

NOUVELLES APPLICATIONS DE LA GEOMETRIE CLASSIQUE A LA RECONNAISSANCE
DES FORMES

NEW APPLICATIONS OF CLASSICAL GEOMETRY TO PATTERN RECOGNITION

Michel JOURLIN - Bernard LAGET

U.E.R SCIENCES - 23, rue du Docteur MICHELON - 42023 SAINT-ETIENNE CEDEX

RESUME

Cet article comprend deux parties :

- La première, intitulée "centre de gravité et point de Ferret" fait suite aux travaux de BESICOVITCH. Dans [BE] il avait donné un moyen d'apprécier la dissymétrie d'un élément K de l'espace $\mathcal{K}_c(X)$ formé des ensembles convexes compacts d'un espace affine X . Nous proposons une autre approche du même problème en associant à chaque K de $\mathcal{K}_c(X)$ un nouvel élément K_1 du même espace dont la forme est liée au degré d'asymétrie de K .

- La seconde : " un algorithme de fenêtre disquée" utilise la soustraction de MINKOWSKI pour obtenir une méthode constructive donnant le disque d'aire minimale contenant un compact K du plan. L'existence d'un tel disque est bien connue des mathématiciens mais sa construction pratique permet d'envisager des applications intéressantes.

SUMMARY

This paper is composed of two parts :

- The first "Barycenter and Ferret's point" is very much indebted with BESICOVITCH's works. In [BE] he showed how we can measure the asymmetry of an element K of the space $\mathcal{K}_c(X)$ whose elements are the convex compact sets of an affine space X . We propose another approach of the same problem by associating at each $K \in \mathcal{K}_c(X)$ a new set $K_1 \in \mathcal{K}_c(X)$ whose form is related with the asymmetry of K .

- The second " an algorithm of circular window" use the MINKOWSKI's subtraction to obtain a constructive method giving the disk with minimum area containing a plane compact set K . The theoretical existence of such a disk is very well known by mathematicians but it's construction algorithm allows interesting and new applications.



I - CENTRE DE GRAVITE ET POINT DE FERRET

Dans la suite X on désignera un espace affine euclidien et K un convexe compact de X.

DEFINITION - Soit D une droite quelconque de X. On appelle diamètre de Ferret de K dans la direction D et on note $d_D(K)$ la distance entre les deux droites parallèles à D et s'appuyant sur K.

On établit sans difficulté le résultat suivant :

PROPOSITION 1 - Lorsque D varie, la famille des diamètres de Ferret $(d_D(K))_D$ est à valeurs dans l'intervalle $[d_{D_m}(K), d_{D_M}(K)]$ où $d_{D_m}(K)$ et $d_{D_M}(K)$ désignent respectivement les diamètres de Ferret minimum et maximum de K.

Dans une direction D_m réalisant le diamètre minimum on peut trouver une corde de K, orthogonale à D_m et de longueur $d_{D_m}(K)$. De même dans une direction D_M correspondant à un diamètre maximum. Dans ce dernier cas, les droites d'appui sur K n'ont qu'un point en commun avec K.

Dans [B], Berger énonce comme corollaire du théorème de Helly un résultat dû à Valentine [V] :

PROPOSITION 2 - Pour tout convexe compact K de X espace affine de dimension n, il existe au moins un point c de K tel que toute corde [a,b] de K passant par c vérifie

$$\frac{1}{n} \leq \frac{ca}{bc} \leq n$$

Berger remarque aussi que ce sont les meilleures bornes possibles en prenant l'exemple d'un triangle quelconque pour lequel le centre de gravité est l'unique point c. Il est clair qu'en dimension 2, on peut établir la proposition précédente par des méthodes élémentaires, en précisant que G fait partie des points c, ce qui permet de voir en ce résultat un test de triangularité.

PROPOSITION 3 - Si G est le centre de gravité de K et $d_D(K)$ son diamètre de Ferret dans une direction D, on a la double inégalité :

$$\frac{d_D(K)}{3} \leq d(G, K^c) \leq \frac{d_D(K)}{2} \quad (2) \quad (1) \quad (2)$$

où $d(G, K^c)$ représente la distance de G au complémentaire de K.

De plus, si on remplace D par une direction D_m

de diamètre minimal, l'inégalité (2) n'est une égalité que pour le triangle.

PREUVE - L'inégalité (1) est évidente. Pour prouver l'inégalité (2) donnons-nous une direction D quelconque et D_0 et D_1 les droites d'appui sur K parallèles à D. On construit les droites $D_{\frac{1}{3}}$ et $D_{\frac{2}{3}}$ parallèles à D et vérifiant :

$$d(D_0, D_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} d(D_0, D_1) = d(D_2, D_1)$$

$$d(D_0, D_{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3} d(D_0, D_1) = d(D_1, D_{\frac{1}{3}})$$

Il est alors évident que le centre de gravité G de K appartient à la trace sur K de la bande délimitée par les droites $D_{\frac{1}{3}}$ et $D_{\frac{2}{3}}$ (cf. fig. 1).

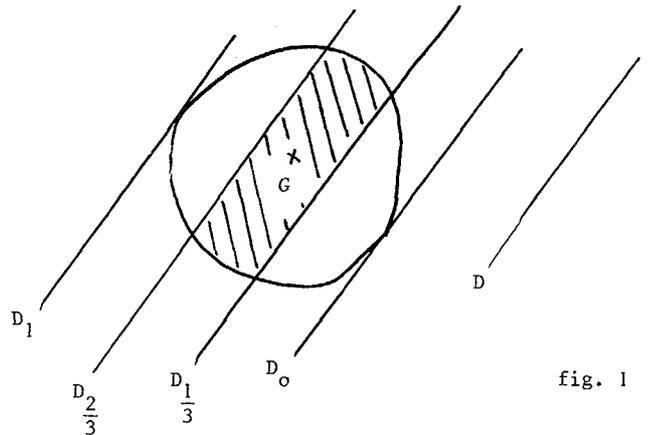


fig. 1

En effet, si a est un point d'appui de D_1 sur K (a est le point extrême d'appui ou alors on prend un point quelconque du segment d'appui) et si c et d sont les intersections de $D_{\frac{1}{3}}$ avec la frontière de K, les cordes ac et ad de K coupent D_0 en e et f délimitant les ensembles 1 et 2 (cf. fig. 2)

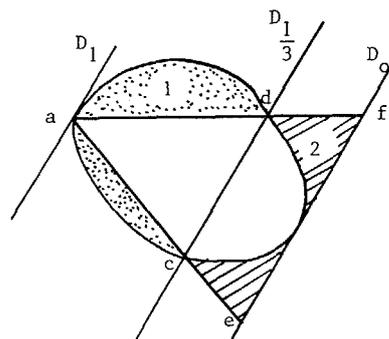


fig. 2

Le centre de gravité du triangle aef appartient évidemment à $D_{\frac{1}{3}}$. Or K est obtenu en réunissant la partie 1 à aef et en soustrayant la partie 2. Il est clair que le centre de gravité de K est dans la bande $D_{\frac{1}{3}}$ et qu'il n'appartient à $D_{\frac{1}{3}}$ que si les parties 1 et 2 sont vides c'est à dire si K est un triangle.

On conclut en reprenant un raisonnement analogue à partir d'un point d'appui b de D_0 sur K.

REMARQUE - La double inégalité de la proposition précédente étant indépendante de la direction D et chaque direction déterminant une bande à laquelle appartient le centre de gravité K, on peut définir une partie K_1 de K comme l'intersection de ces bandes lorsque D varie. Il est manifeste que K_1 est un convexe compact que nous appellerons le premier compact de Ferret de K.

APPLICATION - Evaluation de l'asymétrie d'un convexe compact K.

Dans [BE], Besicovitch propose comme test d'asymétrie de K d'évaluer $1 - \frac{\text{aire}(K')}{\text{aire}(K)}$ où K' désigne le plus grand convexe compact à centre de symétrie inclus dans K et il montre que ce coefficient varie entre 0 et $\frac{1}{3}$, la borne supérieure étant atteinte pour un triangle.

Notre construction précédente permet une autre approche par le calcul de $\frac{\text{aire}(K_1)}{\text{aire}(K)}$ où K_1 est le premier compact de Ferret de K. Il est facile de voir que ce quotient varie entre 0 pour un triangle et $\frac{1}{9}$ pour un compact à centre de symétrie car dans ce cas K_1 sera un homothétique de K dans le rapport $\frac{1}{3}$.

On peut aller plus loin avec la notion de compact de Ferret puisque K_1 est convexe compact. On lui associe alors un convexe compact K_2 et on construit ainsi une suite (K_n) .

PROPOSITION 4 - La suite de Ferret (K_n) d'un convexe compact K est une suite décroissante de convexes compacts non vides dont le diamètre $d(K_n)$ tend vers zéro. Elle converge donc vers un unique

point f_K appelé point de Ferret de K.

PREUVE - (K_n) est décroissante par construction et chaque K_n contient le centre de gravité de K_{n-1} . De plus on a $d(K_n) \leq \frac{1}{3} d(K_{n-1})$.

REMARQUES -

1) Le point f_K est généralement distinct du centre de gravité g_K de K. Cependant, il peut y avoir confusion entre ces points mais la "distance" entre f_K et g_K ne peut s'exploiter en termes de dissymétrie. En effet f_K et g_K sont identiques lorsque K est à centre de symétrie mais aussi lorsque K est un triangle i.e le plus dissymétrique des convexes compacts.

2) La "vitesse" de convergence de la suite (K_n) vers K est certainement liée à l'asymétrie de K. En effet f_K est obtenu en une infinité dénombrable d'itérations si K est à centre de symétrie, en une itération si K est un triangle, en deux itérations pour certains trapèzes etc....

II - UN ALGORITHME DE FENETRE DISQUEE -

RAPPEL - Soient A et B deux parties quelconques de R^n .

DEFINITION - On appelle addition de Minkowski l'application de $\mathcal{P}(R^n) \times \mathcal{P}(R^n)$ dans $\mathcal{P}(R^n)$ qui au couple (A,B) fait correspondre la partie notée $A \oplus B$ définie par $A \oplus B = \{a+b\}_{a \in A, b \in B}$.

On appelle soustraction de Minkowski la partie notée $A \ominus B$ définie par $A \ominus B = (A^c + B)^c$

REMARQUE - Dans l'addition A et B jouent des rôles identiques : la commutativité est évidente. Ce n'est pas le cas pour la soustraction : A est la partie sur laquelle on cherche à réaliser une transformation à l'aide de B : B sera l'élément structurant.

Si maintenant K est un compact de R^n et $B(x,r]$ une boule fermée, il est clair que si $Fr(K)$ désigne la frontière de K on a :

$$K \subset B(x,r] \Leftrightarrow \forall y \in K \quad x \in B(y,r] \\ \Rightarrow \forall y \in Fr(K) \quad x \in B(y,r]$$



PROPOSITION 5 - La réciproque est vraie. Pour K compact de \mathbb{R}^n , on a

$$\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, r] \Rightarrow K \subset B(x, r]$$

PREUVE - Il suffit d'établir: $\forall z \in K, x \in B(z, r]$.

Soit donc z un point intérieur à K . On peut alors trouver α réel > 0 tel que $B(z, \alpha] \subset K$. De plus K est compact donc borné : il existe $\beta > 0$ tel que $K \subset B(x, \beta]$. Dans ces conditions, la demi-droite d'origine x passant par z coupe la sphère $S(x, \beta)$ en un point $u \notin K$. Le segment connexe $[z, u]$ rencontre alors K en z et K^c en u et on a donc

$]z, u[\cap \text{Fr}(K) \neq \emptyset$. Soit y un point de $]z, u[\cap \text{Fr}(K)$. On a $d(x, y) > d(x, z)$ et puisque par hypothèse $x \in B(y, r]$ on a bien $x \in B(z, r]$.

INTERPRETATION - Pour tester s'il existe une boule de rayon r contenant K , on examine si $\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, r]$

est non vide; or chaque boule $B(y, r]$ est la translation $(B(o, r])_y$ de $B(o, r]$ par le vecteur y et on sait que $\bigcap_{y \in K} (B(o, r])_y$ n'est autre que la soustraction de Minkowski $B(o, r] \ominus K$.

COROLLAIRE - Soit I l'ensemble (non vide!) des $r \in \mathbb{R}$ tels que $\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, r] \neq \emptyset$. On a alors

$$\bigcap_{r \in I} \left(\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, r] \right) \neq \emptyset$$

et cette intersection est même réduite à un point qui n'est autre que le centre de la boule circonscrite à K .

PREUVE - Lorsque r décroît dans I l'ensemble

$$\left\{ \bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, r] \right\}$$

forme une famille décroissante de fermés non vides et donc leur intersection n'est pas vide, puisque tout se passe à l'intérieur de l'un de ces fermés qui est un compact. Il reste à montrer que cette intersection est réduite à un point.

Soient a et b deux points de $\text{Fr}(K)$ dont la distance réalise le diamètre $d(K)$. Si x est le milieu de $[a, b]$ deux cas sont possibles :

1er cas : $K \subset B(x, \frac{d(K)}{2})$ et on a bien trouvé la boule maximale contenant K car alors

$$\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, \frac{d(K)}{2}] = B(a, \frac{d(K)}{2}) \cap B(b, \frac{d(K)}{2})$$

2ème cas - $K \not\subset B(x, \frac{d(K)}{2})$. On sait alors par l'existence de la solution $B(x_0, r]$ qu'il y aura au moins trois points dans $\text{Fr}(K) \cap B(x_0, r]$ et ces trois points étant évidemment non alignés, ils engendrent par dilatation des boules croissantes dont le premier point commun sera le centre de la boule circonscrite et le résultat est atteint.

APPLICATIONS - C'est le corollaire qui fournit un procédé constructif pour l'analyse d'image : il suffit d'avoir trouvé un rayon n tel que

$$\bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, n] \neq \emptyset \text{ et de faire décroître } n \text{ jusqu'au premier entier } n_0 \text{ tel que } \bigcap_{y \in \text{Fr}(K)} B(y, n_0 + 1] = \emptyset$$

Les premières applications envisageables sont celles d'un zoom automatisé ainsi que l'évaluation de la forme des pics d'une fonction de gris détectés par ouverture.

BIBLIOGRAPHIE -

- (B) BERGER M. : Géométrie Tome 3 Nathan 1978
- (BE) BESICOVITCH. A.S : Journal London Math.Soc. 1948, 23, 237-240
- (M) MINKOWKI, H. : Allgemeine Lehrsätze über Konvexe Polyeder, Nachr.Ges. Wiss. Göttingen, 1897 pp. 198-219
- (V) VALENTINE, F.A : Convex sets - Mac Graw Hill- 1964