rayon est proportionnel à l'écart-type  $\sigma_{\hat{a}_{MV}}$  de  $\hat{a}$  :

$$\sigma_{\hat{a}_{MV}} = (\text{Var } \hat{a}_{MV})^{1/2} = ((1 - aa^*) / (N-1))^{1/2}$$

L'estimation des paramètres AR par un estimateur du Maximum de Vaisemblance conduit à une estimation biaisée. Le biais est colinéaire et opposé au paramètre a pour un filtre AR d'ordre M égal à 1; les courbes d'isodensité de la variable aléatoire  $\hat{a}$  sont des cercles centrés sur  $a + b(a)$ . Lorsque le pôle a se rapproche vers le cercle unité, le biais de l'estimateur tend vers 0. A la limite, lorsque a représente une fréquence pure complexe (module de a égal à 1), l'estimateur peut être considéré comme parfait si l'estimation est effectuée sur un nombre N de points suffisamment grand par rapport à l'ordre M du filtre AR.

IV - BORNE DE CRAMER-RAO - EFFICACITE DE L'ESTIMATEUR

D'après les résultats des deux paragraphes précédents, nous remarquons que la valeur approchée du biais  $b(a)$  de l'estimateur des paramètres AR est très faible devant la variance de cet estimateur :

$$\text{Var } \hat{a} = \frac{1 - aa^*}{N-1} \text{ (cf paragraphe III)}$$

$$b(a) \approx - \frac{a}{N-1} \text{ lorsque N est grand}$$

$$\text{d'où } |b(a)|^2 \ll \text{Var } \hat{a}$$

$$\text{Ainsi l'erreur quadratique moyenne totale EQMT} = E \{ (\hat{a} - a)^2 \} = \text{Var } \hat{a} + |b(a)|^2 \approx \text{Var } \hat{a}$$

Les propriétés statistiques de l'estimateur AR au second ordre sont peu influencées par la valeur du biais. Au second ordre, (en  $1/N$ ), nous pouvons donc considérer l'estimateur non biaisé. Ceci explique la similitude de nos résultats en ce qui concerne la variance avec ceux de MANN et WALD obtenus avec l'hypothèse d'un estimateur non biaisé [8].

La borne de CRAMER-RAO d'un estimateur non biaisé est définie par :

$$B_{CR} = 1 / I_x(A)$$

$$\text{avec } I_x(A) = - E \left\{ \frac{\partial^2 \log P_{X(1) \dots X(N)/A}}{\partial A \cdot \partial A^*} \right\}$$

$$\text{où } I_x(A) = \frac{1}{P_B} E \left\{ \sum_{n=M+1}^N X(n) X(n) \right\} = \frac{N-M}{P_B} \Gamma_x$$

$$\text{avec } \Gamma_x = E \{ X(n) X(n) \}$$

$$\text{Pour un ordre } M = 1 \quad I_x(A) = \frac{(N-1)}{P_B} \Gamma_x(0) = \frac{N-1}{1 - aa^*}$$

$$\text{d'où } B_{CR} = (1 - aa^*) / (N-1)$$

L'estimateur MV des paramètres d'un filtre AR d'ordre 1 est donc efficace puisque la variance est égale à sa valeur minimale.

V - VERIFICATION EMPIRIQUE PAR SIMULATION

Afin de tester la validité de la théorie, nous avons effectué une étude statistique sur des signaux synthétiques. Ne disposant que d'un algorithme travaillant sur des signaux réels, nous avons simulé des modèles AR réels d'ordre 2. Le filtre ainsi calculé possède deux pôles complexes conjugués. Nous avons choisi la phase de ce pôle proche de  $\pi/2$  ( $\varphi = 76^\circ$ ) pour limiter le couplage du pôle et de son complexe conjugué (on a montré [9] que dans cette situation les propriétés de l'estimation sont analogues au cas d'un modèle d'ordre 1).

ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DES ESTIMATEURS AUTOREGRESSIFS

Chaque processus de longueur N a été engendré par un filtre AR d'ordre 2, de pôle  $z(1) = \rho e^{j\varphi}$  et  $z(2)=z(1)^*$ , excité par un bruit blanc gaussien centré de variance unité. Pour chaque longueur N et pour chaque module  $\rho$  choisis nous avons simulé L signaux (L = 100). Les deux coefficients du filtre  $a(1)$  et  $a(2)$  sont ensuite estimés par une méthode de covariance ou méthode des Moindres Carrés [6]. Cette estimation permet de calculer les pôles estimés  $z(1)$  et  $z(2) = z(1)^*$  solution de l'équation  $1-\hat{a}(1)z^{-1}-\hat{a}(2)z^{-2} = 0$ .

L'estimation du biais et de la variance du pôle  $z = z(1) = z(2)^*$  est obtenu par :

$$\text{biais}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (\hat{z}_k - z_k)$$

$$\text{var}(z) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \hat{z}_k \hat{z}_k^* - \frac{1}{L^2} \sum_{k=1}^L \hat{z}_k \cdot \sum_{k=1}^L \hat{z}_k^*$$

1b(a)

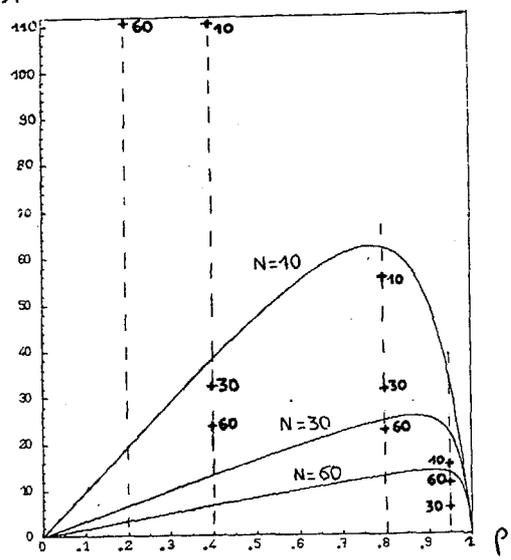


Figure 5 : Module du biais du pôle z en fonction de  $\rho$  (module du pôle z)  
 — M=1 résultat théorique (processus complexe)  
 + M=2 résultat pratique (processus réel) statistique sur L=100 points.

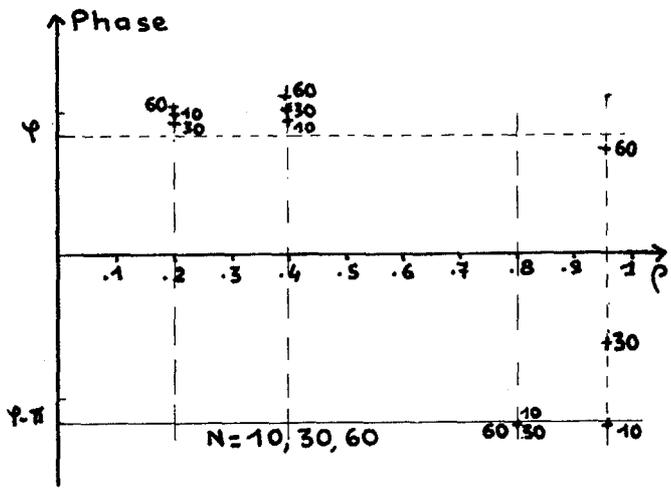


Figure 6 : Phase du biais du pôle z en fonction de  $\rho$  (module du pôle)  
 — M=1 résultat théorique (processus complexe)  
 $\psi = 76^\circ = 1,32 \text{ rd}$  - phase du biais =  $\psi - \pi$   
 + M=2 résultat pratique (processus réel) statistique sur L=100 points

Var  $\hat{a}$

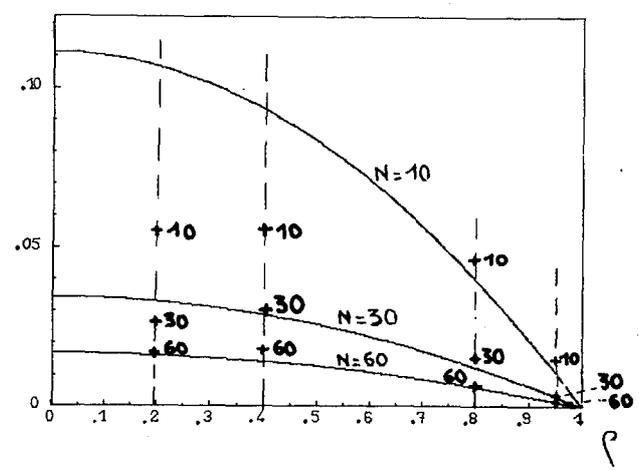


Figure 7 : Variance du pôle z en fonction de  $\rho$  (module du pôle)  
 — M=1 résultat théorique (processus complexe)  
 + M=2 résultat pratique (processus réel) statistique sur L = 100 points

Les résultats sont représentés sur la figure 5 pour le module du biais, sur la figure 6 pour la phase du biais et sur la figure 7 pour la variance.

Les résultats pratiques sont donnés pour un processus réel d'ordre M égal à 2. Nous constatons que les valeurs pratiques sont proches de celles prévues par la théorie pour des modules de pôle supérieures à 0,5. Dans ce cas, les deux pôles  $z(1)$  et  $z(2)=z(1)^*$  sont suffisamment éloignés pour pouvoir les considérer séparément (cf. figure 5). Pour des modules de pôle inférieurs à 0,5, le biais diverge tandis que la théorie prévoyait un biais tendant vers 0. Nous pouvons rajouter à la figure 5 les valeurs suivantes :

$\rho=0,2$	N=10	biais(z)  = 0,25
	N=30	biais(z)  = 0,17
	N=50	biais(z)  = 0,11

Cette divergence du module du biais est très nette surtout lorsque N est faible. Elle s'explique par le fait que pour des modules proches de 0, les deux pôles complexes conjugués  $z(1)$  et  $z(2)=z(1)^*$  sont trop proches et nous ne pouvons pas les considérer séparément [9]. Plus le pôle se rapproche du cercle unité, plus le module du biais augmente.

Le biais sur le pôle  $z = \rho e^{j\varphi}$  obtenu analytiquement en (II) (phase  $\psi - \pi$ ) est colinéaire et opposé à z. La courbe de phase du biais (cf. figure 6) vérifie ce résultat quel que soit N pour  $\rho = 0,8$ . Par un module proche de 1, il est difficile de conclure. Tandis que pour des pôles de module inférieur à 0,5, le biais est colinéaire et de même sens que la phase du pôle.

Pour la variance des pôles (cf figure 7), les résultats pratiques sont très proches des valeurs théoriques. Ils s'écartent légèrement lorsque, à la fois, la longueur N et le module  $\rho$  des pôles sont faibles.

Ces simulations semblent montrer que pour un ordre M, nous pouvons caractériser statistiquement chaque pôle par des propriétés statistiques calculées à l'ordre 1 si les pôles sont suffisamment éloignés dans le cercle unité. Cette caractérisation est même valable pour des longueurs de processus relativement faible.



L'estimation des pôles d'un filtre AR est biaisé. Le biais tend vers 0 lorsque le pôle se rapproche du cercle unité. Lorsque les pôles s'éloignent du cercle unité, et donc se rapprochent dans le plan complexe, une interaction apparaît entre le pôle et son complexe conjugué et l'on ne peut donc plus traiter les pôles séparément comme cela avait été montré en [9].

### CONCLUSION

Nous avons montré que l'estimateur des Moindres Carrés des paramètres d'un filtre AR est un estimateur MV. Par un calcul théorique du biais et de la variance, nous avons déterminé les propriétés statistiques du pôle d'un processus AR complexe d'ordre 1.

Les simulations pratiques sur un processus réel d'ordre 2 généralisent "empiriquement" ces résultats lorsque les pôles du processus sont "assez éloignés" dans le plan complexe des z.

Ainsi nous pouvons déterminer les propriétés statistiques d'un pôle d'un processus AR (calcul biais-variance) si ce pôle est éloigné des autres pôles du processus. Contrairement aux études déjà présentées dans la littérature, les résultats obtenus ne se placent pas dans une situation asymptotique. Ils sont donc valables quel que soit le nombre N de valeurs observées du signal et en particulier pour des N faibles. Cette situation est pratiquement importante car c'est dans ce cas de signaux "courts" que les méthodes AR sont utiles pour obtenir une bonne finesse d'analyse et un bon pouvoir de résolution qui ne peuvent alors nous donner les méthodes classiques de FOURIER.

### ANNEXE 1 : Calcul de E(Y/Z)

Soit Y une variable aléatoire complexe de moyenne  $y_m$   
 $\hat{Y} = Y - y_m$

Soit Z une variable aléatoire complexe de moyenne  $z_m$  non nulle  
 $\hat{Z} = Z - z_m \quad z_m \neq 0$

Calculons :  $E(Y/Z)$  ?  
 Par définition :  $E(Y/Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{y}{z} P_{YZ}(y, z) dy dz$

avec  $P_{YZ}(y, z)$  densité de probabilité conjointe à Y et Z.

Nous admettons que le rapport  $y/z$  est borné par une quantité finie et que la densité de probabilité conjointe à Y et Z est très faible au point  $(y, z=0)$ . Dans ce cas, l'intégrale définit ci-dessus converge.

$$\text{Alors : } E(Y/Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{y} + y_m}{\hat{z} + z_m} P_{YZ}(y, z) dy dz$$

$$\frac{1}{\hat{z} + z_m} = \frac{1}{z_m} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{\hat{z}}{z_m}\right)^i \quad \text{avec } (-1)^0 = 1$$

$$E(Y/Z) = \frac{1}{z_m} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z_m}\right)^i \cdot (y_m \hat{z}^i + \hat{y} \hat{z}^i) \cdot P_{YZ}(y, z) dy dz$$

$$\text{Ainsi } E(Y/Z) = \frac{1}{z_m} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z_m}\right)^i (y_m E(\hat{Z}^i) + E(\hat{Y}\hat{Z}^i))$$

$$\begin{aligned} Y &= \hat{Y} + y_m \\ Z &= \hat{Z} + z_m \end{aligned} \quad z_m \neq 0$$

L'hypothèse  $P_{YZ}(y, 0)$  faible se traduit, pour une loi gaussienne, par le fait que la valeur moyenne  $z_m$  doit être très grande devant l'écart-type  $\sigma_z$  de la variable aléatoire Z :  $\sigma_z \ll z_m$ .

A l'ordre 2, l'équation précédente s'écrit :

$$E(Y/Z) = \frac{y_m}{z_m} \left(1 + \frac{E(\hat{Z}^2)}{z_m^2}\right) - \frac{E(\hat{Y}\hat{Z})}{z_m^2}$$

### ANNEXE 2 : Calcul de VAR(Y/Z)

Les conditions sont les mêmes que pour le calcul de la valeur moyenne (cf. Annexe 1).

$$\text{Var}(Y/Z) = E(|Y/Z|^2) - E(Y/Z) E(Y^*/Z^*)$$

$$\text{Or : } E\{|Y/Z|^2\} = E\left\{\left|\frac{\hat{y} + y_m}{\hat{z} + z_m}\right|^2\right\}$$

$$E\{|Y/Z|^2\} = \frac{1}{z_m z_m^*} E\{\hat{y}\hat{y}^* + y_m y_m^* + \hat{y} y_m^* + \hat{y} y_m\}$$

$$\left(1 - \frac{\hat{z}\hat{z}^*}{z_m z_m^*} - \frac{\hat{z}}{z_m} - \frac{\hat{z}^*}{z_m^*} + \frac{\hat{z}^2}{z_m^2} + \frac{\hat{z}^{*2}}{z_m^{*2}} + 2 \frac{\hat{z}\hat{z}^*}{z_m z_m^*} + \dots\right)$$

$$\text{D'après l'annexe 1 } E(Y/Z) = \frac{y_m}{z_m} \left(1 + \frac{E(\hat{Z}^2)}{z_m^2}\right) - E\{\hat{Y}\hat{Z}\} \frac{1}{z_m^2}$$

En ne gardant que les termes à l'ordre 2 :

$$E(Y/Z) E(Y^*/Z^*) = \frac{y_m y_m^*}{z_m z_m^*} \left(1 + \frac{E(\hat{Z}^2)}{z_m^2} + \frac{E(\hat{Z}^{*2})}{z_m^{*2}}\right)$$

$$- \frac{y_m}{z_m} \frac{E\{\hat{Y}^* \hat{Z}^*\}}{z_m^{*2}} - \frac{y_m^*}{z_m^*} \frac{E\{\hat{Y} \hat{Z}\}}{z_m^2}$$

D'où, après simplification, nous obtenons :

$$\text{Var}(Y/Z) = \frac{1}{z_m z_m^*} E(\hat{Y}\hat{Y}^*) + \frac{y_m y_m^*}{(z_m z_m^*)^2} E(\hat{Z}\hat{Z}^*)$$

$$- \left(\frac{y_m}{z_m z_m^{*2}} E(\hat{Y}\hat{Z}^*) + \frac{y_m^*}{z_m^2 z_m^*} E(\hat{Y}^*\hat{Z})\right)$$

$$\text{avec } Y = \hat{Y} + y_m$$

$$Z = \hat{Z} + z_m$$

$$z_m \neq 0$$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. FRIEDLANDER : "The Asymptotic Performance of the Modified Yule-Walker Estimator". ASSP Spectrum Estimation, Workshop II, pp 22.26, 1983.
- [2] B. FRIEDLANDER : "On the Computation of the CRAMER-RAO Bound for ARMA Parameter Estimation". IEEE-ASSP Vol. ASSP-32 n°4 - August 1984.
- [3] D.W. TUFTS-F. GIANNELLA-I. KIRSTEINS-L.L. SCHARF : "Cramer-Rao Bounds on the Accuracy of Autoregressive Parameter Estimators". ASSP. Spectrum Estimation. Workshop II, pp 12-16, 1983.
- [4] S. KAY-J. MAKOUK : "On the Statistics of the Estimated Reflection Coefficients of an Autoregressive Process." IEEE-ASSP-Vol ASSP-31, n°6, Décembre 83.
- [5] N. MARTIN : "Développements de méthodes d'analyse spectrale Autorégressive. Applications à des signaux réels non stationnaires ou à n dimensions". Thèse de Docteur-Ingénieur soutenue à l'INP Grenoble Avril 1984.
- [6] N. MARTIN : "An AR Spectral analysis of non stationary signals". Publication acceptée par Special Issue on Modern Trends of Spectral Analysis. Signal Processing.
- [7] A. BLANC-LAPIERRE-B. PICINBONO : "Fonctions Aléatoires". Collection Technique et Scientifique des Télécommunications. Editeur MASSON-1981.
- [8] H. B. MANN and A. WALD : "On the statistical treatment of stochastic difference equations". Econometrica, Vol. 11, pp 173-220, July 1943.
- [9] J. L. LACOUUME-M. GHARBI-C. LATOMBE-J. L. NICOLAS : "Close Frequency Resolution by Maximum Entropy Spectral Estimators". IEEE-ASSP-Vol ASSP-32 n°5 October 1984.