DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

NOUVELLE APPLICATION DE LA REPRESENTATION DE BARGMANN A LA THEORIE DU SIGNAL

André BERTHON

Société d'Etudes et Conseils AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

La représentation des signaux par des fonctions analytiques entières de la variable complexe temps-fréquence apporte des résultats intéressants non seulement pour l'interprétation des fonctions d'ambiguïté et des représentations temps-fréquence, mais aussi pour la classification et l'approximation des signaux. Dans cette communication on exploite la relation qui existe entre les singularités d'un signal et les propriétés asymptotiques de sa représentation analytique ; ces propriétés sont elles-mêmes liées à la distribution des zéros de la fonction entière. On étudie l'approximation qui découle de l'écriture de la fonction entière comme produit infini de WEIERSTRASS. On donne les premiers éléments d'une classification des signaux invariante sous l'effet des transformations affines du plan temps-fréquence qui conservent l'énergie du signal.

SUMMARY

The representation of signals by entire analytic functions in the complex time-frequency variable is relevant not only to the interpretation of ambiguity functions and time-frequency representations, but also to the classification and approximation of signals. In this paper use is made of the connection between the singularities of signals and the asymptotic properties of their representation, which are related with the distribution of zeros of the entire function. One studies the approximation which stems from the expression of the entire function as a WEIERSTRASS infinite product. A classification of signals is introduced, which is invariant under all affine transformations of the time-frequency plane that leave the energy of the signal unchanged.

NOUVELLE APPLICATION DE LA REPRESENTATION DE BARGMANN A LA THEORIE DU SIGNAL

1.- INTRODUCTION

La Transformation de FOURIER permet de caractériser les signaux par leurs propriétés spectrales; si l'on entend par signal d'énergie finie une fonction de carré sommable, sa transformée appartient au même espace L_2, la correspondance est une isométrie. La transformation laisse invariant l'espace des fonctions tempérées, et s'étend naturellement à une bijection continue de l'espace de distributions S' dual de S . Certaines propriétés des signaux comme la limitation du support et l'analyticité sont alors mises en correspondance par le passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle, et apparaissent comme mutuellement exclusives ; un autre exemple est l'inégalité $BT > \frac{1}{2}$ où B et T sont les variances de la fréquence et du temps, appelée improprement (en dehors du cadre de la mécanique quantique) relation d'incertitude.

La représentation de BARGMANN [1], qui associe au signal une fonction analytique entière, présente l'intérêt de traiter symétriquement domaine temporel et domaine fréquentiel. En particulier elle met en lumière la symétrie de la fonction d'ambiguïté d'un signal vis-à-vis de ses deux variables (retard et décalage en fréquence), ainsi que les propriétés des transformations linéaires du plan temps-fréquence qui conservent l'énergie du signal [2].

Le but de cette présentation est d'ébaucher une caractérisation des signaux à partir de leur représentation de BARGMANN. On sait qu'une fonction entière est complètement définie par ses zéros, qui déterminent son genre, et par les coefficients d'un polynôme qui achèvent de fixer son comportement à l'infini. On trouve donc là, d'une part, une méthode d'approximation différente des développements usuels et d'autre part un moyen de classification invariant par rapport à la symétrie temps-fréquence.

2.- REPRESENTATION DE BARGMANN ET FONCTIONS D'AMBIGUITE

2.1 Généralités

Soit B l'espace des fonctions entières de carré sommable pour la mesure $d\mu(z) = \exp(-|z|^2) d^2z/\pi$. L'isomorphisme de BARGMANN est défini par :

$$f(x) \longleftrightarrow F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z,x) f(x) dx$$

$$A(z,x) = \pi^{-1/4} \exp\left(-\tfrac{1}{2} z^2 + \sqrt{2}\, zx - \tfrac{1}{2} x^2\right)$$

On notera χ_w la fonction $\exp(\bar{w} z)$, élément de B . On a la propriété de noyau reproduisant :

$$(1) \quad F(z) = \int e^{\bar{w} z} F(w)\, d\mu(w) = \langle \chi_z / F \rangle$$

ou encore : $\int |\chi_w\rangle \langle \chi_w|\, d\mu(w) = 1$

De même un opérateur linéaire A est entièrement déterminé par ses éléments de matrice $A(\bar{w}, z) = \langle \chi_z / A / \chi_w \rangle$, fonctions analytiques des variables $\bar{w}$ et z [3].

Proposition 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur A soit isométrique est que l'on ait :

$$\int \overline{A(\bar{w},z)}\, A(\bar{u},z)\, d\mu(z) = e^{w\bar{u}}$$

En effet cette relation exprime que le produit scalaire est conservé pour les fonctions χ_w et χ_u , donc pour deux fonctions quelconques en vertu de (1).

2.2 Translations

Pour tout nombre complexe λ l'opérateur V_λ est défini par :

$$V_\lambda F(z) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 + \bar{\lambda} z}\, F(z - \lambda)$$

Ces opérateurs sont unitaires et vérifient :

$$V_\lambda V_\mu = \exp\left(i\, \mathrm{Im}\left(\bar{\lambda}\mu\right)\right) V_{\lambda+\mu}$$

relation dont la non-commutativité provient de celle des générateurs associés aux translations réelles et imaginaires pures, qui correspondent dans l'espace L_2 aux opérateurs de dérivation et de multiplication par x .

La translation dans le temps $f(x) \to f(x+a)$ est représentée par l'opérateur V_λ avec $\lambda = -a/\sqrt{2}$, le décalage en fréquence de $b/2\pi$, soit $f(x) \to e^{ibx} f(x)$, est représenté par V_λ avec $\lambda = -ib/\sqrt{2}$. Il en résulte une définition très simple de la fonction d'ambiguïté en translation pour deux fonctions f, g représentées par F , G :

$$\chi_{fg}(x_0, y_0) = \int \bar{f}\left(x - \frac{x_0}{2}\right) g\left(x + \frac{x_0}{2}\right) e^{-iy_0 x} dx$$

$$= \langle F / V_{-\lambda} / G \rangle \qquad \lambda = \frac{x_0 - iy_0}{\sqrt{2}}$$

Inversement on sait que l'on peut retrouver f et g en partant de leur fonction d'ambiguïté croisée, ce qui s'écrit dans l'espace [3]:

$$(2) \quad \int \langle F / V_{-\lambda} / G \rangle\, e^{\frac{1}{2}|\lambda^2| - \bar{\sigma}\lambda + \tau\bar{\lambda}}\, d\mu(\lambda) = e^{-\tau\bar{\sigma}}\, G(\tau)\, \overline{F(\sigma)}$$

Cette relation peut s'interpréter en posant $x_0 = \sqrt{2}\,\xi_0$, $y_0 = \sqrt{2}\,\eta_0$, $z_1 = (\tau - \bar{\sigma})/\sqrt{2}$ et $z_2 = -i(\tau + \bar{\sigma})/\sqrt{2}$. On notera que :

$$\tau\bar{\sigma} + \tfrac{1}{2}|\lambda|^2 - \bar{\sigma}\lambda + \tau\bar{\lambda} - |\lambda|^2 =$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \sqrt{2}\,\xi_0 z_1 + \sqrt{2}\,\eta_0 z_2 - \tfrac{1}{2}\left(\xi_0^2 + \eta_0^2\right)$$

On sait par ailleurs [2] que la fonction χ_{fg} est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2

La Transformée de BARGMANN à deux dimensions $X_{fg}(z_1, z_2)$ de la fonction $\chi_{fg}(\xi_0\sqrt{2}, \eta_0\sqrt{2})$ où χ_{fg} est la fonction d'ambiguïté croisée de deux fonctions vérifie :

$$X_{fg}(z_1, z_2) = \pi^{1/2}\, F\left(\frac{-\bar{z}_1 - i\bar{z}_2}{\sqrt{2}}\right) G\left(\frac{-z_1 + iz_2}{\sqrt{2}}\right)$$

Cette relation est l'analogue de la correspondance entre produit ordinaire et produit de convolution dans la Transformation de FOURIER, si l'on remarque que la fonction χ_{Fg} est une sorte de produit de convolution à deux variables entre les fonctions $f(-x)$ et $g(x)$.

2.3 Rotations et changements d'échelle

Il est clair que toute caractérisation intrinsèque d'une forme de signal doit être indépendante de l'unité de temps choisie, c'est-à-dire des transformations de changement d'échelle $f(x) \to k^{1/2} f(kx)$ avec k réel positif, où la Transformée de FOURIER $\hat{f}$ de f subit la contraction du rapport $1/k$. Par ailleurs si $F(z)$ est la représentation de BARGMANN de f, celle de $\hat{f}$ est $F(iz)$ et il existe une famille continue de transformations $F(z) \to F(e^{i\theta} z)$ qui fait passer de l'une à l'autre [2]. Ainsi un changement d'échelle sur l'axe réel doit s'accompagner du changement inverse sur l'axe imaginaire, ce qui conduit à étudier plus généralement les transformations linéaires du plan temps-fréquence qui conservent l'élément de surface, c'est-à-dire, en posant $z = \xi + i\eta$:

$$g\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} ; \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} ; \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

Les matrices g forment le groupe $SL(2,\mathbb{R})$. Ce n'est que dans le cas des rotations que la transformation opérée sur z est analytique. Par ailleurs ces rotations, sous-groupe isomorphe à S^1 et les changements d'échelle, sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}^+$, engendrent le groupe complet, comme on peut le vérifier en écrivant :

$$g = R_{\frac{\theta+\zeta}{2}}\, E_{e^{\varphi}}\, R_{\frac{\theta-\zeta}{2}}$$

où R_u désigne la rotation de matrice $\begin{pmatrix}\cos u & -\sin u\\ \sin u & \cos u\end{pmatrix}$, E_k le changement d'échelle de matrice $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1/k\end{pmatrix}$, les paramètres étant liés aux éléments de la matrice g par les formules :

$$\alpha + i\beta = Ch\varphi\, e^{i\theta} + Sh\varphi\, e^{-i\zeta} \qquad \delta + i\gamma = Ch\varphi\, e^{-i\theta} - Sh\varphi\, e^{-i\zeta}$$

qui constituent l'écriture la plus générale des éléments de matrice de ce groupe à trois paramètres avec φ réel ou nul, θ et ζ réels.

On peut définir une représentation de $SL(2,\mathbb{R})$ dans l'espace hilbertien $\mathcal{B}$ en associant à l'opérateur U_g défini par le changement de variable $(\xi,\eta) \to (\alpha\xi+\beta\eta, \gamma\xi+\delta\eta)$ dans les fonctions d'ambiguïté [4]. La condition D et $g=1$ équivaut à la conservation de l'intégrale $\int \chi\, d\xi\, d\eta$, qui est égale au produit scalaire des deux fonctions. Autrement dit, en notant $g.\lambda$ le transformé du nombre complexe :

$$(3) \quad \langle U_g F / V_\lambda / U_g G \rangle = \langle F / V_{g.\lambda} / G \rangle$$

ou encore : $V_{g.\lambda} = U_g^+ V_\lambda U_g$

Le calcul explicite de l'opérateur se fait à partir de la formule d'inversion (2) et on obtient [2] ;

$$(4) \quad U_g(u,\bar{w}) = (Ch\varphi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} e^{i(\theta-\zeta)} th\varphi\, u^2 + \frac{e^{i\theta}\bar{w}u}{ch\varphi} + \frac{1}{2} e^{i(\theta+\zeta)} th\varphi\, \bar{w}^2}$$

On vérifie en utilisant la Proposition 1 que les opérateurs U_g sont unitaires.

La correspondance entre une fonction $f(x)$ de l'espace L_2 et la fonction entière $U_g F$ est une nouvelle isométrie de L_2 sur $\mathcal{B}$. De manière analogue à l'isométrie de BARGMANN elle peut s'écrire :

$$U_g F(z) = \int A_g(z,x)\, f(x)\, dx$$

où le noyau A_g est donné par l'expression :

$$(5) \quad A_g(z,x) = \frac{\pi^{-1/4}}{|K|^{1/2}} \left(\frac{\bar{K}}{\bar{K}+\lambda}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{K+\bar{\lambda}}{\bar{K}+\lambda} z^2 + \frac{\sqrt{2}\, zx}{\bar{K}+\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\bar{K}-\lambda}{\bar{K}+\lambda} x^2\right]$$

en posant $K = Ch\varphi\, e^{i\theta}$, $\lambda = Sh\varphi\, e^{i\zeta}$. Pour les rotations R_θ de plan complexe, qui correspondent à $K = e^{i\theta}$, $\lambda = 0$ on retrouve bien $A_g(z,x) = A(ze^{i\theta}, x)$. En particulier l'opérateur U associé à $R_{\pi/2}$ est la traduction dans l'espace $\mathcal{B}$ de l'opérateur de FOURIER. Pour les changements d'échelle purs, caractérisés par $\theta = \zeta = 0$, on vérifie de même $A_g(z,x) = e^{-\varphi/2} A(z, xe^{-\varphi})$. Plus généralement le coefficient du terme x^2 dans l'expression du noyau est réel lorsque $\theta + \zeta = 0$ (cette condition ne détermine pas un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$) et l'on a alors :

$$A_g(z,x) = e^{-\varphi/2} A(z, xe^{-\varphi})$$

On peut naturellement expliciter les opérateurs U_g dans l'espace L_2 comme opérateurs intégraux dont les noyaux $N_g(x,y)$ sont définis par :

$$N_g(x,y) = \int A_g(z,x)\, \overline{A(z,y)}\, d\mu(z)$$

pourvu que cette intégrale converge ; on peut écrire :

$$(6) \quad A_g(z,x) = \frac{1}{|K|^{1/2}} \left(\frac{\bar{K}}{\bar{K}+\lambda}\right)^{1/2} e^{i\frac{Im(K\lambda)}{|\bar{K}+\lambda|^2}} A\left(ze^{-iv}, \frac{x}{u}\right)$$

où u et v sont le module et la phase du nombre complexe $\bar{K}+\lambda$ (en terme des éléments de la matrice g, $ue^{iv} = \alpha - i\beta$) utilisant des formules connues ([1] on obtient :

$$(7) \quad N_g(x,y) = \frac{1}{|K|^{1/2}} \left(\frac{\bar{K}}{\bar{K}+\lambda}\right)^{1/2} \left[\pi\left(1-e^{-2iv}\right)\right]^{-1/2} e^{i\frac{Im(K\lambda)}{|\bar{K}+\lambda|^2} x^2} e^{-\frac{i}{4}\left[tg\frac{v}{2}\left(\frac{x}{u}+y\right)^2 - cotg\frac{v}{2}\left(\frac{x}{u}-y\right)^2\right]}$$

pour v différent de 0 et π.

2.4 Classes d'équivalence et fonctions d'ambiguïté généralisées

On a étudié deux familles de transformation unitaires V_λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) et U_g ($g \in SL(2,\mathbb{R})$) qui correspondent à des transformations simples du plan temps-fréquence. Si G est le groupe généré par ces deux familles d'opérateurs, on peut considérer comme équivalents deux signaux qui se déduisent l'un de l'autre, dans la représentation de BARGMANN, par une opération de ce groupe. Vues dans l'espace L_2, ces opérations comprennent notamment : les translations, les décalages de fréquence, les multiplications et convolutions par les fonctions de la forme $\exp(i\gamma x^2)$, les changements d'échelle, la transformation de FOURIER et la parité qui sont des éléments particuliers d'un sous-groupe isomorphe au groupe des rotations du plan.

Toutes ces transformations sont physiquement réalisables par des moyens divers (ex. : effet Doppler, compression d'impulsion, transformation de FOURIER optique). Identifier la transformation subie par un signal donné conduit à étudier la sortie du filtre adapté, qui est égale à $\langle F / U_g / F \rangle$ ($g \in G$). Cet élément de matrice peut être considéré comme la fonction d'ambiguïté associée au signal pour le groupe

En vertu des relations (1) et (3) tout élément de G peut s'écrire, à une phase près, comme produit d'un opérateur V_λ par un opérateur U_g, $g \in SL(2,\mathbb{R})$. La fonction d'ambiguïté la plus générale dépend donc de cinq paramètres (par exemple : distance, vitesse et accélération de la cible, taux de compression et de modulation de l'impulsion). On s'intéresse en général à des sous-groupes de G à deux paramètres : fonctions d'ambiguïté de WOODWARD (2) ou en compression [5].

3.- CARACTERISATION DES FONCTIONS DE L'ESPACE B

Si $\{a_n\}$ est la suite des zéros d'une fonction entière d'ordre fini ρ elle peut s'écrire en vertu du théorème de HADAMARD [6] :

$$(8) \quad F(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k} \right]$$

où p est un entier $\leqslant \rho$ et P un polynôme de degré $\leqslant \rho$. L'ordre ρ et le type σ sont définis par :

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} M(r)}{\operatorname{Log} r} \; ; \; \sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r^\rho}$$

$M(r)$ étant le maximum de $|F(z)|$ pour $|z| \leqslant r$.

Les fonctions de l'espace hilbertien B vérifient $M(r) \leqslant e^{1/2\, r^2} \| F \|$ et sont donc d'ordre $\rho \leqslant 2$ et de type $\sigma \leqslant 1/2$. La réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de la fonction $\pi^{-1/4} \exp(-\frac{1}{2} z^2)$ qui est la représentation de BARGMANN de la distribution de DIRAC et n'est pas de carré intégrable.

Dans l'expression (8) on a donc p = 0,1 ou 2 ; c'est le plus petit entier tel que la série $\sum 1/|a_n|^{p+1}$ converge. De plus si l'ordre ρ n'est pas entier on a nécessairement une infinité de zéros et le degré de P est inférieur à ρ. Si ρ est entier avec $p < \rho$ le type est égal au coefficient du terme de plus haut degré de P.

Lorsque l'ordre est entier et égal au genre $p = \rho$, le type est max (Δ, δ), où Δ est la limite supérieure de $n(r)/r^2$ quand r augmente indéfiniment, $n(r)$ étant le nombre de zéros de module inférieur à r, et δ est la limite pour $r \to \infty$ de $|\delta(r)|$ avec :

$$(9) \quad \delta(r) = \alpha_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n| \leqslant r} a_n^{-\rho}$$

α_ρ étant le coefficient du terme de degré ρ du polynôme P. L'existence de δ signifie que la série (9) converge en valeur principale. Les fonctions de l'espace B qui sont d'ordre et de genre 2 sont nécessairement dans ce cas, avec $\Delta \leqslant 1/2$ et $\delta \leqslant 1/2$.

4.- ELEMENTS DE CLASSIFICATION

4.1 Généralités

Si l'on cherche à caractériser les fonctions de manière invariante par l'action du groupe G il est évident que l'ordre ρ n'est pas un critère de classification. Ainsi les fonctions $\chi_u(z) = e^{uz}$ qui sont d'ordre 1 (d'ordre 0 pour u = 0) ont pour transformées les fonctions $U_g(z,\bar{u})$ données par (4), qui sont d'ordre 2 et de type strictement inférieur à 1/2.

Il s'agit là de fonctions qui ne s'annulent pas. Ajouter des zéros revient à multiplier par des polynômes du premier degré en z. On notera a^+ l'opérateur de multiplication par z, dont le conjugué est l'opérateur de dérivation (ce sont les opérateurs de création et d'annihilation lorsqu'on identifie à un espace de FOCK avec les fonctions $\{z^n/(n!)^{1/2}\}$ pour base orthonormale [1]). Pour tout opérateur A et tout polynôme P on a l'identité :

$$[AP(a^+)](z,\bar{u}) = P\left(\frac{d}{d\bar{u}}\right) A(z,\bar{u})$$

qui résulte immédiatement de la propriété de noyau reproduisant :

$$A(z,\bar{u}) = \int A(z,\bar{w})\, e^{\bar{u}w} d\mu(w)$$

et traduit simplement la conjugaison hermitique entre a et a^+. En particularisant pour les opérateurs U_g donnés par (4) et les polynômes du premier degré on trouve :

$$[U_g(a^+ - \alpha)](z,\bar{u}) = \left(\frac{e^{i\theta}}{ch\varphi} z - \alpha + e^{i(\theta+\xi)} th\varphi\, \bar{u}\right) U_g(z,\bar{u})$$

Cette formule exprime le déplacement d'un zéro sous l'effet de la transformation U_g ; comme il dépend de l'état cohérent χ_u considéré, il n'existe pas en général de relation simple entre la position des zéros de deux fonctions G équivalentes. On a :

$$[U_g(a^+ - \alpha)F](z) = \left(\frac{e^{i\theta}}{ch\varphi} z - \alpha\right)(U_g F)(z) + e^{i(\theta+\xi)} th\varphi\, U_g \frac{dF}{dz}$$

Le cas particulier $\varphi = 0$ correspond évidemment à une rotation des zéros autour de l'origine.

4.2 Résultats

Proposition 3

Les fonctions sans zéros constituent la classe des fonctions G équivalentes aux fonctions constantes.

La formule (4) permet d'identifier immédiatement g et w tels que la fonction considérée soit $U_g \chi_w$, ou encore $U_g V_w \chi_o$; rappelons que la fonction constante χ_o est la représentation de BARGMANN du signal gaussien centré, de produit BT minimum, avec $B = T$.

Proposition 4

Les fonctions ayant un nombre fini de zéros constituent une famille G invariante.

D'après ce qui précède ce sont les fonctions de la forme $P(a^+) U_g \chi_w$, où P est un polynôme. En vertu de la formule (8), dans laquelle le produit infini converge uniformément sur tout compact, la Transformée de BARGMANN d'un signal quelconque peut être approximée par des fonctions de ce type. Dans l'espace L_2 les fonctions sans zéros correspondent aux exponentielles de polynômes complexes du second degré en x [2], dont les propriétés dans le plan temps-fréquence ont été abondamment étudiées [7], [8]. Les fonctions à nombre de zéros fini s'obtiennent en multipliant ces dernières par des polynômes. Dans chacune des sous-familles où g et w sont fixés on a une relation linéaire entre les opérateurs a et a^+, ou, dans l'espace L_2, entre les opérateurs de multiplication par x et de dérivation. Cependant l'approximation d'une fonction donnée par des fonctions d'une même sous-famille n'est possible a priori que si l'on peut regrouper les termes exponentiels dans la représentation de HADAMARD, c'est-à-dire si $\sum 1/|a_n| < \infty$.

Proposition 5

La représentation de BARGMANN des fonctions G équivalentes à des signaux à support borné est caractérisée par un ordre égal à 2, un type égal à 1/2, et une famille infinie de zéros tels que, après une rotation convenable autour de l'origine, on ait : $\sum |Im(1/a_n)| < \infty$, la série $\sum 1/a_n$ convergeant en valeur principale.

Cela résulte des propriétés connues des fonctions de type exponentiel, c'est-à-dire d'ordre 1 et de type fini, dont l'indicatrice est de plus un segment de droite [6] ; c'est le cas des signaux d'énergie finie à bande passante limitée [9], Transformées de FOURIER de fonctions à support borné. De même, pour la Transformation de BARGMANN, la formule (5) montre immédiatement que si $f(x)$ est à support borné la fonction $U_g F(z)$ est le produit d'une telle fonction de type exponentiel par $\exp(-\frac{1}{2}\alpha z^2)$ où α est un nombre complexe de module 1. Elle est donc d'ordre 2 et de type 1/2. La condition imposée aux zéros est destinée à assurer que la fonction entière est de carré intégrable, les zéros étant concentrés au voisinage de la ligne $\arg z = \pi/2 - \arg\alpha \pmod{\pi}$ direction dans laquelle $|\exp(-\frac{\alpha}{2} z^2)|^2 \times \exp(-|z|^2)$ ne tend pas vers zéro.

5.- CONCLUSIONS

Les résultats qui précèdent, quoique très incomplets, illustrent le pouvoir de classification de la représentation de BARGMANN. Ils n'épuisent certainement pas les ressources que contient, dans cette optique, la théorie des fonctions analytiques en matière de caractérisation des signaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] BARGMANN (V). On a Hilbert Space of Analytic Functions and an associated Integral Transform. Commun. Pure and Appl. Math. 14 (1967), pp. 187-214.

[2] BERTHON (A.). Application de la Transformation de BARGMANN à la classification des signaux. 9ème Colloque GRETSI, pp. 51-55.

[3] BERTHON (A.). Représentation des signaux par des fonctions entières. 8ème Colloque GRETSI, pp. 75-81.

[4] PAPOULIS (A.). Signal Analysis. Mc Graw Hill, 1977.

[5] JOURDAIN (G.). Synthèse de signaux certains dont on connaît la fonction d'ambiguïté de type Woodward ou de type en compression. Ann. Télécomm. 32, (1977), pp. 19-23

[6] LEVIN (B.). Distribution of Zeros of Entire Functions. American Math. Soc. (1964).

[7] GRENIER (Y.). Modélisation de signaux non-stationnaires à faible produit BT. 9ème Colloque GRETSI, pp. 35-41.

[8] KODERA (K.), GENDRIN (R.), de VILLEDARY (C.). Analysis of Time-Varying Signals with Small BT Values. IEEE Trans. ASSP, vol. 26, pp. 64-76 (1978)

[9] REQUICHA (A.). The Zeros of Entire Function : Theory and Engineering Applications. Proc. IEEE vol. 68, n° 3, pp. 308-328 (1980)