DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

ESTIMATION SIMULTANEE AR ET MA D'UN MODELE NON-STATIONNAIRE

Y. GRENIER

ENST, DEPT SYC 46 rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

Une large classe de signaux non-stationnaires peut être modélisée efficacement au moyen de modèles dits "évolutifs". Ceux-ci sont le plus souvent des modèles autorégressifs (tout-pôle) mais peuvent être aussi des modèles mixtes (pôles-zéros). Dans un cas comme dans l'autre, ils sont caractérisés par le fait que leurs coefficients, fonctions du temps sont contraints à évoluer dans un sous-espace dont une base est donnée a priori. Si des estimateurs performants existent dans le cadre des modèles autorégressifs évolutifs ou de leurs variantes (filtre en treillis), les estimateurs pour les modèles ARMA (autorégressifs à moyenne ajustée) sont moins satisfaisants, étant soit trop coûteux soit de qualité médiocre. La présente étude propose un estimateur qui améliore ce compromis coût-qualité. Cette procédure repose sur l'équivalence du modèle ARMA avec un modèle autorégressif d'ordre élevé, et se décompose en deux étapes : estimation du modèle autorégressif, calcul du modèle ARMA équivalent. La première étape utilise un des estimateurs déjà connus. La seconde réalise un ajustement de la réponse impulsionnelle non-stationnaire (donc à deux indices) du modèle ARMA, et donne lieu à un algorithme rapide lié à la structure de Toëplitz du système linéaire à résoudre, à la condition que l'ordre de la partie MA soit inférieur de une unité à celui de la partie AR.

SUMMARY

A large class of non-stationary signals can be modeled efficiently through "evolutionary models" which are essentialy autoregressive but can be, though less frequently, autoregressive moving-average models. In both cases, these models are characterized by the constraint that their coefficients evolve within a subspace, a basis of functions of which is known prior to estimation. Powerfull estimators exist for evolutionary autoregressive models and for their variants (lattice filters), whereas the existing estimator for evolutionary ARMA models have either a high cost or a low quality. The present study suggests an estimator which improves this compromise between cost and quality. The procedure lies on the equivalence between an ARMA model and a long AR model. It consists in two steps : AR model estimation, followed by a reduction to the equivalent ARMA model. The first step uses known estimators, the second one adjusts the two-indices non-stationary impulse response of the ARMA model and leads to a fast algorithm associated to the Toëplitz structure which the solution exhibits in the case where the AR order is equal to the MA order plus one.

I. INTRODUCTION

Dans l'ensemble des méthodes permettant de modéliser des signaux non-stationnaires, il existe une classe permettant de combiner un suivi de l'évolution d'un modèle dépendant du temps avec un codage de cette évolution. Il s'agit de modèles "évolutifs" où chacun des coefficients du modèle est supposé représenté linéairement (et de manière invariante avec le temps) sur une base de fonctions connues a priori. Dans ce cadre plusieurs méthodes existent pour l'estimation de modèles autorégressifs ou en treillis, ainsi que de modèles de type "à moyenne ajustée MA" (/1/, et les références qui y figurent).

Si on cherche à estimer simultanément les deux parties, autorégressive d'une part et à moyenne ajustée d'autre part, dans un modèle ARMA évolutif, on ne dispose que d'une méthode de maximum de vraisemblance, optimale certes, mais coûteuse. Le calcul exact de la vraisemblance ainsi que de son gradient et son Hessien, se font par des filtres de Kalman, et la maximisation par une méthode de Newton-Raphson /2/.

L'objet de cette communication est de présenter une méthode nouvelle dans laquelle l'estimation se fait simultanément pour les parties AR et MA avec un coût aussi réduit que possible. L'estimateur repose sur l'équivalence entre un modèle ARMA (p,q) à coefficients dépendant du temps sur une base de fonctions, et un modèle autorégressif d'ordre infini dont les coefficients évoluent sur une base de fonctions qui est un sur-ensemble de la précédente. On approxime le modèle autorégressif par un modèle d'ordre fini, l'estimation de ses paramètres se fait en utilisant le vecteur Y_t des produits du signal y_t par chacune des fonctions $f_i(t)$ de la base. Le gain du modèle est lui aussi évolutif. Le passage au modèle ARMA se fait ensuite en approximant sur l'intervalle de temps analysé la réponse impulsionnelle du filtre inverse par celle du modèle autorégressif. Une telle méthode peut être vue comme une extension au cas non-stationnaire de la méthode de Graupe, Krause et Moore /3/.

La seconde partie de cette communication constituera un rappel de la méthodologie associée aux modèles autorégressifs évolutifs, ainsi que des approches existantes pour le modèle ARMA. La troisième partie sera une présentation de l'estimation conjointe des parties AR et MA du modèle. La quatrième partie montrera comment l'estimateur qui a été élaboré peut se mettre sous une forme propice à l'emploi d'un algorithme rapide, moyennant une contrainte sur l'ordre des deux parties AR et MA, contrainte qui ne constitue pas dans la pratique une limitation de cet algorithme.
Une analyse des performances de cet algorithme, réalisée par simulations sera faite dans un article ultérieur, plus détaillé.

II. MODELES EVOLUTIFS

L'intérêt des modèles, dans leur emploi en traitement du signal, tient dans le fait qu'ils représentent de façon paramétrée les spectres des signaux. Dans le cas des signaux non-stationnaires, ces paramètres deviennent des fonctions du temps, et une partie de l'intérêt de la modélisation est perdu si leur évolution temporelle n'est pas elle-même paramètrée. Les modèles dits "évolutifs" répondent à cette exigence en posant que les coefficients du modèle s'expriment comme combinaisons linéaires de fonctions connues a priori, avec des poids inconnus mais invariants. C'est à Rao puis Mendel, que l'on doit la première occurrence de ces modèles (voir les références en /1/). Les modèles autorégressifs évolutifs tels qu'ils sont utilisés ici sont dus à Liporace, Hall ... . Le modèle AR évolutif sera écrit :

$$(1) \qquad y_t + a_1(t-1)y_{t-1} + \dots + a_p(t-p)y_{t-p} = g(t)\varepsilon_t$$

Le signal y_t est vu comme sortie du filtre récursif dont les $a_i(t)$ sont les coefficients, et $g(t)$ le gain, alors que l'entrée ε_t est un bruit blanc de variance 1. L'hypothèse évolutive est celle de l'existence des fonctions $f_j(t)$ telles que :

$$(2) \qquad a_i(t) = \sum_{j=o}^{m} a_{ij} f_j(t).$$

L'estimation des coefficients a_{ij} se ramène à une modélisation vectorielle invariante en lieu et place d'une modélisation scalaire non-stationnaire. Cela s'observe en définissant le vecteur Y_t contenant les produits du signal y_t par chaque fonction de base $f_j(t)$. Soit alors θ le vecteur contenant les inconnues a_{ij}. Le modèle autorégressif évolutif se réécrit :

$$(3) \qquad y_t + [Y_{t-1}^T \dots Y_{t-p}^T]\theta = g(t)\varepsilon_t$$

avec $Y_t^T = [f_o(t)y_t \dots f_m(t)y_t]$

et $\theta^T = [a_{10} \dots a_{1m} a_{20} \dots a_{pm}]$

L'équation exprime une régression linéaire (invariante) du signal y_t sur le passé du signal Y_t, et le vecteur θ de régression se détermine soit en minimisant au sens des moindres carrés l'erreur de prédiction $g(t)\varepsilon_t$, soit en utilisant la blancheur du signal ε_t et la causalité du modèle. Ceci conduit dans un cas comme dans l'autre à des équations d'optimalité similaires à l'équation de Yule-Walker, soit :

$$(4) \qquad \sum_t \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} [Y_{t-1}^T \dots Y_{t-p}^T]\theta = -\sum_t \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} y_t$$

La quantité $w_t = g(t)\varepsilon_t$ ou erreur résiduelle se calcule ensuite aisément par filtrage de y_t suivant (1) ou (3). Le gain $g(t)$ est aussi à estimer, sous une hypothèse évolutive. Pour que ce gain ne puisse s'annuler, ce qui a été retenu est que son logarithme s'exprime sur la base des fonctions $f_j(t)$.

$$(5) \qquad \mathrm{Log}\,(g(t)) = \sum_{j=o}^{m} g_j f_j(t) \quad \text{ou} \quad g(t) = \mathrm{Exp} \sum_{j=o}^{m} g_i f_j(t)$$

Le calcul des g_i pose un problème non-linéaire car de la connaissance de $w_t = g(t)\varepsilon_t$ il s'agit d'inférer celle de $g(t)$ et de ε_t, en séparant deux inconnues qui se multiplient. La méthode qui est utilisée ici permet de linéariser le problème en remplaçant w_t par $\mathrm{Log}\,|w_t|$. L'estimateur des g_j s'écrit alors :

$$(6) \qquad \sum_t \begin{bmatrix} f_o(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} [f_o(t) \dots f_m(t)] \begin{bmatrix} g_o \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = \sum_t \begin{bmatrix} f_o(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} \left(\mathrm{Log}|w_t| + \frac{C+\mathrm{Log}\,2}{2}\right)$$

Les deux estimateurs (4) et (6) permettent de déterminer totalement le modèle autorégressif évolutif, avec une précision d'autant meilleure que les évolutions de $g(t)$ sont limitées.

L'estimation d'un modèle autorégressif à moyenne ajustée (ARMA) est plus délicate. Ce modèle s'écrit suivant (7), en posant de plus que les $a_i(t)$ et $b_j(t)$ sont combinaisons linéaires des fonctions de base $f_j(t)$.

$$(7) \quad \sum_{i=o}^{p} a_i(t-i)y_{t-i} = \sum_{j=o}^{q} b_j(t-j)\varepsilon_{t-j}$$

On peut estimer les a_{ij} et b_{ij} par une maximisation de la vraisemblance du modèle relativement aux données $y_o \ldots y_t$. Ceci se fait avec un calcul exact de la vraisemblance /2/ au moyen d'un filtre de Kalman appliqué à l'équation d'état issue du modèle ARMA. Le calcul du gradient de ce critère, et même de son Hessien si on le souhaite, est possible en mettant en parallèle avec ce filtre de Kalman des filtres qui lui sont semblables, en nombre égal à celui des composantes du gradient ou du Hessien, cherchées. On imagine facilement le coût d'une telle procédure. Une méthode beaucoup plus rapide a été décrite en /1/. Elle consiste à estimer d'abord la partie autorégressive par une modification de l'estimateur (4), puis la partie MA en l'approximant par un modèle autorégressif. Entre le signal MA et le résidu de ce modèle AR, le modèle cherché est identifié comme modèle à réponse impulsionnelle finie dont la sortie comme l'entrée sont connues. La simplicité et la rapidité de cette procédure sont évidentes. Presque aussi évidente est sa faiblesse quand les zéros du modèle sont peu amortis. Pour y pallier la méthode proposée en /4/ fait appel à la factorisation de Schur de la corrélation estimée (ergodiquement) sur le vecteur Y_t des projections de y_t, et à une normalisation des lignes du modèle vectoriel obtenu, en vue d'extraire le modèle scalaire cherché, cette seconde phase étant aussi la maximisation récursive d'une vraisemblance. Le gain qualitatif de cette méthode s'est hélas payé par un net accroissement du coût de calcul. De plus, si l'estimation de la partie MA s'est améliorée, celle de la partie AR reste médiocre. C'est dans le but de réaliser un meilleur compromis entre le coût et la qualité de l'estimateur qu'a été élaborée une méthode permettant l'estimation simultanée des deux parties AR et MA du modèle, et dont la description va suivre.

III - ESTIMATION SIMULTANEE

Le principe de cette méthode d'estimation simultanée des parties autorégressive et à moyenne ajustée est simple. Il est fondé sur l'équivalence entre le modèle ARMA et un modèle autorégressif d'ordre infini, qui justifie l'approximation de ce modèle ARMA par un modèle AR évolutif d'ordre fini mais élevé. Il est souvent nécessaire que la base des fonctions $f_j(t)$ pilotant le modèle évolutif AR long soit un sur-ensemble de la base pilotant le modèle ARMA. L'ordre du modèle AR long, et la base le pilotant une fois fixés, la procédure d'estimation comporte deux étapes : déterminer ce modèle AR long, puis approcher ce modèle par l'inverse du modèle ARMA cherché. C'est la même idée qui était à l'oeuvre en /3/ pour le calcul d'un modèle ARMA stationnaire.

L'existence d'un modèle autorégressif d'ordre infini équivalent au modèle ARMA est immédiate. Dès que le modèle décrit par l'équation (7) est stable et à inverse stable, le bruit blanc ε_t est l'innovation du signal y_t et il existe un filtre de réponse impulsionnelle (non-stationnaire) à coefficients $c_k(t)$ donnant l'innovation ε_t à partir de y_t :

$$(8) \quad \varepsilon_t = \sum_{k=o}^{\infty} c_k(t)y_{t-k}$$

En combinant (7) et (8) on obtient facilement les relations (9) entre les coefficients du modèle ARMA et ceux du modèle (8).

$$(9) \quad \sum_{j=o}^{\min(i,q)} b_j(t-j)c_{i-j}(t-j) = \begin{cases} a_i(t-i) & \text{si } i=0\ldots p \\ 0 & \text{si } i>p \end{cases}$$

Deux remarques s'imposent à propos du modèle défini en (8). Tout d'abord il est normalisé par la variance de ε_t, l'innovation, ce qui implique que $c_o(t)$ n'est pas nécessairement égal à 1. La contrainte $c_o(t)=1$ qui est indispensable pour l'identification du modèle autorégressif au moyen de l'estimateur (4), devra être introduite lorsqu'on remplacera le modèle autorégressif infini (8) par un modèle d'ordre fini . La second remarque est que les indices temps des prédicteurs et des signaux sont différents dans (8), alors qu'ils sont identiques dans le modèle ARMA (7). Cette modification n'a pas d'autre rôle que de simplifier l'écriture des équations donnant les paramètres du modèle ARMA à partir des $c_k(t)$, essentiellement en permettant dans (9) que les indices temps de b_j et c_{i-j} soient identiques. Pour bénéficier de cet avantage, il faudra pourtant modifier l'estimateur (4) pour obtenir les composantes c_{ij} du modèle AR avec cette nouvelle écriture. Cela peut se faire facilement en utilisant brutalement (4), puis en corrigeant les composantes obtenues. Soient $F(t)$, C_k et D_k les vecteurs contenant respectivement les fonctions $f_o(t) \ldots f_m(t)$ de la base, les composantes $c_{ko} \ldots c_{km}$ du modèle cherché et les composantes $d_{ko} \ldots d_{km}$ du modèle identifié par (4). Pour toute base telle que $F(t+1) = H^T F(t)$ où H est une matrice indépendante de t, on pourra écrire $C_k = H^{-k} D_k$, grâce à l'égalité $c_k(t)=d_k(t)$. L'existence de la matrice H est assurée pour de nombreuses bases, entre autres les polynômes de Legendre, les composantes de Fourier ... /5/.

Venons-en maintenant à l'équivalence avec un modèle AR d'ordre fini, celui-ci étant écrit en (10). On supposera que $g(t)$, le gain du modèle varie moins que les $a_i(t)$ et $b_i(t)$ du modèle ARMA, et on assimilera $g(t)a_i(t-i)$ à $g(t-i)a_i(t-i)$.

$$(10) \quad g(t)\varepsilon_t = \sum_{k=o}^{L} c_k(t)y_{t-k} \quad \text{avec} \quad c_o(t) = 1$$

En utilisant l'assimilation de $g(t)b_j(t-j)$ à $g(t-i)b_j(t-j)$, on combinera (7) et (10) pour obtenir d'abord :

$$(11) \quad \sum_{i=o}^{p} g(t-i)a_i(t-i)y_{t-i} \simeq \sum_{j=o}^{q} b_j(t-j)g(t-j)\varepsilon_{t-j}$$

puis :

$$(12) \quad \sum_{i=o}^{p} g(t-i)a_i(t-i)y_{t-i} \simeq \sum_{n=o}^{L+q} y_{t-n} \sum_{j=o}^{\min(q,n)} b_j(t-j)c_{n-j}(t-j)$$

et enfin :

$$(13) \quad \sum_{j=o}^{\min(q,i)} b_j(t-j)c_{i-j}(t-j) = \begin{cases} g(t-i)a_i(t-i) & \text{si } i=0..p \\ 0 & \text{si } i>p \end{cases}$$

Les relations (13), considérées pour i=0..L permettent de déterminer les a_i et b_j, ou plutôt les A_i et B_j définis par :

$$(14) \quad a_i(t) = A_i^T F(t) \text{ et } b_j(t) = B_j^T F(t)$$

Il n'est cependant pas possible d'écrire directement les équations linéaires en A_i et B_j découlant de (13), car il y a incompatibilité entre le nombre des équations et celui des inconnues. On estimera alors les A_i et B_j en minimisant un critère d'erreur formé à partir des erreurs commises sur les L+1 équations écrites avec (13) pour i=0..L :

$$(15) \quad J = \sum_{t=o}^{T} (g(t)-F(t)^T B_o)^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{t=o}^{T-i} (g(t)F(t)^T A_i - \sum_{j=o}^{\min(i,q)} c_{i-j}(t+i-j)F(t+i-j)^T B_j)^2 + \sum_{i=p+1}^{L} \sum_{t=o}^{T-i} (\sum_{j=o}^{\min(i,q)} c_{i-j}(t+i-j)F(t+i-j)^T B_j)^2$$

Ce critère est quadratique relativement aux A_i et B_j. Son gradient se calcule aisément, et fait apparaître les quantités suivantes :

$$
(16)\quad
\begin{cases}
n_o = \sum\limits_{t=o}^{T} F(t)g(t) \\[2ex]
M_{kj} = \sum\limits_{i=\max(k,j)}^{L} \sum\limits_{t=o}^{T-i} F(t+i-k)c_{i-k}(t+i-k)c_{i-j}(t+i-j)F(t+i-j)^T \\[2ex]
N_{ik} = -\sum\limits_{t=o}^{t-i} F(t+i-k)c_{i-k}(t+i-k)g(t)F(t)^T \\[2ex]
S_i = \sum\limits_{t=o}^{t-i} F(t)\ g(t)^2 F(t)^T
\end{cases}
$$

Les A_i et B_j optimaux au sens du critère J sont alors donnés par le système d'équations (17).

$$
(17)\quad
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
M_{oo} & \cdots & M_{oq} & N_{01}^T & \cdots & N_{op}^T \\
\vdots & & \vdots & N_{11}^T & \ddots\ N_{qq}^T & \vdots \\
M_{qo} & \cdots & M_{qq} & O & & N_{qp}^T \\
\hline
N_{01} & N_{11} & O & S_1 & & \\
\vdots & \ddots & & & \ddots & O \\
\vdots & & N_{qq} & & & \\
\vdots & & \vdots & & O & \\
N_{op} & \cdots & N_{qp} & & & S_p
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} B_o \\ \vdots \\ B_q \\ A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} n_o \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

L'estimateur ainsi obtenu se caractérise manifestement par un coût de calcul relativement important, aussi bien parce que le calcul de la matrice figurant en (17) est coûteux, que parce que la résolution du système est elle-même coûteuse, aucune propriété ne venant accélérer la procédure de résolution, si ce n'est le partitionnement de la matrice en quatre blocs, permettant de résoudre d'abord en A puis en B ou l'inverse. Il est donc souhaitable de modifier l'estimateur (17) en lui conférant une structure plus contrainte, diminuant le nombre de blocs à calculer dans (17) et permettant l'emploi d'un algorithme rapide pour la résolution du système linéaire. C'est ce qui fait l'objet de la section suivante.

IV. VERSION RAPIDE

Pour obtenir un système linéaire mieux structuré, il faut revenir sur la définition du critère J, donnée en (15). Chacun des termes élevés au carré représente une erreur sur l'approximation des parties AR et MA du modèle et la contribution en est calculée sur l'intervalle de temps maximal respectant la contrainte suivant laquelle on n'utilise les fonctions $f_i(t)$, ainsi que les coefficients $c_k(t)$, qu'entre 0 et T. Un moyen de rendre le système plus structuré est alors de remplacer J tel que défini en (15) par le critère J, défini en (18).

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
J' = \sum_{t=o}^{T-L} \Bigg[& (g(t)-F(t)^T B_o)^2 + \sum_{i=1}^{p} \Big(g(t)F(t)^T A_i \\
& - \sum_{j=o}^{\min(i,q)} c_{i-j}(t+i-j)F(t+i-j)^T B_j\Big)^2 \\
& + \sum_{i=p+1}^{L} \Big(\sum_{j=o}^{\min(q,i)} c_{i-j}(t+i-j)F(t+i-j)^T B_j\Big)^2 \Bigg]
\end{aligned}
$$

La minimisation du critère J' se fait exactement comme celle de J, le critère étant quadratique relativement aux A_i et B_j. Les valeurs optimales des A_i et B_j sont donnés par un système linéaire :

$$
(19)\quad
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
M_o & & M_q^T & N_1^T & & N_p^T \\
& \ddots & & N_o^T & \ddots & \\
M_q & & M_o & O & N_o^T & N_{p-q}^T \\
\hline
N_1 & N_o & O & S & & O \\
& \ddots & N_o & & \ddots & \\
N_p & & N_{p-q} & O & & S
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} B_o \\ \vdots \\ B_q \\ A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Les diverses quantités apparaissant dans cette équation sont définies par (20) :

$$
(20)\quad
\begin{cases}
M_i = \sum\limits_{t=o}^{T-L} \sum\limits_{k=o}^{L-i} F(t+k)c_k(t+k)c_{k+i}(t+k+i)F(t+k+i)^T \\[2ex]
N_i = -\sum\limits_{t=o}^{T-L} F(t)g(t)c_i(t+i)F(t+i)^T \\[2ex]
S = \sum\limits_{t=o}^{T-L} F(t)g(t)^2F(t)^T \\[2ex]
R = \sum\limits_{t=o}^{T-L} F(t)g(t)
\end{cases}
$$

Le système linéaire utilise maintenant quatre blocs dont chacun est une matrice de Toëplitz, par blocs de dimension (m+1). Cela n'est pourtant pas suffisant pour obtenir un algorithme simple. En l'état actuel, le système (19) peut être résolu en utilisant la formule du complément de Schur, en inversant d'abord le bloc des M_i, grâce à l'algorithme LWR (Levinson par blocs), puis en résolvant pour le bloc qu'on peut écrire symboliquement $[S]-[N][M]^{-1}[N]^T$ issu de la formule de Schur. Si les détails de cette approche ne sont pas donnés ici, c'est qu'il existe une autre possibilité pour accélérer les calculs, qui est d'introduire la contrainte p=q+1. En imposant ainsi que l'ordre autorégressif soit supérieur de une unité à l'ordre de la partie à moyenne ajustée, on rend chacun des quatre blocs carrés et de taille identique, ce qui permet de réordonner les lignes et colonnes pour obtenir (21). Est-il gênant en pratique d'introduire une telle contrainte ? La réponse semble devoir être négative, puisqu'un modèle ARMA (p,q) d'ordres quelconques peut se mettre sous la forme d'un modèle ARMA(m,n-1) à condition de choisir n=Max (p,q+1) et de compléter par des coefficients nuls celle des deux parties AR et MA dont la taille était insuffisante. On le voit, seul le principe de parcimonie n'y trouve pas son compte.

$$
(21)\quad
\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc}
M_o & N_1^T & M_1^T & N_2^T & & M_{p-1}^T & N_p^T \\
N_1 & S & N_o & 0 & & 0 & 0 \\
\hline
M_1 & N_o^T & M_o & N_1^T & & M_{p-2}^T & N_{p-1}^T \\
N_2 & 0 & N_1 & S & & 0 & 0 \\
\hline
M_2 & 0 & M_1 & N_o^T & & & \\
N_3 & 0 & N_2 & 0 & & & \\
\hline
& \vdots & & & & M_1^T & N_2 \\
& \vdots & & & & N_o & 0 \\
\hline
M_{p-1} & 0 & & & & M_o & N_1^T \\
N_p & 0 & & & & N_1 & S
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} B_o \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{p-1} \\ A_p \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Dans cette écriture de l'estimateur des A_i et B_j, la matrice du système à résoudre présente maintenant une structure de Toëplitz par blocs de dimension 2(m+1). L'algorithme de Levinson on LWR permet de résoudre ce système linéaire d'équations avec un coût en m^3p^2 au lieu du coût en m^3p^3 d'un système linéaire sans structure. Comparé à l'estimateur (17), ce nouvel estimateur a donc permis de gagner en vitesse à la fois dans le calcul de la matrice, les éléments à calculer étant moins nombreux (environ 2p au lieu de $(p+q)^2$), et dans la résolution du système, grâce à la structure de Toëplitz.

On peut encore remarquer une possible accélération du calcul des matrices M_i et dans une moindre mesure des matrices N_i. En introduisant les expressions de $c_k(t) = C_k^T\tilde{F}(t)$ et $c_o(t) = 1$ dans les expressions en (20), on obtient :

$$(22)\quad \begin{cases} M_i = \sum_{t=o}^{T-L} \sum_{k=o}^{L-i} F(t+k)C_k^T\tilde{F}(t+k)\tilde{F}(t+k+i)C_{k+i}F(t+k+i)^T \\ N_i = -\sum_{t=o}^{T-L} F(t)g(t)\tilde{F}(t+i)^T C_i F(t+i) \end{cases}$$

Le vecteur $\tilde{F}(t)$ est constitué avec les fonctions $f_i(t)$ de la base sur laquelle a été estimé le modèle autorégressif long. Ce peut être le même que pour le modèle ARMA cherché et alors $\tilde{F}(t)=F(t)$. Plus généralement, on retiendra pour constituer $\tilde{F}(t)$ un sur-ensemble de la base constituant F(t). A l'origine d'un tel choix se trouve un examen de la relation (9) qui permet de définir récursivement les $c_i(t)$ à partir des $a_i(t)$ et $b_i(t)$. On y observe que si les coefficients du modèle ARMA, les $a_i(t)$ et $b_i(t)$, sont par exemple des polynômes de degré m en t, les coefficients $c_i(t)$ ne le sont pas, et deviennent des séries entières en t, que l'on peut cependant approximer par des polynômes de degré élevé en t, du fait de la stabilité du modèle ARMA et de son inverse. Ce comportement est assez général pour être érigé en règle : la base $\tilde{F}(t)$ définissant le modèle AR long sera soit F(t) soit un sur-ensemble de F(t).

Les relations (22) permettent ensuite de calculer l'élément de la n-ième colonne de M_i et N_i :

$$(23)\quad \begin{cases} M_i(n,r) = [\sum_{t=o}^{T-L} f_n(t)f_r(t+i)\tilde{F}(t+i)^T]C_i \\ \quad + \sum_{k=1}^{L-i} C_k^T [\sum_{t=o}^{T-L} \tilde{F}(t+k)f_n(t+k)f_r(t+k+i)\tilde{F}(t+k+i)^T]C_{k+i} \\ N_o(n,r) = -\sum_{t=o}^{T-L} f_n(t)g(t)f_r(t+i) \\ N_i(n,r) = -[\sum_{t=o}^{T-L} f_n(t)g(t)f_r(t+i)\tilde{F}(t+i)^T]C_i \end{cases}$$

On remarque en associant à ces formules celles donnant S et R que les seules quantités à faire intervenir sont $f_n(t)$, $f_n(t)g(t)$ et $f_n(t)f_{n'}(t)$ pour n=1...m et n'=1...M (M est la dimension de la base $\tilde{F}(t)$ et M>m). De plus les matrices intervenant dans le calcul de $M_i(n,r)$ peuvent toutes être précalculées et stockées indépendamment de la valeur du modèle autorégressif long. Il ne semble pas qu'il subsiste au-delà de ce calcul quelque moyen de l'accélérer encore ... .

V. CONCLUSION

L'estimateur résumé par les équations (20) à (23) fournit un moyen de calculer simultanément les parties autorégressive et à moyenne ajustée d'un modèle ARMA dépendant du temps, lorsque les coefficients de ce modèle sont développés comme des combinaisons linéaires de fonctions du temps connues a priori, les poids a_{ij} et b_{ij} étant eux supposés invariants. Ces poids sont déterminés à partir d'un modèle autorégressif long estimé par un développement sur la même base de fonctions ou un sur-ensemble de celle-ci. Lorsque l'ordre autorégressif du modèle ARMA est de une unité supérieur à l'ordre MA, la structure de Toëplitz de l'estimateur conduit à une accélération du calcul de la matrice du système linéaire puis de sa résolution.

REREFENCES

[1] Y. GRENIER,
Time-dependent ARMA modeling of non-stationary signals. IEEE Trans. on ASSP, Vol. 31, n° 4, pp. 899-911, 1983.

[2] Y. GRENIER,
Estimation de spectres rationnels non-stationnaires. Colloque GRETSI, Nice, pp. 185-192, 1981.

[3] D. GRAUPE, D.J. KRAUSE, J.B. MOORE,
Identification of autoregressive moving average parameters of time-series, IEEE Trans. on AC, Vol. 20, n° 1, pp. 104-107, 1975.

[4] Y. GRENIER
Estimation of nons-stationary moving-average models. IEEE ICASSP-83, pp. 268-271, 1983.

[5] D. ABOUTAJDINE, M. NAJIM,
Time varying linear prediction : new results, 1984 Morocco workshop on Signal Processing and its applications, paper A2/5, 1984.